LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS
531.25
C89g

RE AGE

University of Illinois
Library at
Urbana-Champaign
Architecture

Digitized by the Internet Archive
in 2021 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

https://archive.org/details/diegraphischesta00culm

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA
19475
45
Del

DIE

GRAPHISCHE STATIK.

Culman

Die Verlagshandlung behält sich für dieses Werk das Recht der Uebersetzung vor.

DIE

GRAPHISCHE STATIK

VON

K. CULMANN,

PROFESSOR DER INGENIEURWISSENSCHAFT AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM ZU ZÜRICH.

UNIVERSITY OF LIBRARY ILLINOIS.

Mit 235 in den Text gedruckten Holzschnitten und 36 Tafeln.

ZÜRICH

VERLAG VON MEYER & ZELLER.

1866.

531.2
C89

a. c.
5. c. Statics.

531.25
C89g

REMOTE STORAGE

Vorrede.

Was mit allen jenen Theorien anfangen, zu denen die verschiedenen einer wissenschaftlichen Behandlung fähigen Zweige der Ingenieurkunde Veranlassung gegeben haben, die uns wohl in den Stand setzen, mit grossem Aufwand an Zeit und Mühe einzelne Aufgaben zu lösen: die aber viel zu umständlich sind, um auf jeden einzelnen in der Praxis sich darbietenden Fall angewendet zu werden, und die sich aus demselben Grunde nicht einmal dazu eignen, die Grundlage zu berechnender Tafeln zu bilden? ist eine Frage, die ohne Zweifel Poncelet vorschwebte, als er sich bemühte, geometrische Lösungen für die verschiedenen im Ingenieurfach sich darbietenden Aufgaben zu ersinnen.

In der That wird auch der Ingenieur den geometrischen Lösungen den Vorzug geben, sobald eine Genauigkeit von drei Stellen oder $^1/_{1000}$, die vollständig erreicht werden kann, genügt: denn die Reisswerkzeuge hat er immer bei der Hand, das Zeichnen ist seine Sprache und vermöge seiner topographisch-geodätischen Bildung ist er mehr als der Architekt und der Mechaniker gewohnt, die Genauigkeit von Schnitten zu beurtheilen und Linien und Punkte *scharf* zu bestimmen.

Die Lösungen Poncelet's waren immer nur Uebersetzungen vorher entwickelter analytischer Ausdrücke. Dass dies ein Um-

1906

weg sei und dass eine geometrische Construction viel weniger leicht sich einprägt, wenn man bei Anwendung derselben eine analytisch entwickelte Formel, deren Herleitung vielleicht nicht mehr gegenwärtig ist, im Kopfe haben muss, als wenn das durch die Aufgabe gegebene Liniengebilde selbst die Grundlage bildet, aus der sich die Lösung einfach geometrisch entwickelt: hat wohl Poncelet selbst innig gefühlt, und eifrig studirte er Geometrie, gleichsam ahnend, welchen Nutzen sie gewähren könnte. Allein nur ausnahmsweise bediente er sich ihrer zur Lösung statischer Aufgaben aus dem Gebiete des Baufaches, immer zog er analytische Lösungen, die er nachher übersetzte, vor.

Die Geometrie direct anzuwenden, versuchte Cousinery in seinem „Calcul par le trait“ (1838). Leider aber stand er, was mathematische Bildung betrifft, nicht auf der Höhe seiner Zeit; spurlos waren an ihm die schon 1832 veröffentlichten Forschungen Steiner's, ebenso wie die seiner Vorgänger vorübergegangen, und statt einfach die elementaren Sätze der neueren Geometrie vorauszusetzen, bemühte er sich auf schwerfällige Weise, mit Hülfe der Perspective sie selbst abzuleiten. Die Perspective beschäftigt sich nur mit einem Strahlenbündel, in dessen Mittelpunkt man sich ein Auge denkt, und mit seinen Schnitten; sie ist daher nur ein specieller Fall der Geometrie des Raumes; der Versuch, von diesem beschränkten Standpunkt aus einen Theil der Geometrie ableiten zu wollen, kann daher nur mehr von historischem Interesse sein; allein der freilich noch beschränkte Gebrauch, der von diesen Sätzen gemacht wurde, verdient gewiss volle Beachtung, und hiermit wagen wir es: die graphische Statik den Technikern als einen Versuch vorzulegen, die einer geometrischen Behandlung zugänglichen Aufgaben aus dem Gebiete des Ingenieurfachs mit Hülfe der neueren Geometrie zu lösen.

Es versteht sich von selbst, dass wir die Kenntniss der neueren Geometrie voraussetzen. Mit der alten Geometrie, in der Lage und Maass bunt durcheinander gemengt sind, sich begnügen zu

wollen, wäre dem Bestreben jener alten Mechaniker gleich zu achten, die ganze Mechanik ohne Hülfe der Analysis ableiten zu wollen.

Wohlmeinende Collegen und Freunde gaben uns den Rath, doch die Definitionen der geometrischen Ausdrücke, deren wir uns bedienen, in einer Einleitung erklären zu wollen. Allein dies ist kaum möglich, ohne eigentliche Geometrie zu treiben; diese definirt ja gerade viel mehr als sie beweist. Es genügt in vielen Fällen, ein geometrisches Gebilde zur Anschauung zu bringen, um von der Richtigkeit desselben zu überzeugen, die dann direct geschaut wird: und zahlreiche Folgesätze, die nur ausgesprochen zu werden brauchen, lösen sich ganz von selbst ab. Den Inbegriff aller dieser Definitionen und Aussagen bildet gerade die Geometrie der Lage; eine Einleitung aber, die diese behandelt, wäre nicht besser als eine jener, welche Differential- und Integralrechnung behandeln. Welcher Anfänger z. B. wird in der Einleitung zu Weisbach's Mechanik die höhere Analysis studiren wollen und können?

Wir setzen also in unserer graphischen Statik die Elemente der Geometrie voraus, welche die „Geometrie der Lage von Dr. G. K. Ch. v. Staudt" (Nürnberg 1847) enthält, denn dieses Werk ist, so viel uns bekannt ist, das erste und auch das einzige, in welchem bei streng geometrischer Ableitung die Elemente der Geometrie der Lage schön systematisch zusammengestellt zu finden sind. Den in ihm gegebenen Definitionen entsprechen die von uns gebrauchten Ausdrücke: gerades Gebilde, Strahlenbüschel, Strahlenbündel, harmonische, involutorische Gebilde u. s. w.

Die zum Verständniss unserer Statik nothwendigen geometrischen Sätze finden sich übrigens auch als Folge analytischer Entwickelungen in der „Analytischen Geometrie der Kegelschnitte von G. Salmon, übersetzt von Dr. Wilh. Fiedler" (Leipzig 1860). Doch konnte in diesem Werke die Bedeutung der geometrischen Begriffe, den geometrischen räumlichen Stufen entsprechend, nicht

so schön aufgebaut werden, weil es sich auf die Ebene beschränkt; deshalb hielten wir uns in der Ausdrucksweise mehr an das ältere Werk v. Staudt's.

Unsägliche Mühe hat es uns gekostet, die nothwendigen Vorkenntnisse bei unsern Zuhörern zu erlangen, zu erlangen, dass von der Schule aus die Geometrie der Lage obligatorisch erklärt werde. 1860 haben wir schon graphische Statik gelesen und 1864 erst wurden die unumgänglich nothwendigen Vorkenntnisse der Geometrie in einem obligatorischen halbjährigen Curs gelesen. Für den Ingenieur, für den Techniker überhaupt, ist die geometrische Bildung nicht minder wichtig als die analytische; hat er es doch immer mit der Darstellung räumlicher Gebilde zu thun, wie nützlich ist es, wenn sein räumliches Anschauungsvermögen einigermaassen ausgebildet worden ist und er mit Leichtigkeit flache Projectionen zu Körpern ergänzen kann und das Ganze auszuführender Bauwerke und Maschinen räumlich durchblickt. Wie viel weiter könnte man es nicht in der darstellenden Geometrie bringen, wenn man die neuere Geometrie oder auch nur die Geometrie der Lage als bekannt voraussetzen dürfte und jene als einen speciellen Fall dieser behandeln könnte, wie viele überflüssige Definitionen und Beweise könnte man nicht ersparen, weil sie als Theile eines höhern Ganzen schon zum vollständigen Bewusstsein von den Schülern eingearbeitet worden wären.

Sieht man so, wie wenig technische Kenntnisse in jenen Kreisen vertreten sind, in denen schliesslich darüber entschieden wird, ob ein Fach obligatorisch oder nicht obligatorisch sein soll; wie schwer es hält, dort von dem nothwendigen Zusammenhang der einzelnen Fächer eines vorgelegten Lehrplans zu überzeugen, welches ängstliche Widerstreben man Neuerungen überhaupt entgegensetzt; wie es wohl noch möglich ist, mit Mühe und Noth den Schülern ein einzelnes nothwendiges Fach aufzubürden, allein wie es geradezu baare Unmöglichkeit ist, ein überflüssiges abzustossen; wie schliesslich dadurch eine solche Ueberbürdung der Schüler mit

Stunden entsteht, dass ihnen vor lauter Hören das Studiren vergeht: dann gelangt man unabweisbar zum Schluss, dass akademische Studienfreiheit allein würdig dem Unterricht an höheren Lehranstalten entspreche.

Wir wollen zwar gern zugeben, dass in den untern Cursen des Polytechnikums geschult werden müsse, weil dieser Anstalt keine so homogen organisirten Schulen vorausgehen, als wie die Gymnasien z. B. den Universitäten, und es hier also noch eines gewissen Zwanges bedarf, um die zum Folgen unumgänglich nothwendigen Vorkenntnisse während der ersten Jahre den Schülern beizubringen: allein das eidgenössische Polytechnikum blüht gewiss nicht, weil diese Bleikugel des Studienzwangs an seinen unteren Cursen hängt, sondern weil an demselben in Folge seiner zufälligen Verbindung mit der kantonalen Universität wissenschaftlicher als an andern technischen Anstalten gebildet wird. Und so wie es deshalb alle andern technischen Anstalten (mit Ausnahme des Pariser Polytechnikums und den dazu gehörigen Fachschulen) bald erreicht hat, ebenso schnell wird es von derjenigen Universität überflügelt werden, welche mit einer tüchtigen naturwissenschaftlich-mathematischen Facultät ausgerüstet, die Hörsäle dieser den Technikern öffnet und letztere mit höherem Streben beseelt.

Dass technische Bedürfnisse dort befriedigt werden können, beweisen hinlänglich das Gedeihen der Astronomie und Medicin, die ihrer innersten Natur nach technische Fächer sind: denn Mathematik und Naturwissenschaften bilden die Grundlage, auf der sie fussen müssen; und dass auf der andern Seite durch Vereinigung der Hülfsmittel der technischen und akademischen Anstalten nur gewonnen werden kann, zeigt die Zunahme der medicinischen Facultät in Zürich, seit sie dem Polytechnikum näher steht.

Uebrigens wird es noch lange dauern, ehe auf diese Weise mit Zürich wird rivalisirt werden können. Ausserhalb Frankreichs hält man es noch nicht für nothwendig, Technikern die höchste mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung zu geben, die das

Land bietet. Göttingen hat eine der ausgezeichnetsten mathematisch-naturwissenschaftlichen Facultäten, und das Polytechnikum wurde hübsch daneben nach Hannover gesetzt; und in demselben gegenseitigen Verhältniss stehen: Heidelberg und Carlsruhe, Tübingen und Stuttgart, Leipzig und Dresden, und da, wo beide Anstalten an dem gleichen Orte bestehen, hält man sie sorgfältig auseinander, wie in Wien, Prag, München, Berlin. Was könnte nicht an diesem letztern Ort geleistet werden, wenn man es verstände, die vorhandenen Kräfte zu vereinigen, wie viel früher wären nicht die geistigen Producte Steiner's z. B. in das Leben gedrungen, wenn er vor einem durch die Techniker erweiterten Kreise gelesen hätte, statt vor den fünf oder sechs Zuhörern aus der Zahl der zukünftigen Oberlehrer. Jetzt werden dort Oberlehrer für technische Schulen gebildet, welche die Bedürfnisse solcher Anstalten nicht kennen, und diese stellen ihre Schüler nicht auf die wissenschaftliche Stufe, auf der sie vermöge der Institutionen des Landes vielleicht stehen könnten, weil sie ihnen Mathematik und Naturwissenschaften erst aus zweiter Hand reichen.

Man entschuldige die obigen Auslassungen; hätten wir irgend wo den geringsten Einfluss auf die Organisation des Unterrichts an einer technischen Anstalt, wir würden uns vielleicht vorsichtiger ausdrücken, weil wir wüssten, dass dies oder jenes unausführbar oder unpraktisch sei. Allein ausserhalb der organisirenden Kreise stehend, und bestrebt und wünschend, den technischen Studien eine breitere wissenschaftlichere Basis zu geben, glaubten wir wohl andeuten zu dürfen, wo diese zu finden sei.

Doch wir müssen zu unserer graphischen Statik zurückkehren. Sie entstand daraus, dass bei der graphischen Behandlung einiger Aufgaben aus dem Gebiete des Baufachs es sich bald zeigte, dass gewisse allgemeine geometrische Begriffe und Constructionen, die bei allen Aufgaben wiederkehren und die untereinander in einem gewissen Zusammenhange stehen, jenen graphischen Lösungen vorausgeschickt werden müssen, wenn man sie nicht bei

jedem einzelnen Abschnitt der Baukunde vorausschicken wollte. Dieser allgemeine Theil bildet den Inhalt der beiden ersten Abschnitte des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. Als erste Lieferung wurden diese schon im Jahre 1864 veröffentlicht, weil die in denselben enthaltenen Methoden auch ausserhalb der Ingenieurschule mannigfache Anwendung fanden, und es uns doch einigermaassen darum zu thun war, deren Ursprung zu documentiren. Wir würden diese erste Lieferung ganz von dem Folgenden getrennt haben, wenn sie voluminös genug geworden wäre, sie enthält jetzt nur den allgemeinen Theil, dessen wir zur Behandlung unserer Bauaufgaben bedurften, allein er wird und muss sich ausdehnen, sowie die graphischen Methoden weitern Eingang finden; dann aber wird sie der Behandlung durch den speciellen Fachmann entschlüpfen, und sie muss durch den Geometer und den Mechaniker zu einem eigenen Ganzen ausgebildet werden, das sich zur neuern Geometrie verhält wie die analytische Mechanik zur höhern Analysis. In dem ersten Abschnitt haben wir vieles dem „Calcul par le trait“ von Cousinery entnommen. Dagegen hoffen wir, man wird das Meiste des zweiten Abschnitts wenn nicht dem Inhalt, doch der Behandlung nach neu finden.

Dieser allgemeine Theil bezieht sich auf kein specielles Fach und kann gewiss Jedem nützlich sein, der präcis zeichnen kann. Dagegen enthalten die vier folgenden Abschnitte die Theorien: des Balkens, des continuirlichen Balkens, des Fachwerks und des Bogens, deren Anwendung auf den Brückenbau speciell Sache des Ingenieurs ist.

Die vier eben aufgezählten Constructionen dienen dazu, Oeffnungen zu überbrücken und es schliesst sich daher ganz natürlich der Versuch, auf graphischem Wege den relativen Werth dieser Constructionen zu bestimmen, an.

Den Schluss bildet die Theorie der Stützmauern. Mit der Ausarbeitung dieser haben wir begonnen; den im „Mémorial de

l'officier du génie" mitgetheilten Theorien Poncelet's folgend, lernten wir zuerst die Vorzüge graphischer Methoden kennen und fassten den Entschluss, sie weiter auszubilden. Während jedoch Poncelet nur Geometrie verwendete, wo er musste, sonst aber der Analysis den Vorzug gab, kehrten wir es um und wendeten die Geometrie an, wo wir konnten, und erzielten so Resultate, die Jeden erwarten, der zum ersten Mal es unternimmt, ein noch unbebautes Feld zu bearbeiten.

Uebrigens mussten wir noch häufig zu analytischen Ableitungen greifen, aus Gründen, die wir häufig im Text beim continuirlichen Balken, bei dem Bogen und bei den Stützmauern angegeben haben. Wir sind auch weit entfernt, die Analysis irgendwie zurückstellen zu wollen; im Gegentheil, wir glauben, der tüchtige Ingenieur bedarf einer harmonischen Ausbildung in allen Zweigen der elementaren Mathematik; und wenn wir in dem vorliegenden Werke der Geometrie den Vorzug gaben, so geschah es, weil die graphischen Anwendungen bisher einigermaassen vernachlässigt worden sind.

Bei der Ableitung analytischer Formeln fühlten wir das Bedürfniss, die räumlichen Stufen, die in der Geometrie so wichtig sind, auch in den Formeln zu markiren, und glaubten, dies am zweckmässigsten durch die Wahl der Schriftgattung zu thun. Wir bezeichneten also überall Körper mit einem grossen gothischen Buchstaben, drei Dimensionen darstellend; die zwei Dimensionen darstellende Fläche mit einem grossen lateinischen und die Linie mit einem kleinen lateinischen. Dem kleinen griechischen Buchstaben bleibt die Dimension 0 oder die Zahl vorbehalten, durch welche Verhältnisse verschiedenster Art ausgedrückt werden.

Die Kraft geht in der graphischen Statik in der Regel aus einer Flächenverwandlung hervor, wird daher der Fläche coordinirt und wie auch sonst allgemein üblich durch einen grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Hieraus ergiebt sich dann

ganz von selbst, dass einerseits das Moment als Product einer Kraft mit einer Linie mit einem grossen gothischen Buchstaben bezeichnet werden müsse, anderseits aber die auf eine Linie vertheilte Belastung oder Kraft pro Längeneinheit, die der Multiplication durch eine Linie bedarf, um Kraft zu werden, mit einem kleinen lateinischen, und die Kraft (Last) pro Flächeneinheit mit einem kleinen griechischen Buchstaben zu bezeichnen sei.

Indem wir uns ferner noch bestrebten, das Aehnliche mit denselben Buchstaben zu bezeichnen, ergab sich die folgende, so ziemlich eingehaltene dualistische Bezeichnungsweise:

$\mathfrak{J}$ Inhalt von Körpern.

$\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{M}$ Momente im Allgemeinen.

$\mathfrak{P}$ Moment das von einer ∞fernen verticalen Kraft herrührt, demnach um eine horizontale Axe dreht.

$\mathfrak{Q}\,\mathfrak{T}$ Momente um die nicht horizontalen Axen.

F Querschnittsflächen.

D und R S. 298 können als Determinanten kaum hier eingereiht werden.

$A\,B$ Auflagerdrücke.

P verticale Kraft.

Q Spannung in einem Streckbaum.

R Pressung „ „ „

S Kraft in Streben und Diagonalbändern.

T Kraft in Bogen und Ketten.

$a\,b\,c\,l\,m\,x\,y\,z$ Basen, Längen, Coordinaten.

p verticale Belastung pro Längeneinheit.

$d\,r\,s\,q$ Durch- und Halbmesser, Fachlängen, Hebelsarm.

f verwandelte Flächen $= \frac{F}{b}$.

$h\,i\,k$ Höhen, Axenentfernungen.

$\alpha\,\beta\,\gamma\,\pi$ bekannte,

$\varphi\,\psi$ unbekannte Winkel und Verhältnisse.

τ Tangenten.

ε Elasticitätscoefficient.

η Momentenverhältnisse.

ϑ Torsionscoefficient.

ϱ Coefficient der absoluten oder rückwirkenden Festigkeit.

σ Coefficient der scheerenden Festigkeit.

ϖ verticale Belastung pro Flächeneinheit.

α und λ von S. 296 können als Momentenverhältnisse kaum hier eingereiht werden.

Das Einhalten eines solchen bestimmten Systems der Bezeichnung ist deshalb so nützlich, weil ein Blick dann genügt, um die Bedeutung eines Ausdrucks zu erfassen, und um die Homogenität desselben zu constatiren. So z. B. die der Körpergleichung:

$$\mathfrak{I} = h\,F = a\,b\,h = h\,r^2\,\pi$$

und der Momentengleichung:

$$\mathfrak{P} = l\,P + {}^1/_2\,p\,l^2 = l\,P + {}^1/_2\,\varpi\,b\,l^2.$$

Heterogene Gleichungen aber giebt es keine in der graphischen Statik, denn man kann keinen Körper einer Linie und kein Moment einem Hebelsarm gleichsetzen, und wenn man dennoch solchen Gleichungen begegnet, so rührt es daher, dass man gewisse Grössen gleich 1 gesetzt hat und es nicht für nothwendig erachtete, diese Einheiten evident zu erhalten.

Doch ist es schwer, ein solches Princip, dessen Nutzen sich im Verlauf der Arbeit aufdrängte, consequent durchzuführen; so waren wir ganz verwundert, auf Seite 55 die *H* gedruckt zu lesen, und doch war es zu spät, um die Holzschnitte der Figuren 50—52, die aus unserer frühern Praxis stammten und uns deshalb nie aufgefallen waren, zu ändern. Ferner haben wir im vierten Abschnitt keine besondern Buchstaben für höhere Momente und anderseits

keine für reciproke Linien, für Gewichte pro Cubikeinheit einführen zu müssen geglaubt.

Schliesslich fühle ich mich noch gedrungen, allen denjenigen meinen Dank auszusprechen, welche so freundlich waren, an der Ausführung meiner graphischen Statik mitzuwirken, vor Allen dem Verleger, der keine Kosten scheute, um sie schön auszustatten, dann meinen ehemaligen Schülern, denen ich 25 der 36 Tafeln, welche das Werk begleiten, verdanke und deren Namen ich bei der Erläuterung der Tafeln diesen beifügen werde.

Ebenso muss ich auch hier noch der Lithographen Wurster und Randegger erwähnen; die Tafeln wurden schön ausgeführt, und wenn sie nun dennoch keine mathematische Genauigkeit darbieten, so kann man dessen die lithographische Anstalt nicht zeihen. Wir haben uns selbst davon überzeugt, dass es unmöglich ist, von der Zeichnung vollkommen genau auf den Stein zu übertragen und dann auch jede Veränderung der Papierdimensionen zu verhüten.

Deshalb wurde auch Taf. 3, auf der Flächeninhalte abgegriffen werden sollen, direct auf Stein gezeichnet; von dieser Tafel und dann von Taf. 7, auf der ebenfalls Längen abgegriffen werden sollen, werden daher auf Verlangen besondere trockene Abdrücke auf Kartenpapier besorgt. Die übrigen Tafeln halten die Probe des mit Zirkelspitze und Winkel nacheonstruirenden Technikers nicht aus.

Man betrachte sie daher als Vorlagen, die zeigen sollen, wie etwa in doppeltem Maassstabe construirt werden kann.

Und nun fahre hin, gern hätte ich dich zum Fundament einer auf wissenschaftlicherer Basis gegründeten Ingenieurkunde gemacht, allein kaum darf ich die Hoffnung hegen, so viel Kraft in mir zu finden, um das Ganze dieses umfangreichen Faches umzuarbeiten: das ist ein Werk, das mir vor Augen schwebt, wie einer

jener alten mittelalterlichen Dome sich vor dem Künstler erhob, der ihn entwarf und der der Hoffnung sich nicht hingeben konnte, ihn je in seiner Vollendung zu schauen.

Doch es mögen dich Andere benutzen und weiter bauen, und was ich nicht kann, werden meine Schüler vollbringen.

Zürich, November 1865.

Culmann.

UNIVERSITY OF
LIBRARY

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt.

Das graphische Rechnen.

Erstes Kapitel.

Die Operationen mit Linien.

Seite

1. Addition und Subtraction 3
2. Multiplication und Division 8
3. Potenziren und Wurzelausziehen 12
4. Multiplication von Linien mit Linien 20

Zweites Kapitel.

Verwandlung der Flächen.

5. Verwandlung des Dreiecks 24
6. Verwandlung des Vierecks 26
7. Verwandlung mehr als vierseitiger Polygone 27
8. Flächentafel für Auf- und Abtragsprofile 29
9. Construction und Benutzung der Flächentafel 33
10. Verwandlung von Kreisflächen 36
11. Verwandlung eines Gewölbbogens (Aufgabe) 39
12. Verwandlung von Flächen, die von beliebigen krummen Linien begrenzt sind 40
13. Bestimmung des Flächeninhalts einer von beliebigen Curven begrenzten Fläche durch Addition der Ordinaten 42
14. Theorie des Planimeters 43
15. Flächenmessung mittelst des Planimeters 50

Seite

Drittes Kapitel.

Verwandlung der Körper.

16. Darstellung der Cubikinhalte durch Linien 53
17. Inhalt regelmässiger Auf- und Abtragskörper 54
18. Bestimmung des Inhalts unregelmässiger Erdkörper nach Guldin's Regel . 59
19. Bestimmung des Cubikinhalts aus Horizontalcurven 62
20. Bestimmung des Cubikinhalts aus cotirten Plänen 64
21. Das Massennivellement 65
22. Die graphische Massenberechnung 72
23. Zusammenhang der Linien mit Flächen, Körpern, Momenten 73

Zweiter Abschnitt.

Die graphische Statik.

Erstes Kapitel.

Zusammensetzung von Kräften, die auf einen Punkt oder in einer Ebene wirken.

24. Zusammensetzung von Kräften, die auf einen Punkt wirken 77
25. Zusammensetzung beliebiger Kräfte in der Ebene 78
26. Seilpolygon oder Drucklinie und Kräftepolygon 79
27. Mittelkraft mehrerer aufeinander folgender Kräfte 80
28. Aenderung der Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte . . . 82
29. Aenderung einer Kraft im Seilpolygon 83

Zweites Kapitel.

Die projectivische Verwandtschaft zwischen dem Kräfte- und dem Seilpolygon.

30. Collineäre und reciproke Beziehungen zwischen dem Kräfte- und dem Seilpolygon 84
31. Das Kräfte- und das Seilpolygon in Verbindung mit Curven zweiter Ordnung 88
32. Der Mittelpunkt der Curve als Pol der Polygone 91
33. Ein Punkt der Curve als Pol des einen Polygons 93
34. Ein unendlich ferner Punkt als Pol eines Polygons 94
35. Der unendlich ferne Punkt einer Parabel als Pol des einen Polygons . . 98

Drittes Kapitel.

Das Moment der Kräfte und unendlich fernen Kräfte in der Ebene.

36. Moment von Kräften in der Ebene 101
37. Graphische Bestimmung der Momente 103

Seite
38. Unendlich ferne und unendlich kleine Kräfte 106
39. Das Maass unendlich kleiner und ferner Kräfte 108
40. Zusammensetzung der unendlich fernen und kleinen Kräfte in der Ebene 109
41. Das Gleichgewicht von Kräften in der Ebene 111
42. Zusammensetzung der Kräfte mit Hülfe der unendlich fernen Kräfte. . 112

Viertes Kapitel.

Die Kräfte im Raum.

43. Die Zusammensetzung der Kräfte im Raum 113
44. Beziehungen zwischen den Momentenflächen, den ihnen entsprechenden Perpendikeln und ihren Projectionen 115
45. Graphische Zusammensetzung der Kräfte im Raum 118

Fünftes Kapitel.

Parallele Kräfte.

46. Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte 122
47. Zusammensetzung mehrerer paralleler Kräfte in der Ebene 123
48. Momente paralleler Kräfte in der Ebene 126
49. Aenderung der Summe und des Momentes (P und $\mathfrak{M}$) der ausserhalb eines festen Querschnitts auf einen Balken wirkenden parallelen Kräfte durch weitere dazu kommende Kräfte 129
50. Mitteldruck der Räder eines Locomotivzuges 132
51. Moment eines Locomotivzuges in Bezug auf den Querschnitt eines belasteten Balkens 134
52. Ungünstigste Stellung eines Locomotivzuges auf Balken verschiedener Spannweite 138

Sechstes Kapitel.

Der Schwerpunkt.

53. Der Mittelpunkt paralleler Kräfte 141
54. Das Moment paralleler Kräfte bezüglich einer Ebene 144
55. Vom Schwerpunkt im Allgemeinen 145
56. Der Schwerpunkt von Linien 147
a) Der Schwerpunkt einer geraden Linie 147
b) Der Schwerpunkt einer gebrochenen Linie 147
c) Der Schwerpunkt eines Kreisbogens 148
d) Der Schwerpunkt einer beliebigen krummen Linie 149
57. Der Schwerpunkt von geradlinigen Figuren 149
a) Der Schwerpunkt eines Dreiecks 149
b) Der Schwerpunkt eines Parallelogramms 150
c) Der Schwerpunkt eines Paralleltrapezes 150
d) Der Schwerpunkt eines unregelmässigen Vierecks 152
e) Der Schwerpunkt eines mehr als vierseitigen Polygons . . . 153

Seite

58. Der Schwerpunkt krummliniger Figuren 153
a) Der Schwerpunkt eines Kreissectors 153
b) Der Schwerpunkt eines Kreissegments 154
c) Schwerpunkte der Parabelsegmente 154
d) Der Schwerpunkt unregelmässiger Figuren (eines Schienenprofils) 155
59. Der Schwerpunkt von Körpern 157
a) Der Schwerpunkt eines Tetraeders 157
b) Der Schwerpunkt unregelmässiger Körper 159

Siebentes Kapitel.

Das Trägheitsmoment.

60. Höhere Momente im Allgemeinen 160
61. Das Trägheitsellipsoid 162
62. Beziehungen eines beliebigen Trägheitsellipsoids zum Centralellipsoid . 167
63. System von parallelen Kräften, deren Intensität der Entfernung ihres Angriffspunktes von einer Ebene proportional ist 170
64. Gruppenweise Zusammensetzung der Kräfte der vorigen Nummer . . 173
65. Der Kern eines Körpers 174
66. Das Trägheitsmoment, die Trägheitsellipse und der Kern einer Figur in der Ebene 176
67. System paralleler an einem ebenen Querschnitt wirkender Kräfte, deren Intensität ihrer Entfernung von einer neutralen Axe proportional ist. Der Kern des Querschnitts 177

Achtes Kapitel.

Construction der Centralellipse, des Centralellipsoids und des Kerns.

68. Construction der Centralellipse und des Centralellipsoids im Allgemeinen 180
69. Centralellipse und Kern ebener geradlinig begrenzter Figuren 181
a) Die Centralellipse und der Kern eines Parallelogramms . . . 181
b) Die Centralellipse und der Kern eines Dreiecks 183
c) Die Centralellipse und der Kern eines Paralleltrapezes . . . 185
70. Centralellipse und Kern parabolischer und elliptischer Figuren . . . 188
a) Die Centralellipse und der Kern eines Parabelsegments . . . 188
b) Die Centralellipse und der Kern eines Parabeldreiecks . . . 190
c) Die Centralellipse ganzer und ringförmiger Ellipsen 192
71. Centralellipse und Kern eines Schienenprofils 193
72. Centralellipse und Kern eines Winkeleisens 197
73. Centralellipsoid und Kern einiger Körper 201
a) Centralellipsoid und Kern eines Tetraeders 201
b) Centralellipsoid und Kern eines Ellipsoids 203
c) Centralellipsoid und Kern eines Prismas und eines Cylinders . 204
d) Centralellipsoid und Kern einer Pyramide oder eines Kegels . 204

Seite

Dritter Abschnitt.

Der Balken.

Erstes Kapitel.

Gleichgewicht der an einem Balkenquerschnitt wirkenden äussern und innern Kräfte.

74. Der Balken und die an ihm wirkenden Kräfte im Allgemeinen . . . 209
75. Die Vertheilung der innern Kräfte über den Balkenquerschnitt . . . 211
76. Das Gleichgewicht der äussern und der innern Kräfte 213
77. Die scheerenden Kräfte in Längenschnitten 219
78. Die scheerenden Kräfte in Querschnitten 224
79. Zusammensetzung der auf ein Schnittelement wirkenden Kräfte . . . 226

Zweites Kapitel.

Construction der innern Kräfte.

80. Construction der Kräfte, welche im Innern einer Eisenbahnschiene wirken 231
81. Bestimmung der im Innern eines Balkens bei verschiedenartigen Belastungen wirkenden Kräfte 233
82. Die Spannungstrajectorien im Längenschnitt eines Balkens 235

Drittes Kapitel.

Beispiele über den geraden Balken.

83. Bestimmung der Kräfte, welche an einem Balken rechteckigen Querschnitts wirken 237
84. Ein Zahlenbeispiel 241
a) Lösung durch Rechnung 241
b) Lösung auf graphischem Wege 242
c) Lösung mittelst des Rechenschiebers 243
85. Verzahnte Balken 245
86. Ein Zahlenbeispiel 247
87. Die Richtung der Zähne 249
88. Maximalspannungen im Innern eines eingemauerten und belasteten Blechbalkens 250

Seite

Viertes Kapitel.

Krahnen.

89. Die äussern Kräfte an krahnenartigen Verbindungen 257
90. Die äussern Kräfte an Krahnen 259
91. Die innern Kräfte, welche in den einzelnen Theilen der Krahnen wirken 263
92. Construction aller an einem Blechkrahn wirkenden Kräfte 264

Vierter Abschnitt.

Der continuirliche Balken.

Erstes Kapitel.

Die am continuirlichen Balken wirkenden Kräfte.

93. Das Gleichgewicht der an einem continuirlichen Balken wirkenden Kräfte 273
94. Ausscheidung der unbekannten Kräfte, welche am continuirlichen Balken wirken 277
95. Wirkungen der einzelnen concentrirten Belastung auf den continuirlichen Balken 279
96. Ungünstigste Belastung des continuirlichen Balkens 285

Zweites Kapitel.

Bestimmung der Pfeilermomente.

97. Momentengleichung des continuirlichen Balkens 288
98. Lösung der Momentengleichungen 296
99. Der continuirliche Balken constanten Querschnitts 303
100. Der continuirliche Balken staffelförmigen Querschnitts 306
101. Der über mehre gleichweite Oeffnungen gestreckte und innerhalb jeder gleich und symmetrisch gebaute continuirliche Balken 310

Drittes Kapitel.

Kräftepläne verschiedener continuirlicher Balken.

102. Der Kräfteplan eines continuirlichen Balkens constanten Querschnitts mit vier Oeffnungen 313
103. Der Kräfteplan eines ungleichförmig belasteten continuirlichen Balkens mit fünf Oeffnungen 328

Seite
104. Kräfteplan eines ungleichförmig belasteten continuirlichen Balkens mit fünf Oeffnungen bei veränderlichem Querschnitt 344
105. Vergleich der Resultate und der Constructionen 351

Fünfter Abschnitt.

Das Fachwerk.

Erstes Kapitel.

Die Theorie des Fachwerks.

106. Die Definition des Fachwerks 359
107. Bestimmung der am Fachwerk wirkenden innern Kräfte 363
108. Die ungünstigste Belastung des Fachwerks 368

Zweites Kapitel.

Die Kräftepläne des Fachwerks.

109. Der Kräfteplan eines Fachwerks der allgemeinsten Form 375
110. Das Fachwerk mit parallelen Streckbäumen 380
111. Kräfteplan eines Fachwerks mit parallelen Streckbäumen 385
112. Kräftepläne einfacher Hängwerke 391

Drittes Kapitel.

Pauli'sche Brücken.

113. Die Form des Pauli'schen Trägers 393
114. Die Festigkeit und Construction des Pauli'schen Trägers 399
115. Das Laves'sche System 404
116. Der Kräfteplan der Pauli'schen Brücke 407

Viertes Kapitel.

Dachstühle.

117. Der englische Dachstuhl 417
118. Der belgische Dachstuhl 420
119. Unregelmässige Dachstühle 426

Seite

Sechster Abschnitt.

Der Bogen.

Erstes Kapitel.

Die Gewölbetheorie.

120. Die Gewölbe, Bogen und Ketten 435
121. Das Gleiten in den Gewölbfugen 437
122. Das Kanten 440
123. Lage der Drucklinie im Gewölbe 444
124. Die Stützlinie eines Gewölbes 447
125. Abweichung der Stützlinie von der Drucklinie 451

Zweites Kapitel.

Construction der Belastungscurven der Druck- und Stützlinien verschiedener Gewölbe.

126. Belastungscurve einer elliptischen Drucklinie 454
127. Drucklinie eines in Form und Belastung gegebenen Gewölbes . . . 458
128. Dimensionen der Gewölbe 460
129. Zeichnung der Druck- und Stützlinien in Gewölben 463

Drittes Kapitel.

Stabilität der Lehrgerüste.

130. Stabilität des nicht geschlossenen Gewölbes 469
131. Construktion des Druckes auf ein Lehrgerüst 472
132. Die Maximalbelastung des Lehrgerüstes 476
133. Kräftepläne einiger Lehrgerüste 479

Viertes Kapitel.

Der Bogen.

134. Lage der Drucklinie im Bogen 483
135. Der Kräfteplan eines Bogens 489
136. Bestimmung der Kräfte, welche an den Füllungsgliedern eines versteiften Bogens wirken 494

Seite

Fünftes Kapitel.

Hängebogen.

137. Kräfteplan eines Hängebogens 498
138. Kräfteplan des Verankerungsgewölbes 501
139. Vertheilte Spannketten 505
140. Annähernde Kräftepläne 508

Sechstes Kapitel.

Die Steifigkeitsconstruction.

141. Theorie der Steifigkeitsconstruction 511
142. Ungünstigste Belastungsart der Steifigkeitsconstruction 515
143. Kräfteplan einer Steifigkeitsconstruction 518
144. Analytische Bestimmung der bei gleichförmiger Belastung an der Steifigkeitsconstruction wirkenden Kräfte 521

Siebenter Abschnitt.

Der Werth der Constructionen.

Erstes Kapitel.

Der Werth einfacher Constructionen.

145. Der Werth der Constructionen im Allgemeinen 527
146. Zweckmässigste Stellung von Streben 529
147. Zweckmässigste Anordnung einfacher Constructionen 532

Zweites Kapitel.

Der Werth zusammengesetzter Constructionen.

148. Darstellung des Werthes einer Construction 536
149. Werth verschiedener Constructionssysteme 538

Seite

Achter Abschnitt.

Theorie der Stütz- und Futtermauern.

Erstes Kapitel.

Das Gleichgewicht nicht gestützter Erdkörper.

150. Die an gleitenden Erdprismen wirkenden Kräfte 547
151. Darstellung der am Erdprisma wirkenden Kräfte 550
152. Druck und Schub eines auf einer geneigten Ebene stehenden Körpers . 552
153. Die Gleichgewichtsbedingungen eines nicht gestützten Erdkörpers . . 554
154. Bestimmung der natürlichen Böschung und des Cohäsionscoefficienten . 557
155. Gleichgewichtsbedingungen eines nicht gestützten und belasteten Erdkörpers 559
156. Formeln für das Gleichgewicht nicht gestützter Erdmassen 561

Zweites Kapitel.

Erd-Druck und Schub auf stützende Wände.

157. Druck eines Erdkörpers auf eine ihn stützende Wand 563
158. Schub eines Erdkörpers 571
159. Verwandtschaft des Erddrucks und Schubs complementärer Erdkörper . 574
160. Formeln für den Erddruck bei Annahmen, welche die Construction vereinfachen 576
a) Druck und Schub eines überhöhten und belasteten Erdkörpers ohne Berücksichtigung der Cohäsion 576
b) Druck oder Schub eines überhöhten aber unbelasteten Erdkörpers, dessen obere Begrenzung den Winkel $\varphi + \varphi_1$ mit der auf- oder abfallenden natürlichen Böschung bildet, ohne Berücksichtigung der Cohäsion 580
c) Druck und Schub eines belasteten aber nicht überhöhten Erdkörpers mit Berücksichtigung der Cohäsion 582
d) Druck und Schub eines nicht überhöhten Erdkörpers, dessen obere Begrenzungsfläche mit der natürlichen Böschung einen Winkel bildet, der der Summe der beiden Reibungswinkel gleich ist 586
e) Erddruck eines oben horizontal begrenzten Erdkörpers auf eine verticale Wand bei Vernachlässigung der Reibung an derselben 588
161. Angriffspunkt des Mitteldrucks und Schubs der Erde 589
a) Im Allgemeinen 589
b) Angriffspunkt des Drucks und Schubs eines belasteten, aber nicht überhöhten Erdkörpers bei Berücksichtigung der Cohäsion . . 591
c) Höhengrenze des Angriffspunktes der Mittelkraft 592

Seite

Drittes Kapitel.

Stärke der Stütz- und Futtermauern.

162. Das Gleichgewicht der an einer Stützmauer wirkenden Kräfte . . . 598
163. Kräfteplan einer Stützmauer 599
164. Stärke einer überhöhten Futtermauer bei Berücksichtigung der Cohäsion 604
165. Stärke gewöhnlicher nicht überhöhter Stützmauern 608
166. Directe Construction von Mauerkörpern, welche gegebenen Kräften widerstehen können 612
167. Aenderung des vordern Anlaufs einer Stützmauer bei constanter hinterer Begrenzung 616
168. Der zweckmässigste Querschnitt einer Stützmauer 619
169. Approximative Stärke der Stützmauern 622

Viertes Kapitel.

Druck auf Tunnelgewölbe.

170. Bestimmung des Drucks auf den untern Theil einer sich drehenden Wandfläche 624
171. Resultate der Constructionen des Erddrucks auf das untere Element einer sich drehenden Wandfläche 628
172. Drucklinie im Tunnelgewölbe 631

Erklärung der Tafeln.

Im Text ist die Nummer der Figur einer Tafel als Index den **Taf.**-Nummern beigefügt, zum Unterschied von den im Text enthaltenen **Fig.**-Nummern. Und in den folgenden Erklärungen sind alle in den Tafeln enthaltenen Worte durch grössere Schrift ausgezeichnet.

Taf. 1.

Potenziren und Wurzelausziehen.

Figur.		Nr.	Seite.
1	Brigg'sche Logarithmen. Logarithmische Spirale, deren Radienvectoren in den Entfernungen 1, 10, 100 geschnitten werden und die daher den Dekadischen (Brigg'schen) Logarithmen entspricht	3	14
2	Logarithmische Selbstevolute	3	17
	Anwendungen Seite 18 und	84	243

Taf. 2.

Multiplication der Linien und Verwandlung der Flächen.

1	Multiplicationspolygon	4	21
	Analogie mit dem Seilpolygon	48	127
2345	Verwandlung von Bahnprofilen.		
23	Einfache Flächenverwandlung von Auf- und Abtragsprofilen . .	7	28
4	Construction von Flächentafeln	8	32
5	Anwendungen der Flächentafel	9	35
67	Verwandlung von Gewölbebogen	11	39

Taf. 3.

Flächentafel.

(Bessard.) 9 33

Taf. 4.

Inhalt von Bahnkörpern und Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene.

(Bessard.)

Figur.		Nr.	Seite.
1	Ein Abtragskörper	17	54
2 3	Ein Wegübergang, Ermittelung seiner Erdmassen . . .	18	61
4 5 6 7	Kräfte- und Seilpolygon.		
4	Seil-,		
5	Kräftepolygon im Allgemeinen	26	79
	Unendlich ferne Kräfte	40	109
	Ihre Zusammensetzung	40	110
6 7	Kräfte- und Seilpolygon mit einer veränderten Kraft	29	83

Taf. 5.

Massen- und Transportprofile.

1	Längenprofile mit den Transportsectionen	21	68
	und der graphischen Massenberechnung	22	72
2	Das Massennivellement	21	65
3	Situationsplan einer Füllgrube mit eingezeichneten Entfernungen	21	68
4	Verwandlung der Querprofile	22	72

Taf. 6.

Zusammensetzung der Kräfte im Raume.

	Bestimmung der Centralaxe	45	118
	Reductionen der Momentenflächen	37	105

Taf. 7.

Belastung durch einen Zug von Locomotiven.

(Westphalen.)

1 2	Durch Engerth'sche Locomotiven	50	132
3	Durch eine Personenzug-Locomotive	50	141
	Seil- und Kräftepolygon.		

Taf. 8.

Kräfte im Innern einer belasteten Schiene.

(Harlacher.)

1	Bestimmung ihres Schwerpunktes	58[d]	155
	Centralellipse und Kern eines Schienenprofils	71	193
	Construction der in der Schiene wirkenden scheerenden Kräfte .	77	220
	Zusammensetzung aller Kräfte, welche in ihrem Innern wirken .	80	231

Figur.		Nr.	Seite.
2	(Gehört zur folgenden Tafel.) Construction einer Ellipse mittelst dreier Tangenten und ihres Mittelpunktes	72	199

Taf. 9.

Trägheitsmoment und Centralkern eines Winkeleisens.

(Harlacher.)

	Centralellipse und Kern eines Winkeleisens	72	197

Taf. 10.

Kräfteplan eines Blechbalkens.

(Menczer.)

1	Ansicht, Kräfte- und Seilpolygon.		
2	Querschnittsmomente.		
3 4	Curven der Maximalspannungen und der scheerenden Kräfte.		
	Bestimmung der Maximalspannungen im Innern eines eingemauerten und belasteten Blechbalkens	88	250

Taf. 11.

Blechkrahn.

(Bessard.)

1	Krahn und Seilpolygon mit der Verwandlung der scheerenden Kräfte, den Trajectorien der Maximalspannungen und dem Fundament.		
2	Das Kräftepolygon.		
3	Die Querschnittsmomente.		
4	Hülfsdreiecke.		
	Construction aller an einem Blechkrahn wirkenden Kräfte . .	92	264

Taf. 12.

Der continuirliche Balken.

(Burkhard.)

	Der Kräfteplan eines continuirlichen Balkens mit vier gleichförmig belasteten Oeffnungen von 52, 65, 65, 52 Mtr. Weite bei constantem Querschnitt . . .	102	313
1 5	Kräftepolygone.		
2 6	Seilpolygone.		
3 7	Curven der Maximalmomente.		
4 8	Curven der scheerenden Kräfte.		

Taf. 13.

Der continuirliche Balken.

(Lücken und Kherndl.)

Figur.		Nr.	Seite.
	Kräfteplan eines Balkens mit fünf ungleichförmig belasteten Oeffnungen von 56, 70, 72, 70, 56 Mtr. Weite bei constantem Querschnitt	103	328
1 2 3	Curven der Maximalmomente und der scheerenden Kräfte.		
	$P' P'' P'''$ Kräftepolygone.		
4 5 6	Seilpolygone.		
7—12	Polygone zur Bestimmung der ℭ-Momente.		
13	Zusammensetzung der ℭ-Momente.		
14	Construction der Pfeilermomente.		

Taf. 14 und 15.

Der continuirliche Balken.

(Kherndl.)

	Kräfteplan eines Balkens mit fünf ungleichförmig belasteten Oeffnungen von 56, 70, 72, 70, 56 Mtr. Weite bei variablem Querschnitt	104	344

1. Blatt.

1	Staffeln, deren Höhe den Elasticitätsmomenten der Querschnitte proportional sind, und Construction der α und λ mittelst derselben.
	$P' P'' P'''$ Kräftepolygone.
2	Construction der ℭ-Momentenflächen.
3	Verwandlung dieser Momentenflächen in Linien.

2. Blatt.

1	Curven der Momente und der scheerenden Kräfte.
	$P' P'' P'''$ Kräftepolygone mit der Construction der scheerenden Kräfte.
2	Seilpolygone.
	Zusammensetzung der ℭ-Momente zu Pfeilermomenten.
3	Reductionsdreiecke.

Taf. 16.

Das Fachwerk im Allgemeinen.

(Westphalen.)

1	Das Fachwerk.		
2	Das Seilpolygon.		
3	Der Kräfteplan.		
	Construction aller Kräfte, welche bei gegebener Belastung an seinen einzelnen Theilen wirken	109	375

Taf. 17.

Fachwerk mit parallelen Streckbäumen.

(Richard.)

Figur.		Nr.	Seite.
1	Ansicht des Fachwerks.		
2	Kräftepolygon mit der Construction der Spannung in den Hängeisen P_{19} und des Drucks in den Streben.		
3	Seilpolygon mit den Momenten des Eigengewichts, der einseitigen Belastung und der Totalbelastung.		
4	Halbe in den Streckbäumen wirkende Kraft und Spanncurve der Hängeisen.		
	Construction aller jetzt aufgezählten Kräfte	111	385

Taf. 18.

Fachwerke.

1	Kräfteplan des Pauli'schen Trägers; bestehend aus dem Kräftepolygon mit den in den Diagonalbändern S und Pfosten wirkenden Kräften, den Momentencurven des Eigengewichts bei einseitiger und totaler Belastung	116	407
2	Kräfteplan eines einfachen Hängwerks	112	391

Taf. 19.

Dachstühle.

(Hahn.)

1	Ein belgischer Dachstuhl mit Kräfteplan Fig. 1, . .	118	420
2	Der englische ,, ,, ,, ,, 2, . .	117	417
3	Der französische ,, ,, ,, ,, 3, . .	118	420
4	Die Einsteighalle zu Bern ,, ,, ,, 4, . .	117	420
5	Die Schützenfesthalle zu Bern ,, ,, ,, 5, . .	119	426
6	Der deutsche Dachstuhl ,, ,, ,, 6, . .	117	420
7	Eine Locomotivremise ,, ,, ,, 7, . .	119	429

Taf. 20.

Drucklinien und Belastungscurven.

(Seestern Pauli.)

1	Belastungscurven eines elliptischen Gewölbes. Construction von Belastungshöhen, welche eine elliptische Drucklinie erzeugen	126	455
2	Evolute der Drucklinie eines Gewölbes, das oben von einer Horizontalen, unten von einem Halbkreis begrenzt ist .	127	458

Taf. 21.

Drucklinien in Gewölben.

(Richard.)

Figur.		Nr.	Seite.
	Construction der Drucklinie und Bestimmung der Widerlagerstärke eines Gewölbes mit:		
1	Halbkreisbogen	129	463
2	Stichbogen	129	463
3	Drucklinie im Doppelbogen des Maidenhead-Viaducts	129	463

Taf. 22.

Druck der Gewölbe auf ihre Lehrgerüste.

(Hahn.)

	Druck eines kreisförmigen Gewölbes	131	472
1 2 3	Reihenfolge der Schichten; gleitende, concentrirter Druck, kantende;		
4	Freitragende zwischen den gleitenden und dem concentrirten Druck;		
5	Gleitende allein;		
6	Concentrirte Belastung allein.		
	Näherungsconstruction	132	478

Taf. 23.

Kräftepläne einiger Lehrgerüste.

(Hahn.)

1	Kräfteplan des Gerüstes eines Stichbogens	133	479
2 3	Kräftepolygon desselben.		
4 5 6	Kräftepläne und Polygone zweier kleinerer halbkreisförmiger Gewölbe.		
7 8 9	Kräfteplan und Polygon eines grössern halbkreisförmigen Gewölbes.		

Taf. 24.

Kräfteplan eines Bogens.

(Hahn und Moll.)

1	Kräfteplan mit den Belastungscurven, ihren Schwerlinien und mit der Drucklinie	135	489
2 3	Construction der Querschnittsfläche und der Höhe des Centralkerns für das Widerlager und den obern Bruchpunkt	135	492

Taf. 25.

Kräfteplan einer Hängebrücke.

(Hahn.)

1	Die Kette als Seilpolygon gezeichnet. Construction der Streckung der Kette mit der dazu gehörigen Gewichtslinie. Links An-		

Figur.		Nr.	Seite.
	deutungen, wie dieselben Constructionen in viel grösserem Maassstabe ausgeführt werden könnten	137	499
2	Kräfte- und Seilpolygon zur Bestimmung der Länge des hohlen Widerlagers. Stützlinien des Widerlagers	138	501
3	Kräftepolygon der Kette mit den Gewichtslinien der verschiedenen Belastungen	137	499
4	Kräfte- und Seilpolygon eines vollen Widerlagers, dessen einzelne Lamellen an die Kette angehängt sind	139	505

Taf. 26.

Kräfteplan einer Steifigkeitsconstruction.

(Kherndl.)

1	Ansicht des versteifenden Fachwerks	143	519
2	Kräftepolygone der einseitigen Belastung	,,	,,
3	Seilpolygone derselben	,,	,,
4	Momentencurven	,,	,,
5	Curven der scheerenden Kräfte	,,	,,

Taf. 27.

Werth verschiedener Constructionen.

(Kherndl.)

	Werth der einzelnen Constructionstheile des:		
1	Bogens	149	538
2	Pauli'schen Trägers	,,	,,
3	Continuirlichen Balkens	,,	,,
4	Fachwerks	,,	,,

Taf. 28.

Erddruck.

1	Construction des Erddrucks auf eine stützende Wand mit Berücksichtigung der Cohäsion	157	563
2	Kräftepolygon der am abgleitenden Prisma wirkenden Kräfte .	,,	,,
3	Bestimmung der auf einem gewissen Durchmesser liegenden Punkte einer Hyperbel	,,	567

Taf. 29.

Erdschub.

1	Construction des Schubs, dem eine Erdwand zu widerstehen vermag bei Berücksichtigung der Cohäsion	158	572
2	Kräftepolygon der am hinausgeschobenen Prisma wirkenden Kräfte	,,	,,

Taf. 30.

Erddruck und Schub nicht überhöhter Erdkörper.

Figur.		Nr.	Seite.
1	Darstellung der Grösse des Erddrucks für verschiedene Höhen der drückenden Wand: ohne Berücksichtigung der Cohäsion und der Belastung (F), mit Berücksichtigung der Cohäsion allein (Fc), mit Berücksichtigung der Belastung allein (Fb), mit Berücksichtigung beider ($Fb\,c$)	160c	583
	Bestimmung des Angriffspunktes dieses Drucks bei obigen Voraussetzungen durch Verwandlung der Momentenflächen . .	161b	592
2	Das Gleiche wird für Erdschub in denselben neben citirten Nummern behandelt.		
3	Bestimmung des Angriffspunktes des Erddrucks und Schubs im Allgemeinen mittelst eines Seilpolygons	161a	589

Taf. 31.

Stärke einer überhöhten Stützmauer.

1	Bestimmung der Stärke einer Stützmauer und ihrer Fundamenttiefe ohne Berücksichtigung der Cohäsion, allein mit Berücksichtigung der Bodenreaction oder des Erdschubs auf die vordere Fundamentfläche	163	599
	Stützlinie der Stützmauer	,,	603
2	Kräftepolygon der in 1 vorkommenden Kräfte	163	603

Taf. 32.

Stärke einer überhöhten Futtermauer.

1	Bestimmung der Stärke einer überhöhten und belasteten Futtermauer bei Berücksichtigung der Cohäsion	164	604
2	Dazu gehöriges Kräftepolygon	,,	,,

Taf. 33 und 34.

Stützmauern bei wechselndem Anlauf.

(Seestern Pauli.)

	Bestimmung der Stärke gewöhnlicher nicht überhöhter und unbelasteter Stützmauern, ohne Berücksichtigung der Cohäsion	165	608
	Directe Construction dieser Stärke	166	613
	Darstellung des Gesetzes, nach welchem sich die Stärke ändert, durch die Curve, welche die vordere Wand der Stützmauer umhüllt	168	620
	Approximative Stärke der Stützmauern und Zusammenstellung der Elemente, welche den Constructionen auf den beiden vorliegenden Tafeln zu Grunde liegen	169	623

Taf. 35.

Druck auf Futtermauern und auf Tunnelgewölbe.

Figur.		Nr.	Seite.
1	Darstellung des Gesetzes, nach welchem der Druck auf eine sich drehende Wandfläche, mit und ohne Berücksichtigung der Cohäsion, sich ändert	170	624
2	Bestimmung der Cohäsion für obige Darstellung . . .	,,	626
3	Reduction aller erhaltenen Drücke auf eine und dieselbe Basis	,,	627
	Discussion der erhaltenen Resultate	171	628

Taf. 36.

Drucklinie im Tunnelgewölbe.

(Hahn.)

	Construction der Erddrücke auf die Elemente eines Tunnelgewölbes und Zusammensetzung derselben zu einer Drucklinie	172	631

ERSTER ABSCHNITT.

DAS GRAPHISCHE RECHNEN.

LIBRARY

Erstes Kapitel.

Die Operationen mit Linien.

1. Addition und Subtraction.

Bei dem Addiren und Subtrahiren haben wir es im graphischen Rechnen nur mit geraden Linien zu thun. Zu addirende oder zu subtrahirende Flächen, Körper, Gewichte, Kräfte u. s. w., müssen erst auf gerade Linien reducirt, d. h. durch solche dargestellt werden, bevor wir diese Operation mit ihnen vornehmen können. Auf die Art und Weise wie diese Reductionen auszuführen sind, werden wir später zurückkommen, und setzen jetzt voraus, dass wir es nur mit den Resultaten dieser Reductionen, mit Linien, zu thun haben.

Die zusammenzusetzenden geraden Linien müssen durch ihre absolute Länge und durch ihre Richtung gegeben sein. Durch die Lage einer geraden Linie allein ist die Richtung derselben noch nicht vollkommen bestimmt, weil in jeder ihrer Lagen zwei um π von einander verschiedene Richtungen, die einander entgegengesetzte heissen, enthalten sind. Gehen mehrere Linien von einem und demselben Punkt (Fig. 1) als Ursprung aus, so genügt es zur genauen Bezeichnung der Richtung die Linien nur auf einer Seite des Ursprungs auszuziehen. Ueberhaupt wird in jeder begrenzten Linie durch Bezeichnung des einen Endes als Ursprung ○ auch die Richtung der

Fig. 1.

Geraden bezeichnet, so hätten z. B. die beiden gleich langen Linien (Fig. 2) entgegengesetzte Richtungen. Zur Bezeichnung der Richtung in einer unbegrenzten Linie oder mehrerer Linien, welche gleiche Lage haben, und überhaupt in allen Fällen, in denen die Bezeichnung des Ursprungs zur unzweideutigen Bezeichnung der Richtung nicht genügt, werden wir uns eines Pfeiles —<— zur Feststellung derselben bedienen. In der Geraden A (Fig. 3) haben also die beiden

Fig. 2.

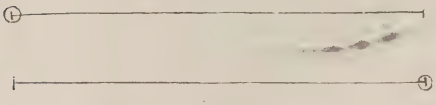
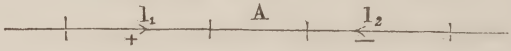


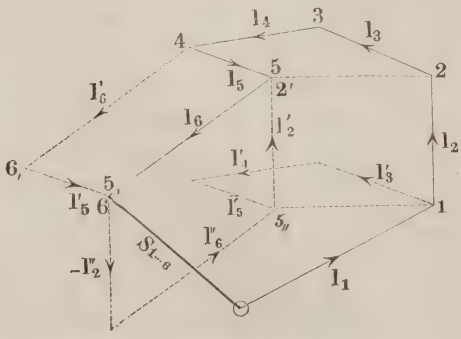
Fig. 3.



gleich langen Linien l_1 und l_2 entgegengesetzte, d. h. um π verschiedene Richtungen. Zur Unterscheidung der beiden in einer und derselben geraden Linie vorkommenden Richtungen gebraucht man häufig auch das Wort Sinn, und sagt z. B., die beiden Linien l_1 und l_2 in A haben entgegengesetzten Sinn, oder sind in entgegengesetztem Sinn aufzutragen. In einer und derselben geraden Linie entsprechen die beiden Sinne ganz dem Vorzeichen + und — in der Analysis, und auch wir werden uns manchmal dieser Vorzeichen zur Unterscheidung der beiden Sinne bedienen, ist also l_1 im Sinne + aufgetragen, so ist es l_2 im Sinne —.

Die graphische Addition besteht nun darin, dass man von einem Ursprung ○ (Fig. 4) ausgehend, die erste der zu addirenden Linien l_1 in Richtung und Grösse aufträgt. Von dem ○ gegenüberliegenden Endpunkt 1 aus trägt man dann die Linie 2 ebenfalls in Richtung und Grösse auf u. s. f. bis zur letzten l_6. Die Linie ○ 6 ist dann in Grösse und Richtung die Summe $s_{1\ldots6}$ der gegebenen 6 Linien l. Hierbei können die Linien l beliebige Richtungen im Raum haben, und Fig. 4

Fig. 4.



kann als eine Parallelprojection derselben betrachtet werden. Soll eine solche Zusammensetzung von Linien wirklich ausgeführt werden, so sind zur Bestimmung der Lage und Grösse der l zwei solcher Projectionen nothwendig, und man wird die Linien ganz nach den Regeln der darstellenden Geometrie projiciren.

Als Resultat dieser Addition, oder als Summe, muss man natürlich den Endpunkt eines solchen Linienzuges betrachten. Also nur dann, wenn alle Linien gleiche Richtung haben, wird die Entfernung dieses Endpunktes der Summe oder Differenz aller Linienlängen gleich sein; und ebensowenig als man aus der Summe mehrerer Zahlen die Grösse der einzelnen Summanden entnehmen kann, kann man hier aus der Lage des Endpunktes allein die der einzelnen Ecken des Linienzuges entnehmen.

Fig. 4 giebt nicht allein die Summen der Linien $l_{1\text{—}6}$, sondern auch die Partialsumme jeder beliebigen Zahl aufeinander folgender Linien. So z. B. ist die Linie 2—5 die Summe der Linien l_{345}.

Aus dem Parallelogramm der 4 Linien l_5 l_6 l'_5 und l'_6, wo l_5 und l'_5 ebenso wie l_6 und l'_6 gleich in Richtung und Grösse sind, geht hervor, dass man zu demselben Endpunkt 6 also auch zu derselben Summe $s_{1\text{—}6}$ gelangt, wenn man in der Ordnung der Addition die beiden Linien l_5 und l_6 miteinander vertauscht. Dasselbe gilt auch von je zwei beliebigen andern Linien, z. B. auch von der Summe $2\text{—}5 = 1\text{—}5_{\prime\prime}$ der Linien l_{345} und $l_2 = l'_2$, indem $1\,2\,5\,5_{\prime\prime}$ ein Parallelogramm ist. Auf $1\text{—}5_{\prime\prime}$ kann man nun einen Zug l'_{345} vorzeichnen, dessen einzelne Strecken in Richtung und Grösse gleich denen des Zuges 2 3 4 5 sind, woraus hervorgeht, dass man von dem Punkt 1 aus zu demselben Punkt $5 = 2_1$ gelangt, man mag die Linien in der Reihenfolge l_{2345} oder in der Reihenfolge l'_{3452} addiren. An der Richtung und Grösse von $s_{1\ldots6}$ wird also nichts geändert, wenn die Linie l_2 zwischen l_5 und l_6 statt zwischen l_1 und l_3 eingeschaltet wird. Auf dieselbe Weise kann jede andere Linie an jede beliebige andere Stelle versetzt werden. Bei Additionen dieser Art ist also die Summe unabhängig von der Reihenfolge, in welcher die einzelnen Linien zusammengesetzt werden.

Subtraction ist Addition im entgegengesetzten Sinne. Um also eine oder mehrere Linien von einer andern Linie oder von der Summe mehrerer andern Linien abzuziehen, hat man nur den Pfeil dieser Linien umzusetzen und dann zu addiren. In Fig. 4 sind von

$s_{1\ldots6}$ die Linien l_2 und l_6 abgezogen worden, d. h. es ist die Summe von $s_{1\ldots6} - l''_2 - l''_6$ gebildet worden, wo $l''_2 = l_2$ und $l''_6 = l_6$ ist. Es ist klar, dass das Resultat gleich $\bigcirc 5_{''}$ der Summe von $l_{1\,3\,4\,5}$ sein muss. Denn wir haben eben gezeigt, dass das Endresultat unabhängig von der Reihenfolge ist, in der die Linien zusammengesetzt werden, mithin wird man auch dieselbe Summe $\bigcirc 5_{''}$ erhalten, wenn man wie folgt addirt:

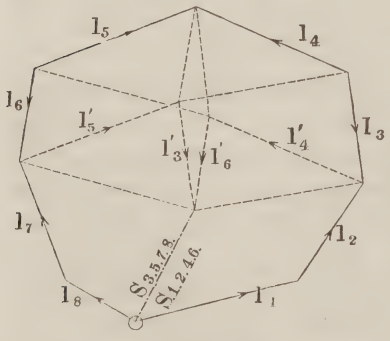
$$l_1 + l_2 - l''_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 - l''_6$$

nun wird aber bei der Bildung von $l_2 - l''_2$ in der Richtung dieser Linien hinaus und in der entgegengesetzten gleich weit wieder zurückgefahren, so dass also $l_2 - l''_2$ und eben so $l_6 - l''_6$ ganz ausfallen, mithin muss das Endresultat $\bigcirc 5_{''}$ gleich der Summe der $l_{1\,3\,4\,5}$ sein.

Bei der Addition haben alle Pfeile in dem fortlaufenden Linienzug denselben Sinn, die Linien mit entgegengesetztem Sinn sind als abgezogene Linien zu betrachten. Ist ein Linienzug geschlossen, und haben alle seine Linien denselben Sinn, so ist die Summe derselben $= 0$.

Stehen in einem geschlossenen Linienzug Linien mit verschiedenem Sinn, so sind die Summen aller Linien von demselben Sinn einander gleich. Man überzeugt sich leicht hievon durch Zusammenstellung aller Linien von gleichem Sinne. Im Linienzug 1 2 . . . 8 (Fig. 5) wurden die Linien 1 2 4 6 und die Linien 3 5 7 8 gleichen Sinnes angenommen, eine Zusammensetzung in der Ordnung 1 2 4. 6. 3. 5. 7 8 zeigt, dass 1 2 4. 6. und 8 7 5. 3. die gleiche Summe $\bigcirc$ (3. 6.) haben.

Fig. 5.



Das bisher Gesagte gilt ganz allgemein, welches auch die Lage der Linien im Raum sei; es gilt also auch, wenn bei der Zusammensetzung der ganze Linienzug in eine Ebene fällt (d. h. wenn alle Richtungen eine bestimmte ∞ ferne Gerade schneiden), und wir haben für diesen Fall nichts beizufügen. Es gilt natürlich auch, wenn der ganze Linienzug in eine Gerade fällt (d. h. wenn alle Richtungen einen ∞ fernen Punkt gemein haben), in diesem Falle wird, wenn Linien von verschiedenem Sinne vor-

handen sind, mitunter die Bezeichnung derselben etwas schwierig. Es ist diess zwar nur eine Nebensache, immerhin aber namentlich für Anfänger wichtig genug um einige Augenblicke dabei zu verweilen. Der Linienzug ist dann ein gerades Gebilde, das entweder durch die einzelnen Punkte oder durch die einzelnen Strecken gegeben sein kann. Sind die einzelnen Punkte gegeben, so bietet die Bezeichnung gar keine Schwierigkeit dar, sie ist unzweideutig, wenn zu jedem Punkt sein Zeichen gesetzt wird. (Fig. 6.)

Ist das gerade Gebilde durch die einzelnen Strecken gegeben, so kann man ebenfalls das Zeichen auf die Strecke setzen, wenn nur Linien gleichen Sinnes vorhanden sind. (Fig. 7.)

Fig. 6.

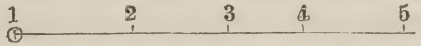


Fig. 7.

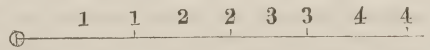


Fig. 8.

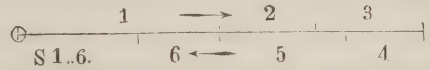


Fig. 9.

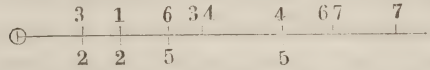


Fig. 10.

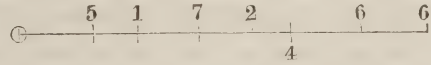
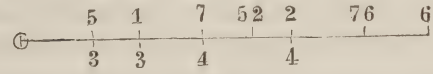


Fig. 11.



Ebenso können auch noch die einzelnen Strecken direct ihr Zeichen erhalten, wenn zwar Linien beider Sinne vorkommen, alle Linien gleichen Sinnes jedoch aufeinander folgen, so dass nur ein Wendepunkt vorkommt (Fig. 8), der Wendepunkt liegt zwischen 3 und 4, und die Summe der 6 Linien ist durch $s_{1...6}$ bezeichnet. Man hat dann nur dem einen Sinn die eine Seite, und dem andern Sinn die andere Seite der geraden Linien zuzuweisen.

Liegen die Strecken beider Sinne durch einander, so ist es am zweckmässigsten, den Grenzen jeder Strecke zwei gleiche Zeichen zu geben, und alle Zeichen gleichen Sinnes auf dieselbe Seite der geraden Linie zu setzen (s. Fig. 9), wie es durch die Pfeile (Fig. 8) angedeutet ist.

Gar häufig kommt man in Versuchung, in jedem der Fälle

7—8 die Punkte zu bezeichnen, diess genügt jedoch nur dann, wenn erstens die Reihenfolge der Strecken und zweitens die Grenze bekannt ist, an der das Zeichen steht. Letzteres könnte wohl dadurch ein für allemal bestimmt werden, dass man das Zeichen an das eine Ende der Strecke setzt, die Ordnung aber geht nicht aus der Figur hervor und muss besonders bemerkt werden.

In Fig. 10 z. B. deutet nichts die Reihenfolge 1 3 5 2 4 7 6 an, und die Länge keiner Strecke ist bestimmt, während aus Fig. 11 ganz unzweideutig hervorgeht, dass auf 1 , 3 und auf 3 , 5 folgt u. s. w.

Da nun Anfänger in ihren Constructionen gar häufig dadurch fehlen, dass sie immer nur Punkte bezeichnen wollen, und dann die zu beiden Seiten des Zeichens liegenden Strecken mit einander verwechseln, so können wir nicht genug empfehlen die Strecken eines geraden Gebildes nöthigenfalls mit zwei Zeichen zu bezeichnen, wenn das Gebilde durch seine Strecken, die Punkte aber zu bezeichnen, wenn es durch seine einzelnen Punkte gegeben ist.

Alles was wir hier von der Addition und Subtraction von Linien in gleicher Richtung und Lage gesagt haben, gilt auch von der Addition und Subtraction von Kreisbogenstücken gleichen Radius auf denselben Bogen, also von Winkeln in der Ebene. Dagegen ist das weiter oben von der Addition im Raum oder in der Ebene Gesagte, nicht mehr anwendbar auf die Addition von grössten Kreisen auf der Kugel, also auf Drehungen im Raum; weil zwei grösste Kreise, welche gleichen Winkel mit einem dritten bilden, nicht mehr parallel laufen, und weil es überhaupt gar keine parallele grössten Kreise auf der Kugel giebt, und weil daher jene in Fig. 4 (s. S. 4) parallel mit sich selbst ausgeführten Zugverschiebungen, auf der Kugel gar nicht mehr möglich sind.

2. Multiplication und Division von Linien mit Verhältnissen.

Man unterscheidet zweierlei Multiplicationen und Divisionen, erstens die von Linien mit Verhältnissen, bei denen das Resultat immer wieder eine Linie ist, und bei der daher keine Aenderung der räumlichen Dimensionenzahl stattfindet; und zweitens die Mul-

tiplication von Linien mit Linien zu Flächen, von Flächen mit Linien zu Körpern etc. und umgekehrt die Division von Körpern durch Linien zu Flächen u. s. w., bei denen eine Aenderung in der räumlichen Dimensionenzahl stattfindet. Diese letztern d. h. die Verwandlung und das Messen von Flächen und Körpern werden in den folgenden Kapiteln behandelt werden, während wir uns hier vorerst nur mit der ersteren, also mit der Multiplication und Division von Linien mit Verhältnissen beschäftigen.

In manchen Werken wird der Fall behandelt, in welchem dieses Verhältniss durch Zahlen gegeben ist, und es heisst da um eine Linie mit 12...n zu multipliciren, trage man sie 1 2 .. $n$mal hintereinander auf einer Geraden auf. So einfach dieses Verfahren ist, so entspricht es doch nicht ganz dem Geiste des graphischen Rechnens. Durch Construiren können wir nur zu Linien, nie zu Zahlen gelangen, und die Construction beginnt erst da wo Linien, nicht Zahlen gegeben sind. Dieses $n$malige Auftragen einer Linie gehört daher noch zur Uebersetzung des Gegebenen in eine Linie, ebenso wie das Abgreifen und Messen der letzten Linie zur Uebersetzung der Schlusslinie in das Resultat gehört. Wir werden daher immer annehmen: das als Faktor zu betrachtende Verhältniss sei durch zwei Linien m und n gegeben.

Das einfachste Mittel zur Multiplication einer Linie l mit einem Verhältniss $\frac{m}{n}$ also zur Bestimmung von $x = l\frac{m}{n}$ bieten ähnliche Dreiecke. Sie können beliebige Lage und eine beliebige dritte Seite haben. Die drei gegebenen Linien l m und n sind dann so zu gruppiren, dass die zu multiplicirenden beiden Linien l und m weder demselben Dreieck angehören, noch homologe Seiten der beiden verschiedenen Dreiecke seien. Findet sich in der Constructionsfigur gerade keine andere passende Lage der beiden Dreiecke, so wird es immer am einfachsten sein, die beiden Dreiecke durch Ziehen zweier Parallelen in einem und demselben Winkel zu bilden, wo dann die beiden in Fig. 12 und Fig. 13 (s. S. 10) dargestellten Anordnungen möglich sind. Alle Linien sind von ○ aus aufgetragen, m darf also weder auf demselben Schenkel aufgetragen noch durch eine der Parallelen mit l verbunden werden, je nachdem man dann n auf demselben (Fig. 12) oder nicht auf demselben (Fig. 13) Schenkel aufträgt, erhält man x nicht auf demselben oder auf demselben Schenkel. In Fig. 12 werden ferner nicht nur die ganzen von ○ aus aufgetragenen, sondern alle

zwischen Parallelen zu $m\,n$ liegende Strecken, wie z. B. $l - n$ im Verhältniss von m zu n reducirt, und wir wollen diess durch die Worte ausdrücken, zwischen den ganzen Schenkeln projicire die Richtung $m\,n$ das Verhältniss $\frac{m}{n}$. In Fig. 13 endlich bestimmen nicht nur alle Parallelen, welche durch die Endpunkte von m und n gehen auf dem andern Schenkel Längen, die sich wie m zu n verhalten, sondern die Parallelen selbst verhalten sich auch wie m zu n und man hat $x_1 = l_1 \frac{m}{n}$.

Fig. 12.

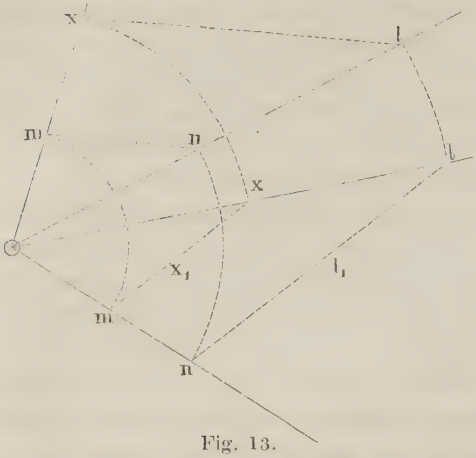
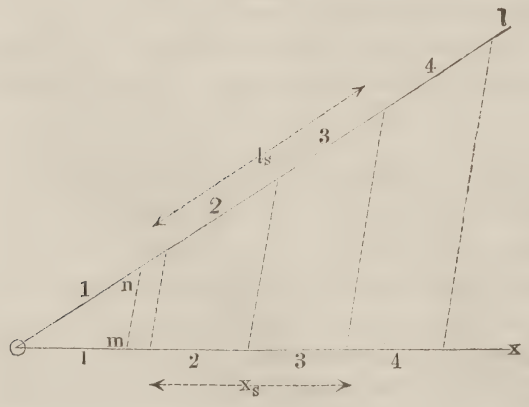


Fig. 13.

Beispiel: Welches ist die Höhe des Steinprismas, dessen Gewicht gerade so gross wäre, als das des Erdprismas und gleicher Grundfläche von der Höhe h. Die sp. Gew. von Erde und Stein verhalten sich wie die Linien $m : n$. Die Höhe des Steinprismas muss im Verhältniss des sp. Gew. von Erde zu Stein reducirt, d. h. mit diesem Verhältniss multiplicirt werden, es ist also $x = h \frac{m}{n}$.

Die obigen Figuren 12 und 13 enthalten die Lösung, wenn man in denselben statt l, h setzt.

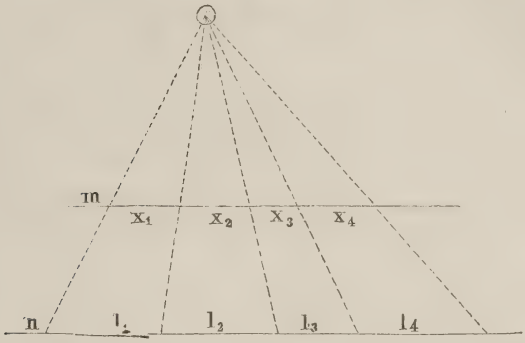
Fig. 14.



Sind mehrere Strecken l_2 l_3 l_s desselben geraden Gebildes mit demselben constanten Verhältniss zu multipliciren, so kann die Fig. 12 analoge Construction Fig. 14, oder die Fig. 13 analoge Fig. 15 gewählt

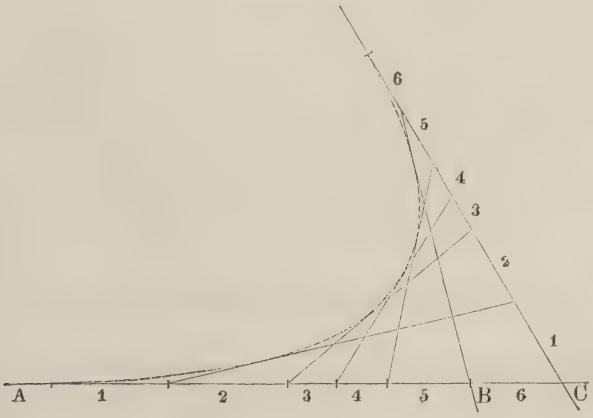
werden. Die Analogien liegen so nahe, dass wir uns nicht mit Nachweiss derselben aufzuhalten brauchen.

Fig. 15.



Alle obige Constructionen erheischen das Ziehen von Parallelen. Indem man sich nun das Entbehren des Ziehens von Parallelen zur erschwerenden Bedingung gab, wurde vorgeschlagen die Parabel als Mittel zur Multiplication mit constantem Verhältniss zu benutzen. Die geraden Gebilde, welche durch die gegenseitigen Durchschnittspunkte der Tangenten einer Parabel entstehen, sind alle in der Art ähnlich, dass sich die durch dieselben Tangenten begrenzten Segmente entsprechen, wobei der Berührungspunkt einer Tangente als Schnitt mit ihr selbst zu betrachten ist. So entsprechen sich (Fig. 16) die gleichbezifferten Segmente der drei geraden Gebilde *A B C*. Wäre nun eines derselben *B* (1 2 3 4 5)

Fig. 16.



und die es berührende Parabel gegeben, und sollten die einzelnen Segmente desselben mit dem Verhältniss $1_C : 1_B$ multiplicirt werden, so könnte man durch alle seine Punkte Tangenten an die Parabel ziehen und dann die Gerade C so an der Parabel tangirend verschieben, dass die Endpunkte von 1_C auf A und die Tangente 12 fallen, so wird C (1 2 3 4 5) dem Gebilde B (1 2 3 4 5) ähnlich sein. Statt der Parabel kann auch noch ein zweites ähnliches Gebilde A gegeben sein, weil dann alle Geraden, welche homologe Punkte verbinden, eine und dieselbe Parabel berühren. Die Lage von C muss dann natürlich auch immer so bestimmt werden, dass diese Linie durch homologe Punkte von A und B gehe. Also 6_A u. 6_B müssen sich entsprechen. Diese allgemeine Construction vereinfacht sich etwas, wenn alle Segmente gleich gross sind, weil dann einfach die Abschnitte 6 auf A und B irgend einem andern Segment dieser Linien gleich zu machen sind. Immerhin ist diese Multiplication viel umständlicher als die der Fig. 12—15 und wir erwähnten derselben nur der Vollständigkeit wegen, ohne auf weitere Spielereien, die mit der Parabel ausgeführt werden können, einzugehen.

Die Division ist identisch mit der Multiplication, wenn man Nenner und Zähler des Divisorverhältnisses mit einander vertauscht. Ausserdem gebraucht man noch häufig das Wort Division statt Multiplication, wenn in den Fig. 14, 15 und 16 nicht einzelne Segmente, sondern die ganze Länge der einen Linie gegeben ist, und es sich darum handelt sie so einzutheilen, dass ihre einzelnen Segmente denen einer anderen gegebenen Linie ähnlich seien. Die Totallängen der beiden gegebenen Linien vertreten die Stelle von m und n. In Fig. 14 ist dann die äusserste Parallele durch die Endpunkte der gegebenen Linien gegeben, und in Fig. 15 erhält man das Projectionsmetrum ○ durch Verlängerung der beiden Linien, welche die Endpunkte der gegebenen und parallel gelegten Linien mit einander verbinden.

3. Potenziren und Wurzelausziehen.

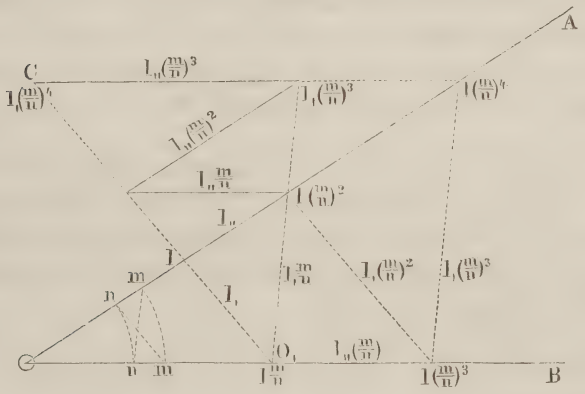
Unter Potenziren versteht man das wiederholte Multipliciren einer Linie mit demselben Verhältniss, also die Bildung der Werthe

$$l\frac{m}{n} \quad l\left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad l\left(\frac{m}{n}\right)^3 \ldots . \quad l\left(\frac{m}{n}\right)^n$$

wenn l und das Verhältniss $\frac{m}{n}$ gegeben sind. Setzt man hier $m=l$ und n gleich der Einheit, so erhält man wirkliche Potenzen von l. Allein es sind nur scheinbare Potenzen, weil sie alle durch die Einheit in derselben weniger 1. Potenz dividirt sind. Da man in Folge dessen verschiedene Längen erhält, wenn man dem Potenziren derselben Linie, einmal 1 Ctm., das andere Mal $^1/_2$ " zu Grunde legt, d. h. n ändert, so wollen wir hier n immer evident erhalten, und die wiederholten Multiplicationen, wie oben angeschrieben, ausführen.

Die Wiederholung der Multiplication von Fig. 12 giebt die Anordnung von Fig. 17. Nachdem man im Winkel ○ durch zwei

Fig. 17.



Kreisbogen beide Richtungen, sowohl die, welche von A nach B, als auch die, welche von B nach A in dem Verhältniss $\frac{m}{n}$ projicirt und die wir antiparallel nennen, bestimmt und l auf A aufgetragen hat, so erhält man durch eine Parallele $l\frac{m}{n}$ auf B durch Ziehen der Antiparallelen $l\left(\frac{m}{n}\right)^2$ auf A u. s. w.

Es bilden dann die Totallängen von A und B geometrische Progressionen

$$l \quad l\left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad l\left(\frac{m}{n}\right)^4 \ldots \qquad \text{und} \quad l\frac{m}{n} \quad l\left(\frac{m}{n}\right)^3 \ldots .$$

mit dem Quotienten $(\frac{m}{n})^2$ und die Längen der aufeinander folgenden Transversalen die geometrische Progression

$$l, \quad l,\frac{m}{n} \quad l,(\frac{m}{n})^2 \quad l,(\frac{m}{n})^3 \ \ldots .$$

des Quotienten $\frac{m}{n}$.

Setzt man zwischen zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Antiparellelen z. B. den ersten, welche den Winkel O, mit einander bilden, die Progression $l,$, $l,\frac{m}{n}$ fort, so erhält man ein $A\bigcirc B$ gleichartiges Gebilde CO,D dessen Schenkel die Träger der Progressionen

$$l, \quad l,(\frac{m}{n})^2 \quad l,(\frac{m}{n})^4 \ . \ . \text{ und } l,\frac{m}{n} \quad l,(\frac{m}{n})^3 \ . \ . \ .$$

sind, und dessen Antiparallelen mit $\bigcirc A$ und $\bigcirc B$ parallel laufen, den einzelnen Segmenten dieser Gebilde gleich sind, und die geometrische Progression

$$l,, \quad l,,\frac{m}{n} \quad l,,(\frac{m}{n})^2 \quad l,,(\frac{m}{n})^3$$

bilden.

Hieraus geht also hervor, dass auch die einzelnen Segmente von $A\bigcirc$ und $B\bigcirc$ eine geometrische Progression bilden, was übrigens noch unmittelbar aus der Aehnlichkeit aller über diesen Segmenten stehenden Dreiecke, gebildet aus dem Segment und einem Paar Antiparallelen, folgt.

Auf die Multiplication mit Verhältnissen, die gebrochene Exponenten haben, werden wir sogleich beim Wurzelausziehen zurückkommen.

Unter Wurzelausziehen versteht man die Bestimmung des Verhältnisses $\frac{m}{n}$ wenn l und $l(\frac{m}{n})^k$ gegeben sind. Dieses Wurzelausziehen kann nicht direct, sondern nur mittelst Hülfscurven ausgeführt werden, von denen wir zwei auf Taf. 1 construirt haben.

Taf. 1 wurde auf den beiden Schenkeln OL und OM eine eben erläuterte Potenzirung mittelst des aus 10 Strecken bestehenden Parallelen- und Antiparallelenzuges $ABCD\ldots KLM$ ausgeführt. Anschliessend an das erste Dreieck AOB wurde dann das zweite $COB = C,OB$ und an dieses letztere das dritte $DOC = D,OC$, u. s. f. in der Art angelegt, dass die Parallelen und Anti-

parallelen einen fortlaufenden nicht gebrochenen Zug $ABC, D, \ldots K, LM$ bildeten, dessen letzte Seite LM wieder mit einer Strecke des Winkels LOM zusammenfällt, wenn dieser einen paaren hier den $^1/_{10}$ Theil des Kreisumfangs bildet. In dieser Figur sind dann nicht nur alle durch eine Strecke und den Mittelpunkt O gebildeten Dreiecke, sondern auch alle Zusammensetzungen von je zweien, dreien oder n derselben ähnlich, weil sie alle aus der gleichen Zahl ähnlicher, und ähnlich liegenden Dreiecken bestehen. Es sind daher alle Winkel $LMO = K, LO = I, K, O = F, G, O$ etc. (es sind nicht alle Schenkel dieser Winkel ausgezogen). Ebenso die Winkel $K, MO = I, LO = H, KO = E, G, O$ etc. und die Winkel $I, MO = H, LO = GKO = D, G, O$ etc. etc. und überhaupt alle Dreiecke ähnlich, welche aus dem Mittelpunkt O und Sehnen gebildet sind, welche die gleiche Zahl Strecken des Zuges $ABC, D, \ldots K, LM$ unterspannen, und die daher auch von Constructionswegen gleiche Centriwinkel bei O haben.

Diese Eigenschaften sind ganz unabhängig vom ursprünglich angenommenen Centriwinkel LOM des ersten angenommenen Elementardreiecks. Sie bestehen also auch noch fort, wenn man diesen Winkel unendlich klein annimmt. Dann verwandelt sich der Streckenzug in eine Curve. Sehnen, welche die gleiche Zahl Elementarstrecken unterspannen, sind solche, die vom Centrum O aus unter gleichen Winkeln projicirt werden. Alle aus solchen Sehnen und dem Centrum gebildeten Dreiecke sind ähnlich und mehrere in gleichen Winkeln auf einander folgende Radienvectoren bilden eine geometrische Progression; die Längen ihrer Schenkel haben das gleiche Verhältniss $^m/_n$. Um also in der oben gestellten Aufgabe das Verhältniss $^m/_n$ zu bestimmen, wenn l und $l\left(\frac{m}{n}\right)^k$ gegeben sind, hat man nur die Radienvectoren zu bestimmen, deren Länge l und $l\left(\frac{m}{n}\right)^k$ ist, den Winkel, den sie einschliessen, in k Theile zu theilen, dann stehen die diesen Winkel einschliessenden Seiten im Verhältniss $^m/_n$.

Aus der Aehnlichkeit aller Elementardreiecke folgt auch, dass deren 3. Seite mit den beiden übrigen Seiten gleiche Winkel bildet; bei unendlich kleinen Centriwinkeln wird aber die dritte Seite zur Tangente, demnach schneiden alle Tangenten die Radienvectoren ihrer Berührungspunkte unter gleichem Winkel. Die vorliegende Curve ist also eine logarithmische Spirale.

Diese logarithmische Spirale lässt sich gar leicht und genau mittelst ihrer Evolute und einzelnen Krümmungsbogen verzeichnen. Die Evolute $F_{,,} G_{,,} H_{,,}$ ist nämlich wiederum eine logarithmische Spirale derselben Progression. Denn da alle Theile der Curve $F, G, H,$ einander ähnlich sind, so sind es nothwendig auch die Dreiecke $F, O F_{,,}$, $G, O G_{,,}$, $H, O H_{,,}$, welche aus dem Mittelpunkt O, einem der drei Punkte $F, G, H,$ und den dazu gehörigen Osculationspunkten $F_{,,} G_{,,} H_{,,}$ gebildet werden. Die Radienvectoren $O (F_{,,} G_{,,} H_{,,})$ verhalten sich daher wie die Radienvectoren $O (F, G, H,)$ und bilden auch dieselben Winkel miteinander, $F_{,,} G_{,,} H_{,,}$ ist daher dieselbe Spirale als $F, G, H,$ und erscheint nur etwas umgedreht.

Zwei beliebige Punkte $F, G,$ der logarithmischen Spirale, das Centrum O und die Schnitte N und $N,$ der entsprechenden Tangenten und Normalen liegen auf einem und demselben Kreis, denn die Winkel $N G, N,$ und $N F, N,$ ergänzen sich zu zwei rechten Winkeln, weil beide selbst rechte Winkel sind; eben so die Winkel $O G, N$ und $O F, N$ weil die Tangenten F, N und $N G,$ die Radienvectoren $O G,$ und $O F,$ unter gleichen Winkeln scheiden: es sind daher die Vierecke $N, F, N G,$ und $O F, N G,$ solche, die einem Kreis einbeschrieben werden können; da aber durch $F, N G,$ nur ein einziger Kreis geführt werden kann, so geht derselbe sowohl durch O als auch durch $N,$. $N N,$ ist ein Durchmesser dieses Kreises, weil die Winkel bei $F,$ und $G,$ rechte sind, mithin ist der Winkel $N O N,$ ebenfalls ein rechter. Diess wird auch dann noch der Fall sein, wenn die beiden Punkte $F, G,$ sich beständig nähern, und endlich zusammenfallen; dann fällt auch der Punkt N mit ihnen zusammen und $N,$ wird als Schnitt zweier unendlich nahen Normalen zum Krümmungsmittelpunkt. Es wird also bei der logarithmischen Spirale jeder Krümmungshalbmesser $F, F_{,,}$ und $G, G_{,,}$ vom Mittelpunkt O aus unter einem rechten Winkel projicirt.

Es ist nun die Evolute leicht zu construiren, wenn der Winkel gegeben ist, unter welchem die Radienvectoren von der Curve geschnitten werden. Der Winkel, den die Normalen $F, F_{,,}$ mit dem Radiusvector bilden, ist das Complement desselben und die Lage des Krümmungsmittelpunktes $F_{,,}$ wird dadurch vollends bestimmt, dass man bei O den rechten Winkel $F, O F_{,,}$ aufträgt.

Sind, wie es gewöhnlich der Fall ist, statt einer Tangente und ihres Berührungspunktes zwei Punkte $F,$ und $G,$ gegeben, die

noch so nahe beisammen liegen, dass die Spirale zwischen ihnen durch ein Kreisbogenstück ersetzt werden kann, so wird N, d. h. der Mittelpunkt dieses Bogens, der Endpunkt des Durchmessers des Kreises G, F, O sein, der senkrecht auf der Sehne $F, G,$ steht. Bestimmt man auf dieselbe Weise den Mittelpunkt eines weitern Bogenstücks $G, H,$ indem man einen weitern Kreis durch H, G, O legt, und seinen Durchschnitt $P,$ mit dem auf $H, G,$ senkrecht stehenden Durchmesser bestimmt, so werden die Punkte $P, N, G,$ auf einer geraden Linie liegen, wenn die Curvenstücke $F, G,, G, H,$ durch Kreisbogenstücke ersetzt werden können. Ist auf diese Weise ein Mittelpunkt $N,$ genau construirt, so lässt sich der nächste $P,$ und so fort alle folgenden einfach dadurch bestimmen, dass man $G, O P,$ dem Dreieck $F, O N,$ ähnlich macht, und so kann dann die Curve leicht fortgesetzt werden.

Noch leichter lässt sich die logarithmische Selbstvolute Taf. 1_2 bei der nämlich die Evolute nicht mehr verdreht erscheint, sondern mit der Spirale selbst zusammenfällt, construiren. Hat man einmal ein den Winkel $\frac{3}{2}\pi$ dieser Curve umfassendes Stück construirt, so lässt sie sich ganz einfach dadurch fortsetzen, dass man bei Beschreibung der sie ersetzenden Kreisbogenstücke die Zirkelspitze auf den beschriebenen Theil der Curve selbst aufsetzt. Die Normalen und Krümmungshalbmesser UT, TS, SO sind Tangenten zugleich. Der Winkel, unter dem diese Curve die Radienvectoren schneidet, ist $= 74^0, 39,' 18,''53.$ Die Tangente dieses Winkels d. h. das Verhältniss der Radienvectoren

$$\frac{RO}{OS} = \frac{SO}{OT} = \frac{TO}{OU} \text{ etc. ist } = 3{,}6441734.$$

Mittelst dieses Verhältnisses (von dem $\frac{215}{59}$, $\frac{379}{104}$, $\frac{973}{267}$, angenehme Näherungswerthe für prismatische Maassstäbe die 3 Ziffern umfassen, sind) kann das Beschreiben dieser Curve ohne weiteres vor sich gehen; ausserdem aber können auch beliebige Radienvectoren nach der Formel

$$log.\ \frac{r}{c} = 0{,}000034666603\ \Theta'$$

wo Θ' den Winkel in Minuten bezeichnet, den die Leitstrahlen r und c miteinander bilden, berechnet werden.

Diese beiden Spiralen (Taf. 1) können ganz die Stelle von Logarithmentafeln vertreten, und es lassen sich mittelst derselben alle Aufgaben lösen, bei denen Verhältnisse von Linien zu multipliciren und zu Potenziren sind. Der Winkel zwischen zweien beliebigen Radienvectoren ist immer der Logarithmus ihrer Verhältnisse, und wir werden weiter unten durch ein Beispiel zeigen, wie diese Spiralen angewendet werden können.

Da die Längen der Leitstrahlen nicht direct mit den Winkeln, die sie mit einander bilden, verglichen werden können, so ist es für unsere Constructionen ganz einerlei, welches die Progression der Spirale ist. In Taf. 1 wurde sie so gewählt, dass nach einer Umdrehung der Leitstrahl sich auf das Zehnfache vergrössert hat. Dem entsprechend wurde auch der Umfang des Kreisbogens, auf dem die Winkel gemessen werden können, in 20 Theile getheilt und mit 0 5 10 .... 90 95 100 bezeichnet, so dass diese Anordnung dem Decimalsystem entspricht. Es liegen alle Radienvectoren, deren gegenseitiges Verhältniss 10, 100, 1000 ... ist, auf demselben Strahl. Doch ist diese Anordnung von keinem Werth für die graphische Statik, weil diese keine Zahlenverhältnisse kennt. Es verdient daher die Selbstevolute Taf. 1_2, die sich leichter und mithin auch genauer construiren lässt, immer den Vorzug vor allen andern. Der Kreisumfang, auf dem die Winkel gemessen werden können, ist hier in 24 Theile getheilt. Damit die Winkelbogen beider Spiralen nicht zu entfernt von ihr liegen, wurden in grössern Entfernungen noch weitere Kreisbogen gezogen und eingetheilt, so dass die Längen der Kreisbogen nie viel kleiner als die entsprechenden Längen der Spiralen seien, und die Genauigkeit der Construction nicht leide.

Beispiel. Es sind die 3 Höhen $a\ b\ c$ eines Parallelepipedons gegeben, wie gross ist die Seite x des Würfels gleichen Inhalts.

Man hat $x = \sqrt[3]{abc}$ zu bilden.

oder $$\frac{x}{l} = \sqrt[3]{\frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{l}}$$

wo l den Leitstrahl des Ursprungs, die Einheit, bezeichnet. Nachdem man auch die Leitstrahlen der Länge $a\ b$ und c (Taf. 1_2) bestimmt hat, addire man die drei Winkel $\widehat{al}$, $\widehat{bl}$, $\widehat{cl}$ mit Berück-

sichtigung ihres Sinnes, und es wird x der Leitstrahl sein, welcher mit l einen Winkel bildet, der gleich dem $^1/_3$ dieser Summe ist.

Die Construction vereinfacht sich etwas, wenn man für l eine der gegebenen Höhen annimmt, es ist dann

$$\frac{x}{a} = \sqrt[3]{\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a}}$$

Ist a die grösste oder die kleinste der drei Höhen, so sind $\hat{ba}$ und $\hat{ca}$ gleichen Sinnes einfach zu addiren und zu dritteln. Ist dagegen a die mittlere Länge und diese Annahme wurde Taf. 1_2 gemacht, so sind $\hat{ba}$ und $\hat{ca}$ entgegengesetzten Sinnes, man hat sie von einander abzuziehen; geht man dabei so zu Werke, dass die Differenz $\hat{a\triangle}$ im grössern Winkel an a anzuliegen kommt, so wird x der Schenkel des nächsten Winkels sein, welcher diese Differenz $\hat{a\triangle}$ drittelt. Diese letzte Construction wird wohl immer die genauere sein.

Gar häufig hat man $x = \sqrt{ab}$ auszuführen, diess könnte nun auch unter der Form

$$\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

leicht mittelst der Spirale geschehen, doch wird es wohl in allen Fällen einfacher und zweckmässiger sein, den Kreis zur Bestimmung der mittlern Proportionalen zu benutzen.

Mittlere Proportionale $x = \sqrt{ab}$ sind:

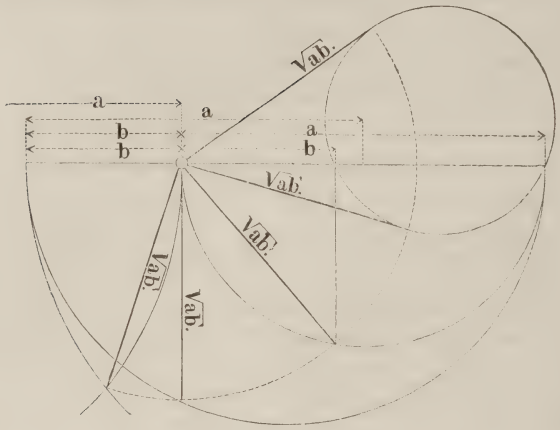
a) Die Kreistangente zwischen den Abschnitten einer der durch den Endpunkt der Tangente gehenden Secanten.

b) Die Sehne eines Kreises zwischen ihrer Projection auf einen der beiden durch ihre Endpunkte gehenden Durchmesser und dem Durchmesser.

c) Eine halbe Sehne zwischen den Abschnitten des auf ihr senkrecht stehenden Durchmessers.

d) Die gleich langen Sehnen zweier Kreisbogen gleich langen Halbmessers, welche einerseits durch einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt, andererseits durch die Verbindungslinie ihrer

Fig. 18.



Mittelpunkte begrenzt werden: zwischen dem Segment, das die Kreisbogen auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte abschneiden und ihrem Halbmesser.

Die Richtigkeit von *a b c* wird in jeder Geometrie bewiesen, die Uebereinstimmung von *b* und *d* aber leuchtet ein, wenn man berücksichtigt, dass das Segment in *d* gleich der doppelten Projection der Sehne in *b*, dagegen der Halbmesser in *d* nur gleich der Hälfte des Durchmessers in *b* ist.

In Fig. 18 sind die diesen Sätzen entsprechenden Constructionen der mittlern Proportionalen zusammengestellt.

4. Multiplication von Linien mit Linien.

Betrachtet man Flächeninhalte als Producte zweier Linien, so können die Inhalte der einzelnen geometrischen Figuren nach den Regeln der Geometrie und den oben entwickelten durch directe Multiplication bestimmt werden, wenn man die Fläche als Product zweier Linien durch eine constante Länge *b*, die wir die Basis nennen wollen (häufig wird sie auch einfach mit Einheit bezeichnet), dividirt; man erhält dann das Product einer Linie mit einem Verhältniss, das nach dem bisherigen darstellbar ist. Wir wollen diess sogleich durch ein Beispiel erläutern.

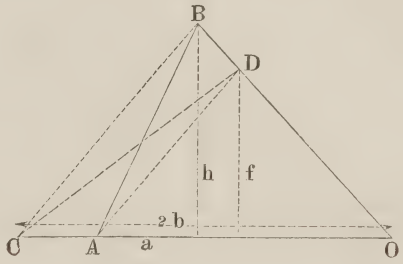
Ist *a* die Basis, *h* die Höhe eines Dreiecks, so ist dessen

Flächeninhalt $F = {}^1/_2\, ah$. Dividirt man nun diese Fläche durch die Basis b und bezeichnet man den nun die Fläche darstellenden Quotienten als Linie mit f, so wird

$$f = \frac{F}{b} = a.\ \frac{h}{2b} = h.\ \frac{a}{2b}$$

Diese zwei Multiplicationen sind in Fig. 19 und 20 ausgeführt. Nachdem in Fig. 19 $OC = 2b$ aufgetragen und in Fig. 20 der Punkt D so bestimmt wurde, dass er um $2b$ über AO liegt, sind in beiden Figuren durch Ziehen der Parallelen AD und BC ähnliche Dreiecke ADO und CBO gebildet worden, von denen die Höhen homologe Längen sind. Man hat daher in beiden

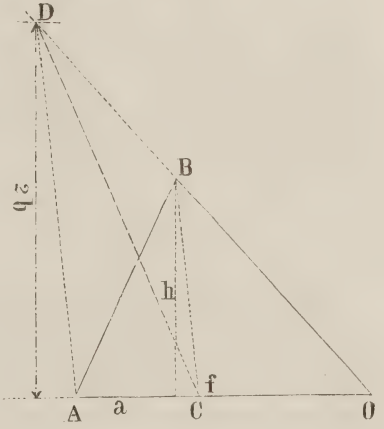
Fig. 19.



$$\frac{f}{h} = \frac{a}{2b}$$

wo a und h weder demselben der ähnlichen Dreiecke angehören, noch homologe Seiten der beiden verschiedenen Dreiecke sein dürfen.

Fig. 20.



Ausser dieser Anordung kann es natürlich noch verschiedene andere geben, unter denen wir hier nur eine hervorheben wollen, die besonders dann zweckmässig ist, wenn es sich darum handelt, die Summe mehrerer Multiplicationen zu erhalten, indem sie diese nicht nur fortlaufend auf einer geraden Linie giebt, sondern auch noch mit Berücksichtigung des Sinnes multiplicirt.

Man trage (Taf. 2_1) den einen Faktor a aller Producte auf einer Geraden a von O aus so auf, dass $O1 = a_1$; $O2 = a_2$ ist, die $a_6\, a_7\, a_8\, a_9$

entgegengesetzten Sinnes kommen dann natürlich auf die andere Seite zu liegen. Den andern Faktor aller Producte trage man fortlaufend und ebenfalls mit Berücksichtigung des Sinnes auf der Linie h so auf, dass die Totallänge von $h = \Sigma h$ ist. Von diesen h wurden h_4 und h_7 negativ angenommen. Das gerade Gebilde h das man so erhält, projicire man von irgend einem Punkt O_1 aus, dessen Entfernung von h parallel zu a gemessen $= b$ gleich dem Faktor ist, mit dem man alle Producte ah zu dividiren, oder gleich der Basis, auf welche man alle Producte zu reduciren wünscht; und das gerade Gebilde a projicire man durch Parallelstrahlen zu h. Verbindet man nun diese Parallelstrahlen durch einen Polygon in der Art miteinander, dass je zwei auf einem Parallelstrahl, 3 z. B. sich schneidenden Polygonseiten, mit den das entsprechende h hier h_3 von O_1 aus projicirenden Strahlen parallel laufen und so, dass die Polygonseiten in derselben Ordnung auf einander folgen in der die h addirt wurden: so werden die verlängerten Polygonseiten auf der zu h parallelen Linie Of Stücke f hier f_3 abschneiden, die den Producten

$$\frac{a\,h}{b}, \text{ hier } \frac{a_3\,h_3}{b}$$

wo b constant ist, gleich sind. Denn denkt man sich durch das Eck 3 des Polygons eine Linie a_3 parallel zu a und b gezogen, so werden, weil die 3 Strahlen O_1 (b 33) und O_3 (a_3 33) und zudem f und h parallel laufen, diese beiden Gebilde ähnlich sein und

$$\frac{f_3}{a_3} = \frac{h_3}{b} \text{ d. h. } f_3 = \frac{a_3}{b}\,h_3$$

geben.

Folgen ferner die Polygonseiten in der Ordnung der h aufeinander, so werden auch die f in derselben Ordnung aneinanderliegend folgen, und daher die f, d. h. die Producte

$$\frac{a\,h}{b}$$

in derselben Ordnung summirt erscheinen, in welcher die h summirt wurden. Eine Folge dieser gleichen Ordnung wird es auch sein, dass jede Polygonseite z. B. die zwischen den Ecken 3 und 4 mit dem Strahl von O_1 parallel läuft, der die entsprechenden h_3 und h_4 von einander trennt, und der mit demselben Zeichen 3 4

versehen ist. Durch Beachtung dieses Merkmals werden wohl am sichersten Irrungen bei der Construction des Polygons vermieden.

Zum Schluss haben wir noch zu zeigen, dass wir die Producte

$$\frac{a\,h}{b}$$

mit Beachtung des Sinnes auf f summirt haben. Denken wir uns, es beschreibe ein Strahl den Büschel O_1 so wird ein anderer Strahl das Polygon (hier ein Strahlenbüschel höherer Ordnung) in der Art beschreiben, dass so lange der Strahl von O_1 sich innerhalb desselben h bewegt, der ihm parallel laufende Polygonstrahl in demselben Sinne sich um das entsprechende Polygoneck dreht. Wenn also der Strahl O_1 von einem h zum andern z. B. von h_3 zu h_4 übergehend, also bei dem Strahl $O_1(3\,4)$ seinen Sinn ändert, so wird auch der Polygonstrahl vom Eck 3 zum Eck 4 übergehend, ebenfalls seinen Drehungssinn ändern. Ferner ist es klar, dass alle f, welche im gleichen Drehungssinn von Ecken aus beschrieben wurden, die auf derselben Seite von Of liegen, ebenfalls gleichen Sinnes sind; z. B. $f_{1\,2\,3\,5}$ ebenso $f_{6\,8\,9}$. Entgegengesetzten Sinnes aber sind die f wenn sie mit entgegengesetztem Drehungssinn von Ecken beschrieben sind, die auf derselben Seite von Of liegen und wenn sie mit gleichem Drehungssinn von Ecken aus beschrieben wurden, welche auf entgegengesetzten Seiten von Of liegen. Also f_5 u. f_6 sind entgegengesetzten Sinnes, weil sie wohl in demselben Drehungssinn aber von verschiedenen Seiten von Of aus beschrieben wurden. — Folglich sind die f gleichen Sinnes, welche in entgegengesetztem Drehungssinn von Ecken aus beschrieben wurden, welche auf verschiedenen Seiten von Of so $f_{1\,2\,3\,5}$ und f_7 so wie auch f_4 und $f_{6\,8\,9}$, liegen.

Diess stimmt also ganz überein mit dem Zeichenwechsel eines aus zwei Faktoren bestehenden Products in der Analysis. Das Zeichen des Productes ändert sich, wenn das Zeichen eines Faktors, es ändert sich nicht, wenn die Zeichen beider Faktoren geändert werden.

Für die Grösse der einzelnen f und ihrer Summen ist die Lage des Punktes O_1 von h ganz gleichgültig, vorausgesetzt, dass seine parallel zu $O\,a$ gemessene Entfernung immer $= b$ bleibe. Durch eine Verschiebung des Punktes O_1 parallel zu h wird wohl auch eine entsprechende Verschiebung aller Polygonseiten allein

keine Aenderung in der Länge und Lage der f bewirkt. — Endlich wird auch nichts an der Summe der f geändert, wenn man die Reihenfolge der h ändert, vorausgesetzt, es werde auch entsprechend die der a geändert.

Taf. 2_1 ist in der Reihenfolge 8 mit 9 vertauscht worden, und es bedarf wohl keines besondern Nachweises, dass wenn $h_{8'} = h_8$ und $h_{9'} = h_9$ sind, nothwendiger Weise auch die $f_{8'} = f_8$ und $f_{9'} = f_9$ sein müssen, wenn die Ecken, von denen aus sie beschrieben wurden, auf denselben Parallelen 8 und 9 zu $O f$ geblieben sind.

Zweites Kapitel.

Verwandlung der Flächen.

---

5. Verwandlung des Dreiecks.

Die Richtigkeit der oben Nr. 4 zur Bestimmung des Flächeninhalts auf Fig. 19 u. 20 (s. S. 21) ausgeführten Multiplication lässt sich auch direct geometrisch nachweisen. Verbindet man nämlich C und D, so ist wegen der Parallelen AD und BC der Inhalt des Dreiecks $OCD = OAB$. In Fig. 19 ist dann $2b$ die Basis, f die Höhe, in Fig. 20 aber $2b$ die Höhe f die Basis des Dreiecks OCD mithin ist in beiden Fällen der Flächeninhalt von $OAB = F =$

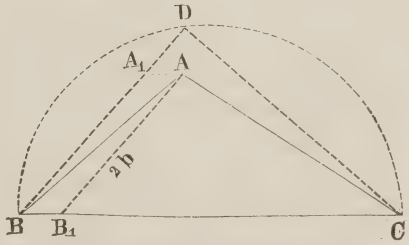
$$\tfrac{1}{2} \cdot 2b f = bf. \text{ oder } f = \frac{F}{b}.$$

d. h. wir haben den Flächeninhalt F durch die Höhe f eines Rechtecks dargestellt, dessen Basis $= b$ ist. Wir sind also hier durch Verwandlung des Dreiecks AOB auf die Dreiecksbasis oder Dreieckshöhe $2b$ genau auf dieselbe Weise zu demselben f gelangt, als wie früher durch Multiplication derselben Höhe mit der Basis und durch Division des Productes durch b. Bei complicirteren Figuren lässt sich diese Uebereinstimmung nicht mehr nachweisen, und

dann ist die Verwandlung der Figur entschieden der Bestimmung und Summirung der Flächeninhalte aller einzelnen Dreiecke, aus denen sie besteht, durch Multiplication ihrer Dimensionen vorzuziehen. Wir wollen also jetzt zeigen, wie beliebige Figuren durch Verwandlung in ein Rechteck mit bestimmter Basis oder ein Dreieck, das das Doppelte dieser Basis zur Höhe oder Basis hat, gemessen werden können. Man erhält dann durch diese Verwandlung Linien, welche diesen Flächeninhalten proportional sind, und die ganz nach den Regeln der vorigen von Nr. 1, 2, 3 behandelt werden können.

Es muss nicht immer, wie in Fig. 19 und 20, irgend eine der drei Seiten eines Dreiecks als dessen Basis betrachtet werden, sondern es kann jede Linie AB_1 (Fig. 21), welche einen Eckpunkt A mit einem Punkt B_1 der gegenüberliegenden Seite BC verbindet, als solche betrachtet werden. Als Höhe hat man dann die orthogonale Projection CD der A gegenüberliegenden Seite BC auf eine Senkrechte zu AB_1 anzunehmen. Diese Projection auf einen Perpendikel wollen wir zum Unterschied der Projection auf die Linie AB_1 selbst, die Antiprojection nennen.

Fig. 21.



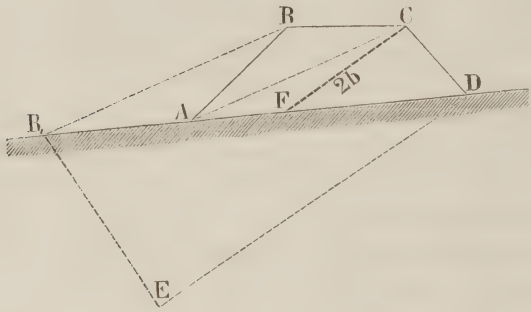
Denn verwandelt man durch Ziehen der Parallelen AA_1 das Dreieck ABC in das Dreieck gleichen Inhalts A_1BC (CA_1 ist nicht ausgezogen) so dass A_1B parallel und gleich AB_1 ist, so wird CD die Höhe des Dreiecks A_1BC sein. CD nimmt seinen grössten Werth an, wenn es mit BC zusammenfällt, dem entspricht dann der kleinste Werth von AB_1, nämlich die Höhe des Dreiecks ABC. Dreht man dann AB_1, so nimmt es bis ins Unendliche zu, während D einen Halbkreis auf BC beschreibt und bis zu 0 abnimmt. Man kann demnach jede Länge, die grösser als die Höhe des Dreiecks ist als Basis, und als Höhe jede Länge, die kleiner ist als die A gegenüberliegende Seite BC zur Reduction anwenden.

Ist nun eine der beiden Linien CD oder AB_1 gleich der Doppelbasis $2b$ angenommen worden, so wird die andere gleich der Linie f sein, die den Flächeninhalt darstellt.

6. Verwandlung des Vierecks.

Das Viereck $ABCD$ (Fig. 22) könnte man durch Ziehen der Parallelen BB_1 zu AC in ein Dreieck B_1CD verwandeln (die

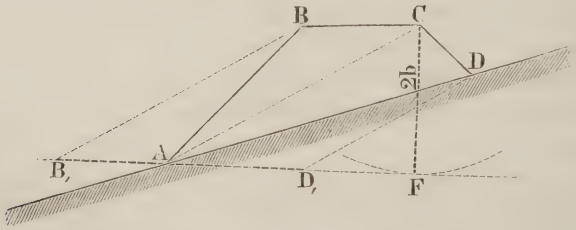
Fig. 22.



Linie B_1C wurde nicht ausgezogen) und dann durch eine beliebige Basis FC und die dazu gehörige Antiprojection B_1E der Seite B_1D den Flächeninhalt des Dreiecks bestimmen, nach dem man entweder CF oder B_1E gleich der Doppelbasis $2b$ angenommen hatte, erhält man die andere Linie als Maass f des Vierecks.

Man kann jedoch ohne Verwandlung zur Reduction des Vierecks auf die Doppelbasis $2b$ gelangen; man beschreibe (Fig. 23) mit

Fig. 23.

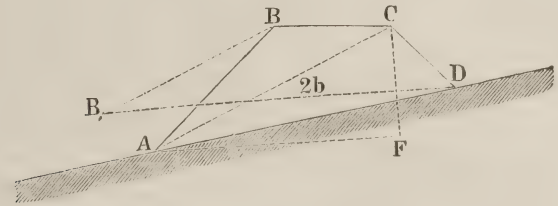


$FC = 2b$ einen Kreisbogen von C aus, ziehe von A aus eine Tangente B_1F an denselben, und betrachte FC als Antiprojection der Diagonalen AC, dann wird (analog der Fig. 21 S. 25) wenn BB_1 und DD_1 parallel zu CA laufen, AB_1 die Basis des Dreiecks ABC und AD_1 die Basis des Dreiecks ACD, mithin der

Flächeninhalt $ABCD = {}^1/_2 \overline{B,D,} \cdot \overline{CF} = {}^1/_2 \overline{B,D,} \cdot 2b = \overline{B,D,} \cdot b$ und durch $B,D,$ dargestellt sein.

Diese Construction ist nicht mehr ausführbar, wenn CF länger als die grösste Dimension des Vierecks $ABCD$ ist; dann

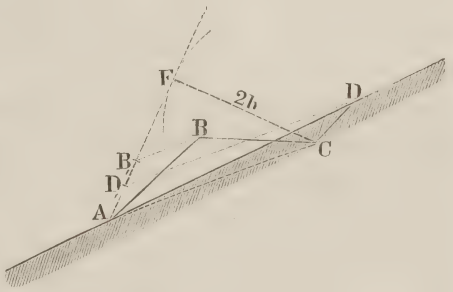
Fig. 24.



trage man diese Länge $2b$ als Basis B,D auf, indem man von D aus mit der Zirkelöffnung $2b = B,D$ auf der zur Diagonalen AC Parallelen BB, den Punkt B, abschneidet. Der Flächeninhalt wird dann durch die Antiprojection CF der Diagonalen AC gemessen.

Ist das Viereck verschlungen, wie Fig. 25, so geben obige Constructionen die Differenz (statt wie in Fig. 24 die Summe) der beiden Dreiecke ABC und ACD aus denen das Viereck besteht. Die Basen der beiden Dreiecke ABC und ADC fallen dann auf einander, ziehen sich ab und die längere AB, bezeichnet die grössere Fläche.

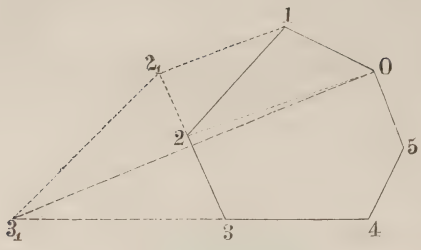
Fig. 25.



7. Verwandlung mehr als 4seitiger Polygone.

Zieht man durch eine Ecke 1 (Fig. 26 s. S. 28) eine Parallele $1\,2_1$ zur Diagonalen $O\,2$, welche die beiden nächsten Endpunkte verbindet, bis zu ihrem Durchschnitt 2_1 mit der zweiten Seite 2 3, so wird das Dreieck $O\,1\,2$ dem Dreieck $O\,2_1\,2$ ($2_1\,O$ ist nicht ausgezogen) mithin auch das Polygon $O\,2_1\,3\,4\ldots$ dem geg. Polygon $O\,1\,2\,3\,4$ gleich sein. Der Eckpunkt 1 ist also eliminirt, und das neue

Fig. 26.



Polygon hat ein Eck weniger. Auf dieselbe Weise kann nun auch der neue Eckpunkt 2_1 dadurch eliminirt werden, dass man $2_1 3_1$ zu $O3$ parallel zieht. Auf diese Weise fortfahrend kann man ein Polygon von beliebig vielen Seiten in ein Viereck hier $O 3_1 4 5$ verwandeln und dieses dann nach Nr. 6 S. 26 auf die Basis $2b$ reduciren.

Bei dem oben beschriebenen Verfahren wurde der Eckpunkt O in der Art festgehalten, dass jede neue Seite eines jeden neuen Polygons durch diesen Punkt geht; es lässt sich aber auch statt eines Eckpunkts eine Seite festhalten.

Auf Taf. 2_2 ist diese Operation an einem Eisenbahnprofil vorgenommen worden. Es wurde

1 1, parallel zu 2 O
2 2, „ „ 3 1,
3 3, „ „ 4 2,
4 4, „ „ 5 3,
5 D „ „ A 4,

gezogen und so schliesslich die Linie AD bestimmt, welche gleiche Flächeninhalte rechts und links abschneidet. Die Richtigkeit dieser letztern Verwandlung bedarf keines weitern Nachweises und es genügt hier, den Gang anzudeuten. Würde auf dieselbe Weise der obere Theil des Profils auf die Linie BC verwandelt, so hat man nur mehr das Viereck $ABCD$ auf die Doppelbasis $2b$ zu reduciren, um f, das den Inhalt des ganzen Profils darstellt, zu erhalten.

Die hier angedeutete Art und Weise den Flächeninhalt zu bestimmen, ist wohl die zweckmässigste bei allen gegebenen Querprofilen der verschiedenartigsten Form. Mit etwas Uebung erlernt man die Verwandlungen ganz mechanisch auszuführen, indem man immer nur die Spitze des Zirkels oder des Bleistifts in 1, 2, 3, 4, etc. einsetzt und ohne Nummeriren und ohne Linienziehen die Operation ausführt. Liegt z. B. der Winkel bei 3 3, so wird mit dem Stift der Winkel an dem Punkt 3, festgehalten, während man den Winkel sammt dem Lineal an den er nachher gleiten soll um 3, drehend,

auf den zweiten Punkt 5 bringt, dann lässt man den Punkt 3, los und verschiebt am Lineal den Winkel nach dem nächsten Punkt 4 und der Punkt 4, ist bestimmt u. s. f.

Dieses Verfahren ist ganz mechanisch und man hat nicht im mindesten auf die Form der Begrenzung Rücksicht zu nehmen, und es ist einerlei, ob der Linienzug, den man verwandelt, sich nach rechts oder links wendet. Constructionen aber, die so ganz mechanisch, ohne irgend eine Beachtung der Lage der verschiedenen vorkommenden Linien ausgeführt werden können, haben immer auch eine ganz allgemeine Geltung, und wirklich verwandelt diese Methode, bei etwa vorkommenden Verschlingungen, mit Berücksichtigung des Zeichens, die Fläche. Wird z. B. genau wie oben beschrieben, bei Verwandlung des Taf. 2_3 aus Auf- und Abtrag bestehenden Profils verfahren, so gleicht sich ganz von selbst Auf- und Abtrag aus und das verwandelte Profil *A B C D* ist gleich der Differenz der zwei Flächen. Ob zwei Flächen gleichen oder entgegengesetzten Sinnes seien, erkennt man daran, ob der sie fortlaufend umfahrende Linienzug, den man verwandelt, die einzelnen Flächen in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne umfährt. So ist der Sinn 3 4 *A B C* 0, in welchem der Auftrag umfahren wird, der entgegengesetzte vom Sinn *C* 0 1 2 3 4, in welchem der Abtrag umfahren wird, wie es durch die Pfeile im Innern einer jeden Fig. angedeutet ist. Der Sinn, in welchem die Schlussfigur *A B C D* umfahren wird, bezeichnet die Flächen, deren Summe die grössere ist. Wären z. B. mehr Ab- als Auftragsflächen vorhanden gewesen und in Folge dessen die Linie *A D* nach *A D*, gefallen, so würde in der That *A B C D*, *A* und C 0 1 2 3 4 gleichen Sinnes sein.

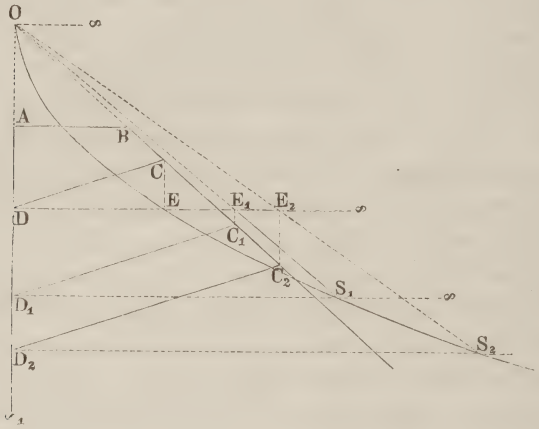
8. Flächentafel für Auf- und Abtragsprofile.

Die Querprofile der Strassen und Eisenbahndämme sind meistens Vierecke, welche auf drei Seiten von geraden Linien gleicher Richtung und Lage und auf der 4. von der Terrainlinie begrenzt sind, deren Lage und Richtung sich ändert.

Da die Flächen dieser Profile ausserordentlich häufig zu berechnen sind, so hat man sie für verschiedene Lagen und Richtungen der Terrainlinie im Voraus berechnet, tabellarisch geordnet, und auch graphisch in der Art aufgetragen, dass man den Flächen-

inhalt der Profile unmittelbar auf der Horizontalen abgreifen kann, welche durch den Terrainpunkt geht. Wir wollen hier zeigen, wie eine solche graphische Tafel statt gerechnet construirt werden kann. Wie gewöhnlich verwandeln wir nur das halbe Profil

Fig. 27.



A B C D (Fig. 27) und betrachten dasselbe als Differenz der Dreiecke *O C D* und *O A B*. Diess hat den Vortheil, die graphische Tafel für alle Profile gleicher Böschung benutzen zu können, indem man mittelst einer einzigen Parallelen zu $O D_2$ den für jede Profilgattung constanten Inhalt *O A B* über der obern Begrenzung *A B* abziehen kann. Unsere Aufgabe besteht nun vorerst nur darin, alle Dreiecke *O C D*, $O C_1 D_1$..... auf eine gemeinschaftliche Doppelbasis *O D* so zu reduciren, dass die Spitzen der reducirten Dreiecke auf die Horizontalen durch $D D_1 D_2$ fallen.

Man projicire den Fuss aller Böschungen $C C_1 C_2$ durch verticale nach $E E_1 E_2$ auf die Horizontallinie, die durch *D* den Fuss der Doppelbasis geht, so werden die gegebenen Dreiecke *OCD*, $O C_1 D_1$ $O C_2 D_2$ ..... den Dreiecken *OED*, $O E_1 D_1$, $O E_2 D_2$ etc. gleich sein, und diese den Dreiecken *O E D*, $O S_1 D$, $O S_2 D$ (weder die Linien $D_1 E_1$, $D_2 E_2$ noch $D_1 S_1$, $D_2 S_2$ wurden ausgezogen) etc., wenn die Punkte $E E_1 E_2$ auf die Horizontalen *D E*, $D S_1$, $D S_2$ von *O* aus projicirt werden. Diese letztern Linien stellen also den Flächeninhalt der aufeinanderfolgenden Dreiecke dar; um ihn zu erhalten hat man sie nur mit $^1/_2$ *O D* als Basis zu multipliciren.

Verbindet man alle S durch eine Curve, deren Natur wir sogleich ermitteln werden, so ist durch diese der Flächeninhalt aller Profile gleicher Böschung und gleicher Neigung des Geländes gegeben.

Die Punkte $E S_1 S_2 \ldots$ können als Schnitte des Strahlenbüschels O $(D\ E\ E_1\ E_2\ ..\ \infty)$ und des Parallelstrahlenbüschels ∞ $(O\ D\ D_1\ D_2\ ....\ \infty_1)$ betrachtet werden. Beide Strahlenbüschel sind demselben geraden Gebilde $O\ C\ C_1\ C_2\ \ldots\ \infty_2$ projectivisch, mithin ist der Ort aller S eine Curve 2. Ordnung.

Da dem gemeinschaftlichen Strahl $O\infty$ als Strahl des Büschels O betrachtet, die unendlich ferne Gerade $\infty\ \infty_1$ des Parallelstrahlenbüschels ∞ entspricht, so berührt die Curve diese im Punkt ∞; sie ist also eine Parabel, und $O\infty$ ein Durchmesser.

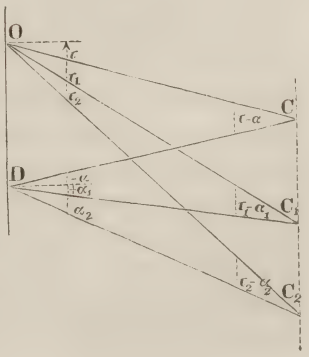
Dem gemeinschaftlichen Strahl ∞O als Strahl des Parallelenstrahlenbüschels betrachtet, entspricht der Strahl $O\ D$ des Büschels O: $O\ D$ ist also eine Tangente, welche die Curve im Punkt O berührt.

Da die Tangente $O\ D$ senkrecht auf dem ihrer Richtung conjugirten Durchmesser $O\infty$ steht, so ist dieser letztere die Axe der Parabel.

Diese Parabel ist demnach vollständig bestimmt, und kann für jede gegebene Böschung und Geländeneigung leicht construirt werden.

Aendert man die Böschung oder ändert man die Neigung des Geländes, so erhält man eine andere Parabel. Construirt man nun für verschiedene stetig aufeinanderfolgende Neigungen des Geländes die dazu gehörigen Parabeln, so kann man durch Interpollation für alle Neigungen des Geländes den Flächeninhalt des Profils auf der Horizontalen abgreifen, die durch den Fuss seiner Mittellinie geht.

Fig. 28.



Wenn sich die Böschung ändert, so ändern sich ebenfalls die Parabeln, allein da die Aenderung des Flächeninhaltes in Folge der Böschungsänderung genau derselben Art als die in Folge der Aenderung der Neigung des Geländes ist, so dass die Inhalte aller Profile OCD, OC_1D, und OC_2D (Fig. 28)

bei denen die Differenzen $\tau - \alpha$ der Neigungstangenten und der Böschungstangenten des Geländes gleich gross sind, ebenfalls gleich gross sind, so thut man am besten, zum Index der Parabeln nicht etwa die Neigungen des Geländes oder der Böschungen, sondern diese Tangentendifferenz $\tau - \alpha$ selbst zu nehmen. Auf diese Weise erhält man eine und dieselbe graphische Parabeltafel, welche für alle Neigungen der Böschungen, des Geländes, und für alle Profilhöhen dienen kann.

Da die Tangentendifferenz $\tau - \alpha$ als Index der Flächentafel dienen soll, so ist es am zweckmässigsten diese Differenzen in arithmetischer Reihe aufeinander folgen zu lassen. Dies ist nicht allein bequem um ohne graphisches Auftragen der Geländeneigung den Inhalt aus der Tafel direct abzulesen, sondern es erleichtert noch ungemein die Construction der Tafel selbst, indem dann alle Strahlen des Büschels O (Fig. 27 S. 30) durch die verschiedenen Parabeln in gleiche Theile getheilt werden. Es sei OC (Taf. 2_4) irgend ein Strahl, welcher die Horizontale DC des Fusspunktes D der Doppelbasis OD im Punkt C schneidet, und den Winkel $arctg\ \tau$ mit der Horizontalen bildet, dann wird dieser Punkt ein Punkt der Parabel τ sein, denn die Höhe OD des Dreiecks OCD ist bereits gleich der Doppelbasis, mithin bedarf es keiner Reduction mehr, und sein Inhalt wird durch CD dargestellt. Wir ändern nun die Tagentendifferenz τ um δ, indem wir $tg\ D_1 C D = \delta$ machen; es ist dann der Inhalt des Dreiecks $O C D_1$ auf der Parabel $\tau - \delta$ abzulesen, und wir erhalten einen Punkt derselben, indem wir es durch Ziehen der Parallelen $D_1 C_1$ in das Dreieck $O C_1 D$ verwandeln, dessen Höhe gleich der Doppelbasis $O D$ ist, so dass $D_1 C_1$ das Maass des Dreiecks $O C D_1$ ist. Da nun von Constructionswegen C_1 auf dem Strahl OC und auf der Horizontalen des Terrainpunktes D_1 liegt, so ist C_1 ein Punkt der Parabel $\tau - \delta$ auf den Strahl $O C . O D_1 D$ und $O C_1 C$ sind also ähnliche Gebilde, und wenn die Unterschiede $D D_1$, $D_1 D_2$ etc. der Tangentendifferenzen gleich gross sind, so werden es auch die Segmente CC_1, $C_1 C_2$ etc. sein, welche die Parabeln auf dem Strahl OC abschneiden. Um die Punkte zu erhalten, in welchen andere Strahlen $O B$, $O E$, von denselben Parabeln geschnitten werden, hat man die Schnitte H, K dieser Strahlen mit der Horizontalen, welche durch den Schnitt C der treffenden Parabel mit dem Strahl OC geht, parallel zur gemeinschaftlichen Tangente OD auf diesen nach G und I,

und diese Punkte horizontal (parallel zum gemeinschaftlichen Durchmesser) auf die Strahlen $O(HK)$ zu projiciren, um die gesuchten Parabelpunkte B, E zu erhalten. Der Beweis lässt sich ganz wie oben daraus ableiten, dass die Strahlenbüschel $\infty\,(O\,G\,C\,I\,\infty_2)$ und $O\,(D\,H\,C\,K\,\infty)$ dem geraden Gebilde $OG\,C\,I\infty_2$ projectivisch sind.

Aus diesen Constructionen könnte auch noch direct gefolgert werden, dass alle Strahlen von O durch die Parabeln in ähnlichen Gebilden $OB_2\,B_1\,B\,..$, $OC_2\,C_1\,C$, $OE_2\,E_1\,E$ geschnitten werden, wenn es nicht unmittelbar schon daraus hervorginge, dass O ein Aehnlichkeitscentrum der ähnlich gelegenen Parabeln ist. Aus letzterem folgt aber noch, dass alle Strahlen des Büschels O von den Parabeln unter gleichen Winkeln geschnitten werden. Diese sind demnach auch gleich dicht auf einem Strahl, wenn sie ihn in gleiche Segmente theilen. Will man daher die Unterschiede der Tangentendifferenzen auf den Strahlen von der Verticalen ausgehend gegen die Horizontale hin abnehmen lassen, so hat diese Abnahme auf die ganze Länge des Strahles hin in gleicher Weise zu geschehen. Längs eines ganzen Strahles hin hat der Unterschied der Tangentendifferenzen von 0,01, z. B. auf 0,02, dann auf 0,05, und 0,10 zuzunehmen.

9. Construction und Benutzung der Flächentafel.

Mittelst der eben entwickelten Grundsätze ist es nun gar leicht die Parabeltafel zu construiren. Wir nehmen auf dem Millimeterblatt Taf. 3, das 24 Centimeter lang und 18 breit ist, den obern Rand als Abscissen- und als Axe der Parabeln, den linken verticalen Rand als Ordinaten-Axe und als gemeinschaftliche Tangente aller Parabeln an, und werden den Schnitt dieser beiden Linien, den Ursprung der Coordinaten mit O, alle Punkte mit (xy) bezeichnen. Als Ausgangsstrahl OC (vergl. auch Taf. 2_4) nehmen wir den an der 45° mit der Axe bildet, und denken uns vorerst durch alle Punkte, in welchen er das Netz schneidet, also durch die Ecken aller Quadrate, deren Diagonale er bildet, oder durch die Punkte (1,1) (2,2) (3,3) ... eine Parabel geführt. Die Ordinatendifferenz dieser Punkte beträgt 1; um nun den Strahl OH zu erhalten, auf dem die Ordinatendifferenz $\triangle y = \frac{n}{10}$ ist, haben wir auf der vor-

liegenden Flächentafel $DH = 18 . \frac{n}{10}$ zu machen, denn weil die Abscisse von H gleich der von G ist, diese aber wegen des Winkels von 45° den OC mit den Axen bildet, gleich ihrer Ordinate ist, diese endlich die Differenz $\frac{n}{10}$ 18 mal enthalten soll, so ist $DH = 18 . \frac{n}{10}$ oder allgemein $= y . \frac{n}{10}$. Wenn der Punkt H über den Rahmen des Papiers hinausfällt, so hat man dieselbe Operation auf einer Ordinate so vorzunehmen, dass der bestimmte Endpunkt des Strahls noch auf das Papier fällt.

Nähert sich der Strahl OE der Horizontalen, so schneidet er die Parallelen zur Abcissen-Axe unter einem sehr spitzen Winkel, und die Lage der Curvenpunkte $E\ E_1\ E_2$ (Taf. 2_4) wird ungenau. Um diess zu vermeiden, hat man die Operation nur auf einer Horizontalen vorzunehmen, deren Ordinate OD ein Vielfaches der gewählten Differenz $\frac{n}{10}$ ist. Dann ist der durch den Schnitt zweier senkrechten Netzlinien bestimmte Punkt K selbst ein Schnittpunkt einer Parabel, und man erhält die zweifelhaften Schnittpunkte auf OE ganz genau durch Theilen der Länge OK in die entsprechenden Zahl-Theile. Es sei z. B. der Strahl zu bestimmen, auf dem die Differenz 4 mal so gross als auf OC ist. Dann führe man die Operation auf der Horizontalen aus, deren Ordinate = 4 Ctm. ist und der Strahl geht durch den Punkt K (Taf. 3) dieser Linie, dessen Abscisse = 4 . 4 = 16 Ctm. ist. Durch Theilen dieser Linie in gleiche Theile erhält man ganz genaue Curvenpunkte.

Um übrigens auch einzelne Punkte dieser Parabeln einzeln berechnen zu können, wollen wir hier nur noch bemerken, dass unter der Voraussetzung, dass OC den rechten Winkel O halbire, die Proportion

$$\frac{FB}{FG} = \frac{DH}{DC} \qquad \frac{x}{y} = \frac{y}{a}$$

oder $y^2 = a\,x$ giebt, wenn man die Coordinaten des Punktes C, in welchem die Parabel den Strahl 45° schneidet, mit a bezeichnet. Es ist diess, wie man sieht, die allgemeine Parabelgleichung.

Da nun die Parabel durch den Scheitel ihrer Axe und irgend einen ihrer Punkte vollkommen bestimmt ist, so gelangt man zu den auf Taf. 3 verzeichneten Parabeln, welches auch die Basis sein mag, auf die man die Flächeninhalte zu reduciren beabsichtigt,

und diese Tafel kann zur Reduction auf alle möglichen Basen dienen, denen sie einfach durch die Bezeichnung der Parabeln angepasst werden. Soll jede Parabel mit der Tangentendifferenz $\tau - \alpha$ (Fig. 28 S. 31) der Böschungs- und Gelände-Neigungen bezeichnet werden, so muss die Parabel den Index 1 erhalten, welche durch den Punkt $(2b, 2b)$ dessen Coordinaten gleich der Doppelbasis sind, geht. Taf. 3 wurde für eine Reductionsbasis von 5 Ctm. oder eine Doppelbasis von 10 Ctm. beziffert, und die Parabel, welche durch die Ecke des Dezimeters O geht, mit 1 bezeichnet. Denn es ist klar, dass jetzt das rechtwinkelige Dreieck, dessen Hypotenuse $O1$ (auf der Linie OC) ist, keiner weitern Reduction mehr bedarf, weil jede seiner Catheten schon der Doppelbasis gleich ist, und sein Flächeninhalt daher auch durch diese dargestellt wird. Der Index aller andern Parabeln ergiebt sich durch die proportionale Bezifferung aller Strahlen des Büschels O.

Zum Schluss erläutern wir den Gebrauch dieser Flächentafel durch ein Beispiel:

Es seien die Inhalte des Auf- und Abtrags für das Normalprofil Taf. 2_5 zu bestimmen.

Wir verwandeln das Dreieck über dem Auftragsprofil in das Dreieck AOA_1 und das unter dem Abtragsprofil in das Dreieck BB_1O_1, die Höhe dieser Dreiecke ist gleich der Basis b, die Hälften ihrer Basen f und f_1 stellen daher ihren Flächeninhalt dar (6,75 und 12,4 Quadratcent).

Der Ursprung der Coordinaten für die Verwandlung des Auftrags ist daher auf Taf. 3 der Punkt M, dessen Abscisse gleich f, und dessen Ordinate gleich OL (Taf. 2_5) ist; und für die Verwandlung des Abtrags ist es der Punkt N, dessen Abscisse gleich f und dessen Ordinate gleich O_1L ist.

Soll nun z. B. für eine Auftragshöhe LP und eine Neigung des Geländes 0,53 des Profils (Taf. 2_5) der Inhalt bestimmt werden, so findet sich derselbe als Abscisse PQ (Taf. 3) des Punktes der Parabel $0{,}67 - (-0{,}53) = 1{,}2$, dessen Ordinate MP gleich der Höhe LP (Taf. 2_5) ist. Er muss natürlich mit dem zur Probe construirten Inhalt $f_{''}$ übereinstimmen. Der wirkliche Inhalt ist gleich $PQ.b = 3{,}66 \,.\, 5 = 18{,}3$ Quadratcent.

Die Parabel kann auch auf graphischem Wege bestimmt werden. Der Strahl OC_1 der mit der Horizontalen einen Winkel bildet, dessen Tangente $= \tau - \alpha$ ist, schneidet jederzeit die Hori-

zontale $D_1 C_1$, deren Ordinate $= 2b = 10$ Ctm. ist, in den zugehörigen Parabeln; denn das Dreieck $D_1 O C_1$ bedarf dann keiner Verwandlung mehr. Man trage also ein für allemal die am Rand $2b = OR$ gemessene Neigungstangente der constanten Böschung RT (hier bei $1^1/_2$maliger Böschung $\frac{10}{1{,}5} = 6{,}7$ Ctm.) auf und ziehe davon die ebenfalls am Rand $OR = 2b$ gemessene Tangente der Neigung des Geländes TU (hier $-10 \cdot 0{,}53 = -5{,}3$) ab, so wird $RU = 2b\,(\tau - \alpha)$ sein; und U wird ein Punkt des Strahles OC_1 sein, der in C_1 die treffende Parabel angiebt.

Auch ohne Auftragen von MP kann der Flächeninhalt auf rein rechnerischem Wege ermittelt werden:

Zur Auftragshöhe $LP = 5{,}1$ Ctm. Taf. 2_3 addire man die constante Ergänzungshöhe $OL = 2{,}65$, dann findet man (Taf. 3) die zur Ordinate $7{,}75$ gehörige Abscisse des Punktes Q der Parabel $1{,}2$, deren Index nun eben rechnerisch ermittelt wurde gleich 5 Ctm., einem Flächeninhalt von $5 \cdot 5 = 25$ Quadratctm. entsprechend. Hievon geht der ein für allemal bestimmte Inhalt $6{,}75$ des Ergänzungsdreiecks ab, und es bleiben $18{,}25$ Quadratctm. als Inhalt des Profils. Alles was hier vom Auftrag gesagt wurde, gilt wörtlich auch von Abtragsprofilen. Kaum brauchen wir noch zu erinnern, dass die jetzt erläuterte parabolische Flächentafel zur gegenseitigen Bestimmung je zweier Werthe dienen kann, die durch die Relation $\gamma^2 = n \cdot 2b\,x$, wo n den Index der Parabel bezeichnet, gegeben sind. Die Parabel 0,1 z. B. geht durch alle Punkte, deren Ordinaten gleich den Wurzeln der Abscissen sind, also durch die Punkte (1,1) (4,2) (9,3) (16,4) etc.

10. Verwandlung von Kreisflächen.

Bei Verwandlung einer von einem Kreisbogen begrenzten Fläche muss man stets von der Eigenschaft des Kreises Gebrauch machen, dass der Flächeninhalt eines Kreissectors gleich dem Flächeninhalt eines Dreiecks ist, das den Mittelpunkt zur Spitze und ein dem Kreisbogen gleich langes Stück der Tangente zur Basis hat.

Das einzige praktische Verfahren einen Bogen auf einer Tangente zu strecken, besteht darin, eine beliebige Sehne auf dem Bogen und auf der Tangente gleich oft umzuschlagen, und die Reste

am Ende zu addiren. Da frägt es sich nun, wie gross darf der Bogen a genommen werden, wenn beim Messen des Bogens l durch Umschlagen der Sehne von a der Fehler nicht grösser als d sein soll.

Die Differenz zwischen Bogen und Sehne ist, wenn wir $2r \sin. \frac{a}{2r}$ wo r den Radius des Bogens bezeichnet, durch eine Reihe ausdrücken und vom Bogen a abziehen

$$\frac{a^3}{4.6\ r^2} - \frac{a^5}{4.6.8.10\ r^4} + \ldots .$$

Der Fehler d wird nun gleich $\frac{l}{a}$ mal dieser Differenz sein, weil der Bogen a, $\frac{l}{a}$ mal in l umgeschlagen werden muss, wir haben also

$$d = \frac{l}{a} \cdot \frac{a^3}{24 r^2} = \frac{a^2\, l}{24\ r^2}$$

indem der Bogen a immer so klein angenommen werden muss, dass das zweite Glied der Differenz gegen das erste vernachlässigt werden kann. Hieraus folgt nun

$$a = r \sqrt{\frac{24\, d}{l}} \qquad 1$$

Für gewöhnliches Reissrechnen wird wohl $^1/_{100}$ oder der Abrundung wegen $^1/_{96}$ Centimeter eine genügende Genauigkeit sein, substituirt man diesen Werth für d, so erhält man

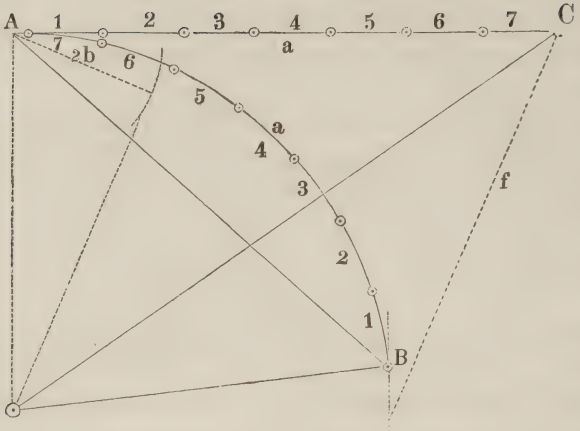
$$a = \frac{r}{2\sqrt{l}} \qquad 2$$

wo l in Centimetern ausgedrückt werden muss. Ist z. B. der zu messende Bogen 4 Centimeter lang, so muss $a = {}^1/_4\ r$, ist er dagegen 25 Centimeter lang, so muss $a = {}^1/_{10}\ r$ genommen werden.

Wir empfehlen a nie kleiner als diese Formeln es erheischen anzunehmen, weil man durch zu häufiges Umschlagen einer Sehne an Genauigkeit wieder einbüsst, was man durch die kleinere Sehnen- und Bogendifferenz zu gewinnen hoffte.

Bei dem Strecken eines Bogens AB (Fig. 29 s. S. 38) auf der Tangente, ist es zweckmässig bei dem dem Berührungspunkte A entgegengesetzten Ende B mit Umschlagen der Länge a, die hier etwa $^1/_5$ des Radius r angenommen wurde, zu beginnen und umzuschlagen, bis A in eine Strecke von a fällt, von dem dann A nächstliegenden

Fig. 29.



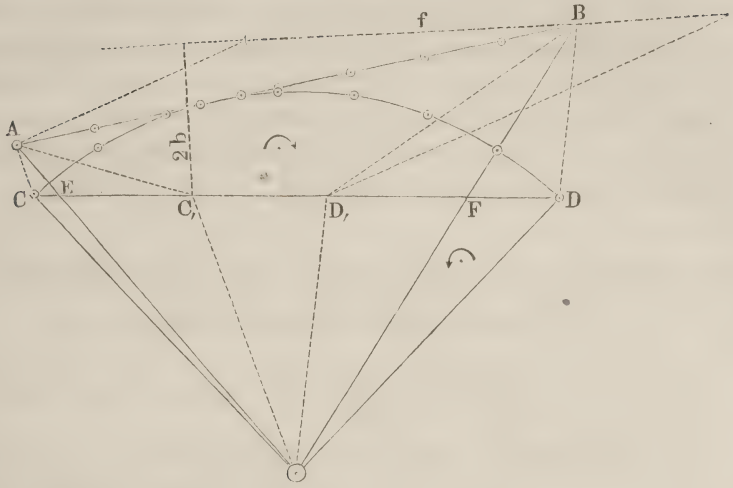
Endpunkt von *a* schlägt man dann dieses ebensoviele (hier 7) male auf der Tangente hinaus, als man es auf dem Bogen herumgeschlagen hatte. Aus leicht begreiflichen Gründen ist diess viel genauer, als das Strecken durch Eintheilen des Bogens in eine gewisse Zahl gleicher Theile bewirken zu wollen.

Der Inhalt des Sectors ist nun gleich dem des Dreiecks $A \bigcirc C$ das nach irgend einer der frühern Regeln auf jede beliebige Doppelbasis reducirt werden kann.

Der Inhalt des Segmentes AB ist gleich der Flächendifferenz $\bigcirc AC - \bigcirc AB$ oder gleich dem des verschlungenen Vierecks $AC \bigcirc B$ dessen Inhalt nach Nr. 6 S. 27 durch $^1/_2 \,.\, 2b \,.\, f$ dargestellt werden kann.

Es ist nicht gerade nothwendig, dass die Tangente durch den Anfangspunkt des Bogens gehe, sondern sie kann an jedem beliebigen Punkt, wie in Figur 30, den Bogen berühren, es wird dann wie es in der Figur angedeutet ist, CT nach AT und DT nach BT gestreckt (T Berührungspunkt der Tangente). Der Inhalt des Sectors ist dann gleich $\bigcirc AB$ und der des Segments gleich $A \bigcirc B - \bigcirc CD$ oder gleich dem Inhalt der Figur $\bigcirc AB \bigcirc DC \bigcirc$, in der das Viereck $ABFE$ in einem, die Dreiecke $\bigcirc EC$ und $\bigcirc DF$ im entgegengesetzten, das innere Dreieck $\bigcirc EF$ aber gar nicht mehr, umfahren erscheint. Die Verwandlung in ein Viereck ABD, C, wird wohl am leichtesten dadurch bewirkt werden, dass man durch Ziehen von $\bigcirc C$, parallel zu CA und $\bigcirc D$, parallel zu DB, die negativen Dreiecke $A \bigcirc C$ und $BD \bigcirc$ nach AC, C und

Fig. 30.



B D D, bringt. Der Inhalt dieses Vierecks *A B D, C*, oder der des Segments wird dann durch $\frac{1}{2}\ 2b\ .\ f$ gemessen.

11. Verwandlung eines Gewölbbogens.

Es ist der Flächeninhalt des Gewölbbogens (Taf. 2_6) auf die Doppelbasis $2b$ zu reduciren.

Durch Streckung der beiden das Gewölbe begrenzenden Bogen auf die Anfangstangente *A B* und 2 3, erhält man den Inhalt des äussern Sectors = *O A B* und des Innern 1 3 2. Der Inhalt des Gewölbes ist nun gleich dem Inhalt des äussern Sectors *O A B* weniger dem Inhalt der beiden Dreiecke *O A* 1 *C* und 3 2 1, also weniger der Figur *O A* 3 2 1 *C O*. Wenn man sie abzieht, so erhält man die Figur *A B O C* 1 2 3 *A*, in welcher die vom Dreieck *O A B* übrig gebliebenen Flächen schraffirt, und in gleichem Sinn umfahren sind. Die über dieses Dreieck hinausfallenden Theile der abzuziehenden Flächen sind punktirt, und im entgegengesetzten Sinne umfahren. Am einfachsten verwandelt man diese Figur in ein Viereck, indem man, nach Nr. 7 S. 28 den Zug *C* 1 2 3 *A* analog Taf. 2_2 in die Linie *C, A* verwandelt; man erhält dann das verschlungene Viereck *A B O C*,, dessen Inhalt durch das halbe Product der Linien $2b$ und f dargestellt wird.

Die Figur sieht etwas einfacher aus, ist es aber nicht viel,

wenn man nur die eine Hälfte des Gewölbbogens vornimmt und verwandelt. Ganz auf dieselbe Weise wie oben verfahrend, erhält man als Flächeninhalt des halben Gewölbes (Taf. 2_7) die Figur $ABCO321A$, die eben so viele Seiten als Taf. 2_6 hat. Verwandelt man dann den Zug $A1230$, ähnlich Fig. 26 S. 28, in die Linie AC_1, so erhält man als Flächeninhalt des halben Gewölbes das durch die Linien $2b$ und f dargestellte Viereck $ABCC_1$.

12. Verwandlung von Flächen, die von beliebigen krummen Linien begrenzt sind.

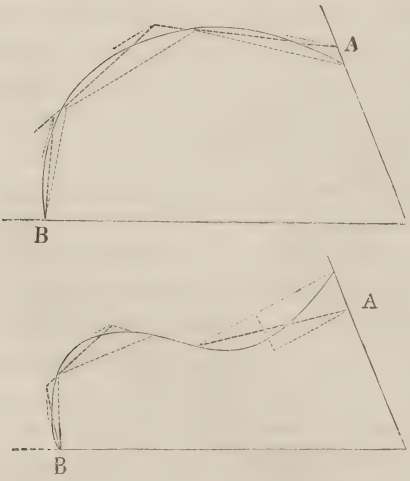
Bei diesen Verwandlungen betrachtet man kürzere Strecken des krummen Umfanges als Parabelbogen.

Der Flächeninhalt eines Parabel-Segments (Fig. 31) ist gleich der Sehne, multiplicirt mit $\frac{2}{3}$ des Pfeils, also gleich dem Inhalt eines Dreiecks, das die Sehne zur Basis und $\frac{4}{3}h$, wo h die Länge des Pfeiles orthogonal gemessen bezeichnet, zur Höhe hat.

Fig. 31.

Sind viele derartige Verwandlungen vorzunehmen, so wird die Multiplication von h mit $\frac{4}{3}$ am leichtesten mittelst eines festen Proportionalzirkels vorgenommen.

Fig. 32.



Man theile nur eine krumme Linie (Fig. 32) in so viele kleine Theile, dass jeder einzelne Bogentheil als Parabelbogen betrachtet werden kann, und verwandle die Parabelsegmente über den, zwei aufeinanderfolgende Punkte verbindenden Sehnen so in Dreiecke, dass die Spitze eines jeden neuen Dreiecks auf der Verwandlungslinie des vorausgegangenen Segmentes liegt. So

erhält man statt des Bogens ein Polygon, das gerade so viele Seiten hat als Segmente angenommen wurden, und das denselben Flächeninhalt als der Bogen einschliesst. Das Verfahren wird durch einen Blick auf Fig. 32 klar werden, wo von A gegen B hin verwandelt wurde. Das Polygon kann dann nach den vorausgegangenen Regeln reducirt werden.

Ueber die Grösse, die man den Segmenten geben darf, um sie noch als Parabelsegmente betrachten zu dürfen, kann natürlich nichts gesagt werden, so lange die Natur der Curve unbekannt ist, die verwandelt werden soll. Wir beschränken uns daher hier darauf zu untersuchen, wie gross der Fehler wäre, den man beginge, wenn man auf diese Weise den Inhalt eines Kreissegments bestimmte.

Der Inhalt eines Kreissegments ausgedrückt durch den Pfeil h und die Sehne c ist:

$$F = 2ch\left(\tfrac{1}{3} + \frac{1}{1.3.5}\left(\frac{2h}{c}\right)^2 - \frac{1}{3.5.7}\left(\frac{2h}{c}\right)^4 + \frac{1}{5.7.9}\left(\frac{2h}{c}\right)^6 - \cdots\right)$$

Nimmt man also diesen Inhalt als Parabelsegment $= \tfrac{2}{3}ch$ an, so wird ein Fehler begangen, der kleiner ist, als $\tfrac{2}{3}ch\ \tfrac{4}{5}\left(\frac{h}{c}\right)^2$ oder kleiner als $\left(\frac{h}{c}\right)^2$ mal den Flächeninhalt; ein Verhältniss, das sich leicht dem Gedächtniss einprägt. Ist also der Pfeil $\tfrac{1}{10}$ der Sehne, so ist der Fehler kleiner, als $\tfrac{1}{100}$ des Segmentinhalts.

Um übrigens noch etwas Bestimmtes vor Augen zu führen wollen wir uns denken, es werde alles auf eine Basis von 1 Centimeter oder Doppelbasis von 2 Centimetern reducirt, und es sei $\tfrac{1}{100}$ Centimeter die Genauigkeit, mit der die Höhen abgegriffen werden können, so wird ein Quadratmillimeter die erzielte Genauigkeit sein. Setzt man also

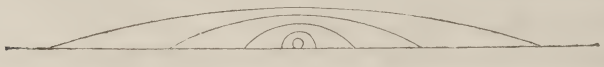
$$1 = \tfrac{2}{3}\ ch\ .\ \tfrac{4}{5}\left(\frac{h}{c}\right)^2$$

so erhält man, wenn nach einander gesetzt wird

$h =$	1,	2,	3,	4,	5,	Millim.
$c = \frac{8}{15}h^3$	0,54	4,3	14,4	34,1	66,7	Millim.
$\frac{c}{h} = \frac{8}{15}h^2$	0,54	2,1	4,8	8,5	13,3	
$r = \frac{32}{900}h^5 + \tfrac{1}{2}h =$	0,54	2,1	10,1	38,4	113,6	Millim.
Centriwinkel	150°, 8′	86°, 26′	45°, 14′	26°, 23′	11°, 25′	

Trägt man diese Segmente auf, so erhält man die Figur 33, wo bei allen Segmenten 1 Quadratmillim. gefehlt wird, wenn man den Flächeninhalt durch Multiplication der Basis mit $^2/_3$ der Höhe

Fig. 33.



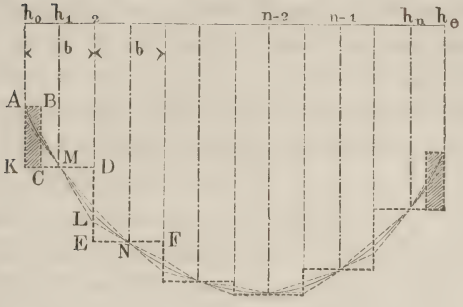
bestimmt. Bei gewöhnlichen graphischen Constructionen wird man wohl die 3 letzten Segmentformen nachahmen dürfen. Diese dem Gedächtniss sich einprägend, bildet man bei Eintheilung eines Bogens in Stücke, ähnliche Segmente nach dem Gefühl.

13. Bestimmung des Inhalts einer von beliebigen Curven begrenzten Fläche durch Addition der Ordinaten.

Eine sehr einfache und häufig in der Praxis, z. B. bei Messung von Flussprofilen, Anwendung findende Methode besteht darin, dass man die in gleichen Entfernungen gemessenen Ordinaten summirt, und die Summe mit ihrer constanten Entfernung b multiplicirt; wobei man natürlich die Ordinate in der Mitte einer Strecke b zu messen oder gemessen sich zu denken hat. Da diese Methode äusserst einfach ist, und da auch wir sie häufig anwenden werden, so wollen wir untersuchen, wie gross der Fehler ist, den man so verfahrend begeht.

Der also bestimmte Flächeninhalt ist gleich dem Inhalt des mittelst Tangenten an den Endpunkten der Ordinaten $h_1\, h_2 \ldots h_{n-1}\, h_n$ (Fig. 34 wo der Index 2 auf der Mitte von b stehen sollte) der Curve umschriebenen Polygons, wobei vorausgesetzt wird, dass zwei aufeinanderfolgende Tangenten sich auf der Ordinate ihrer Mitte schneiden, was auch annähernd der Fall ist. Wegen der Gleichheit der über diesen Tangenten AL, und der über den Linien KD, welche zur Abscissenaxe parallel laufen, liegenden Flächen, kann man die Fläche, zu der man gelangt, durch die staffelförmig gebrochene Linie $KDEF$ etc. sich begrenzt denken. Der Inhalt dieser Fläche ist grösser als der, den die Curve einschliesst. Kleiner als dieser Inhalt ist der durch die Sehnen AMN

Fig. 34.



eingeschlossene. Dieser Inhalt ist aber gleich der von der staffelförmig gebrochenen Linie *ABCDEF* eingeschlossenen Fläche. Die Differenz zwischen dem Inhalt des eingeschriebenen Sehnen- und dem umschriebenen Tangenten-Polygons, summirt sich also in den am Anfange und am Ende des Profils schraffirten Rechtecken und ihr Inhalt ist $= {}^1/_4 b\,(h_1 - h_o + h_n - h_e)$.

Hat man die Ordinaten so nahe aufeinanderfolgend gemessen, dass die zwischenliegenden Bogenstücke als Parabelbogen betrachtet werden können, so wird die Curve alle Dreiecke zwischen den Sehnen und Tangenten so theilen, dass die Fläche zwischen Sehne und Curve doppelt so gross als die zwischen Curve und Tangente ist. Die umschriebene Tangentenfläche ist also um ${}^1/_3$ des Inhalts der beiden Rechtecke zu gross. Man hat also den Inhalt des Profils

$$F = b\left(\Sigma h \; - \; {}^1/_{12}\,(h_1 - h_o + h_n - h_e)\right)$$

Wohl in den meisten Fällen wird man den hier bestimmten Fehler ganz vernachlässigen können, wird er aber berücksichtigt, so ist diese Poncelet'sche Quadratur genauer als die alte Simpson'sche, wie Parmentier in den Nouvelles annales de mathématiques Oct. 1855 nachgewiesen hat.

14. Theorie des Planimeters.

Wird eine Rolle in der Art auf der Mitte eines Stabes befestigt, dass sie sich nur in einer senkrecht auf dem Stab stehenden Ebene drehen kann, so werden die Umdrehungen der Rolle bei einem Fort-

gleiten des Stabes auf einer Ebene den Weg messen, den die Mitte des Stabes, senkrecht zu seiner Richtung zurückgelegt hat. Dieser Weg multiplicirt mit der Länge b des Stabes giebt jederzeit den Inhalt der vom Stab bestrichenen Fläche. Es ist klar für den Fall, wenn der Stab sich selbst parallel bleibt und eine Figur wie Fig. 35 beschreibt. Die Umdrehungen der Rolle messen in diesem Fall die senkrechte Entfernung l zwischen den Endlagen des Stabes, welche mit der Länge b des Stabes multiplicirt, den Flächeninhalt der Figur giebt. Dasselbe gilt aber auch noch, wenn der Stab sich nicht parallel bleibt. Es stelle dann Fig. 36 zwei unendlich nahe aufeinanderfolgende Lagen des Stabes dar, so dass wir also den Weg der Rolle $\triangle l$ und die Richtungsänderung $\triangle \psi$ des Stabes als unendlich kleine Grössen betrachten können. In diesem Fall wird der Einfluss dieser Richtungsänderung auf den Weg der Rolle als eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung vernachlässigt, und der Weg der Rolle wird die senkrechte Entfernung jeder Rollenlage von der andern Lage des Stabes messen, dieser Weg $\triangle l$ multiplicirt mit der Basis, also $b \triangle l$, ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $A C C_1 A_1$. Dieses Parallelogramm weicht um die Summe der beiden Dreiecke $A B C$ und $A_1 C_1 B_1$ von dem Inhalt des vom Stab bestrichenen Vierecks $A B B_1 A_1$ ab, weil die beiden Sectoren zwischen dem Stab und der Parallelogrammseite einander gleich sind. Nun sind aber alle Dimensionen dieser Dreiecke ∞ kleine Grössen, und ihre Flächen müssen als Product zweier ∞ kleinen Grössen, gegen den Inhalt des Parallelogramms als dem Product einer endlichen Grösse b mit nur einer ∞ kleinen $\triangle l$ vernachlässigt werden, wenn man zu den Grenzwerthen übergeht. Bei einem ∞ kleinen Fortschreiten wird also der Inhalt des ∞ kleinen Vierecks $A B B_1 A_1$ durch $b . dl$ gemessen. Bei dem Bestreichen einer grösseren Fläche summiren sich sämmtliche Vierecke zum

Fig. 35.

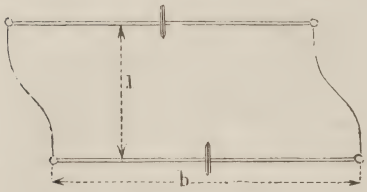
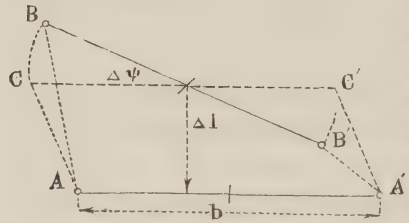


Fig. 36.



Flächeninhalt der Figur und dl zur Umdrehungslänge der Rolle, und man erhält

$$F = b\,l$$

Sitzt die Rolle nicht auf der Mitte des Stabes, sondern in einer Entfernung c auf der Seite (s. Fig. 37), wo die Umdrehung $\triangle\psi$ des Stabes im positiven Sinne eine Vergrösserung des Weges der Rolle bewirkt, so muss vom Weg $\triangle l$ der Rolle die Bogenlänge $c\triangle\psi$ abgezogen werden, um die Höhe des Parallelogramms zu erhalten. Bei dem Bestreichen einer grösseren Fläche summirt sich dieser Weg zu $c\psi$, d. h. zur Bogenlänge, die die Rolle in Folge der Richtungsänderung beschrieben hat. Man hat also schliesslich

$$F = b\,(l - c\,\psi)^*)$$

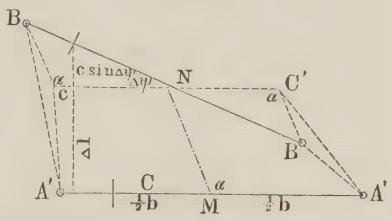
Sitzt die Rolle auf der entgegengesetzten Seite, so ist c negativ.

Die Rolle kann sich in verschiedenem Sinne drehen, und wenn Flächen rückläufig bestrichen werden, so wird sie sich auch rückwärts drehen. Der Stab kann auch öfters eine Fläche bestreichen, geschieht es jedesmal in demselben Sinne, so wird die Rolle sich auch jedesmal in demselben Sinne drehen, und $b(l - c\psi)$

---

*) Will man den Flächeninhalt des Vierecks $A\,B\,B,\,A,$ (Fig. 37) genau analytisch ausdrücken, so projicire man $B\,B,$ parallel zum Weg der Mitte MN, der den Winkel α mit dem Stab bildet, auf die durch die Mitte N zur ursprünglichen Stablage parallel gezogenen Linie, $C\,C,$. Dann wird der Inhalt des Vierecks gleich dem Inhalt des Trapezes $A\,C\,C,\,A,$ bei nebiger Bezeichnung gleich

Fig. 37.



$$\triangle F = (\triangle l - c\sin\triangle\psi).(CN + MA,)$$

sein. Nun ist aber

$$CN = NC, = {}^1/_2\,b.\,\frac{\sin(\alpha + \triangle\psi)}{\sin\alpha}$$

also

$$\triangle F = (\triangle l - c\sin\triangle\psi)\left({}^1/_2\,b.\,\frac{\sin(\alpha + \triangle\psi)}{\sin\alpha} + {}^1/_2 b\right)$$

und wenn man zu den Grenzwerthen übergeht

$$dF = b\,(dl - c\,d\psi) \text{ oder}$$

$$F = b\,(l - c\psi) \text{ wie oben.}$$

wird die öfters bestrichene Fläche so oft enthalten, als sie bestrichen wurde. Würde endlich die Fläche zweimal, aber in entgegengesetztem Sinn bestrichen, so würde ihr Einfluss auf den von der Rolle zurückgelegten Weg = 0 sein.

Wichtig ist es nun in jedem einzelnen Fall zu wissen, in welchem Sinne bei dem Bestreichen einer Fläche die Rolle sich drehe. Da der Stab selbst keine Spuren auf der Fläche zurücklässt, so muss der Sinn, in welchem der Umfang einer Figur von den Enden des Stabes beschrieben wurde, genügen, diesen Sinn zu bestimmen; und in der That gelten alle in der Geometrie über den Zusammenhang des Zeichens des Inhaltes einer Figur mit dem Sinn, in welchem sie umfahren wurde, aufgestellten Sätze, auch von den Enden des Stabes, wenn man dem einen Ende den entgegengesetzten Sinn des andern beilegt, d. h. wird die Richtung, in welcher das eine Ende des Stabes sich bewegt, durch einen Pfeil bezeichnet, so muss am andern Ende die Richtung, von der es herkam, durch den Pfeil bezeichnet werden.

Man kann nämlich ein Flächenelement $ABCD$ (Fig. 38) als

Fig. 38.

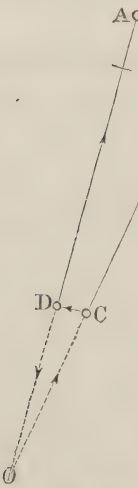
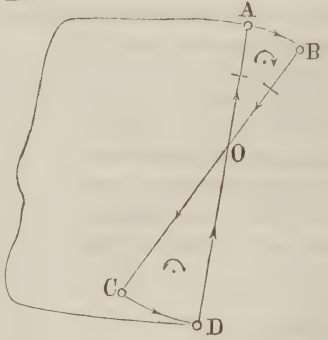


Fig. 39.



die Differenz der beiden Dreiecke OAB und ACD betrachten, die die Leitstrahlen des einen Stiftes OA, und des andern Stiftes OC, vom Durchschnittspunkt O der beiden auf einanderfolgenden Stablagen aus beschreiben. Soll das Zeichen der Fläche durch den Sinn angedeutet werden, in welchem AB und DC beschrieben

werden, so müssen die beiden Wege AB und DC entgegengesetzte Zeichen erhalten. Zu demselben Resultat gelangt man auch, wenn der Drehungspunkt O auf dem Stab selbst, wie in Fig. 39 liegt; die Totalfläche hat sich in dieser Figur um OAB vergrössert, um OCD verkleinert, ODC ist demnach wieder wie in Figur 38 negativ.

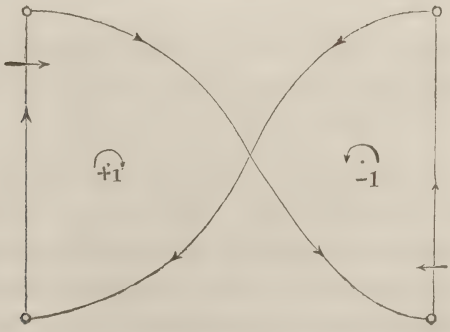
Setzt man also auf den Weg des einen Stiftes einen Pfeil in die Richtung des Fortschritts, auf den des andern in die Richtung des Rückschrittes, und denkt man sich diese Richtungen durch die Stäbe fortgesetzt, so werden die positiven Elemente $ABCD$ (Fig. 38) und OAB (Fig. 39), in einem Sinne, und die negativen Elemente, wie ODC (Fig. 39) im andern Sinn umfahren erscheinen. Berücksichtigt man nun, dass durch ein Anreihen eines Elementes an das andere obiges Verhältniss nicht geändert wird, so kann man sagen, dass wie die Elemente, so auch die Totalflächen in gleichem oder entgegengesetztem Sinn vom Stab bestrichen wurden, je nachdem sie von den auf ihren Umfang gesetzten Pfeilen in gleichem oder entgegengesetztem Sinn umfahren erscheinen.

Hiermit wäre die volle Uebereinstimmung, mit dem in der Geometrie bezüglich des Zeichnens der in verschiedenem Sinn umfahrenen Flächen Gesagten, dargethan.

Die folgenden Beispiele mögen die Anwendung des Obigen zeigen. Die beiden Hälften der Fig. 40 sind von den Pfeilen in entgegengesetztem Sinn umfahren, und auch in entgegengesetztem Sinn bestrichen, wie die Pfeile auf den Rollen es andeuten.

Ebenso klar ist es auch, dass in Fig. 41 die Flächen -1 und $+1$ in entgegengesetztem Sinn bestrichen wurden, und dass die

Fig. 40.



Flächen *o* es einmal in einem und einmal im entgegengesetzten Sinn wurden, so dass diese Flächen keinen Einfluss auf den Weg der Rolle ausüben können.

In Fig. 41 und 42 ist der Weg der Rolle der Differenz der mit $+1$ und -1 bezeichneten Flächen proportional.

Fig. 41.

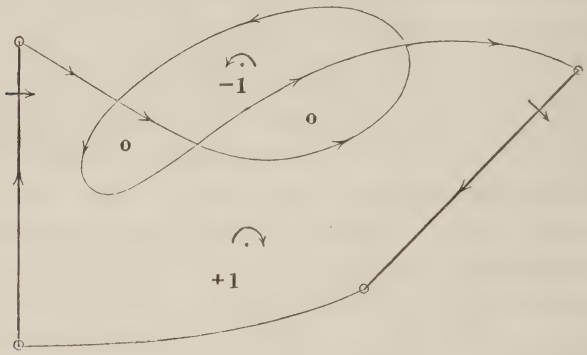
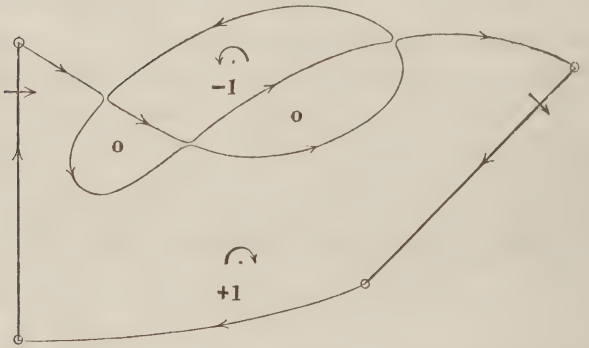


Fig. 42.



Da die Wege der beiden Stifte in Verbindung mit den äussersten Lagen des Stabes immer eine geschlossene Figur bilden, so kann man bei Verschlingungen jederzeit die ganze Figur in mehrere geschlossene unverschlungene Figuren zerlegt denken, wie Fig. 42, wo die Ecken dieser einzelnen Figuren, von Fig. 41, abgerundet wurden, zeigt. Wurde bei einer Verschlingung eine Fläche, wie in Fig. 43, mehrere mal bestrichen und rundet man dann die Ecken ebenfalls ab, wie in Fig. 44, so wird jede öfters bestrichene Fläche ganz in der einmal weniger bestrichenen liegen, und die im ent-

Fig. 43.

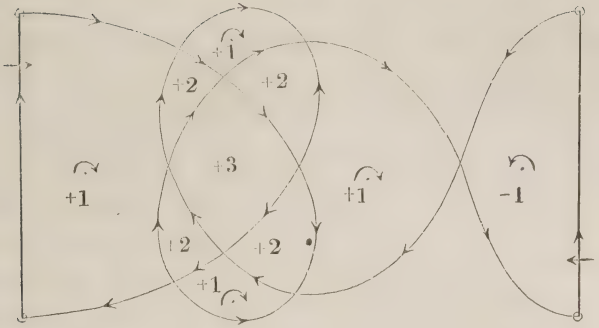
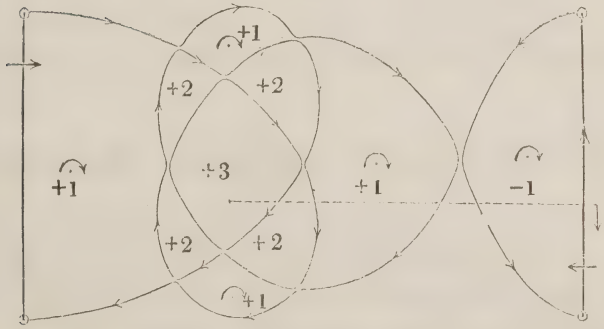


Fig. 44.



gegengesetzten Sinne bestrichenen werden ganz abgesonderte Gruppen bilden. Natürlich wird in einer solchen Figur der Weg der Rolle dem Flächeninhalt von $1 \cdot (+1) + 2 \cdot (+2) + 3 \cdot (+3) - 1 \cdot (-1)$ mal entsprechen, wo $\pm n$ nur zur Bezeichnung der Fläche dient.

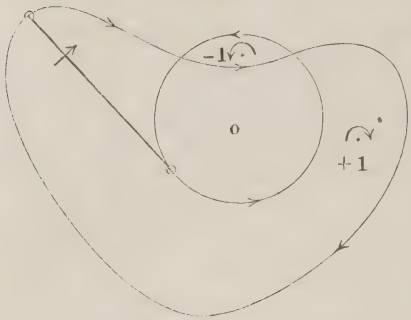
Aus Obigem geht auch hervor, dass man unmittelbar sehen kann, wie oft eine Fläche bestrichen wurde, wenn man auf einer von ihr nach aussen gezogenen Linie die durchschnittenen Umfänge mit Berücksichtigung ihres Sinnes zählt. Z. B. die von $+3$ nach aussen gezogene Linie wird von 1 nach oben und 4 nach unten gerichteten Linien geschnitten, mithin wird $+3$ dreimal im Sinn umfahren, der am Ende der punktirten Linie angedeutet ist.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass wenn öfters eine und dieselbe Linie befahren wird, dieselbe auch ebenso oft gezählt werden muss, und dass sie als eine Fläche $= o$ einschliessend

ausfallen kann, wenn sie gleich oft hin und her befahren wird.

Kommt der Stab wieder genau in seine ursprüngliche Lage zurück, so haben seine beiden Enden jedes für sich eine geschlossene Figur beschrieben, und es ist nun ganz einerlei ob die beiden Figuren zu einer einzigen miteinander combinirt werden, oder ob man jede für sich allein behandelt. Es ist also einerlei ob man sagt, der Weg der Rolle entspricht in Fig. 45 der Differenz der Flächen $(+1)$ und (-1) oder der Differenz des Flächeninhaltes des Herzens und des Kreises.

Fig. 45.



15. Flächenmessung mittelst des Planimeters.

In der einfachen bis jetzt betrachteten Form ist das Planimeter nicht angewendet worden, doch können wir uns wohl denken, dass ein solches Instrument gute Dienste leisten würde, sobald es in so grossen Dimensionen ausgeführt werden müsste, dass es von einer einzigen Person nicht mehr regiert werden könnte. Wäre z. B. (Fig. 46) auf der Mitte einer Stange, etwas länger als die grösste Breite eines zu messenden Feldes, eine Art Wagenrad befestigt, so wären zwei Arbeiter im Stande den Apparat so schnell, die Enden der Stange immer über den Grenzen haltend, über ein Feld wegzurollen, dass der Geometer kaum folgen könnte; nichts weiter zu thun hätte, als hintendrein zu spazieren, und am Ende des Fel-

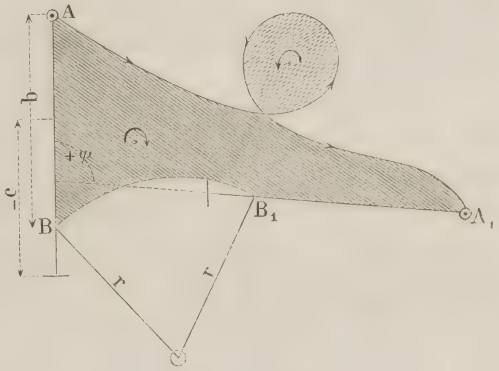
Fig. 46.

des dessen Flächeninhalt am Zählapparat des Rades abzulesen.

Sobald jedoch das Planimeter in Reisszeugdimensionen ausgeführt werden soll, und als Hülfsinstrument einer einzigen Person dienen soll, ist es nothwendig, die Aufmerksamkeit des Zeichnenden auf einen einzigen am Endpunkt des Stabes angebrachten Stift zu beschränken, und das andere Ende Figuren bekannten Flächeninhaltes zu beschreiben zwingen.

Das praktischste aller derartigen Instrumente ist wohl das Amsler'sche Planimeter. Es liegt nicht im Zweck dieser Abhandlung, die mechanische Einrichtung dieses Instrumentes zu beschreiben, und wir verweisen desshalb auf die vielen Aufsätze, die in verschiedenen Zeitschriften erschienen sind, und beschränken uns auf die Aussage des Prinzips. Der Stab $AB = b$ (Fig. 47) hat nur an einem Ende A einen Fahrstift, das andere Ende B ist scharnierartig an eine andere Stange $\bigcirc B$ befestigt, die bei $\bigcirc$ durch einen Stift festgehalten werden kann. Beschreibt man nun mit dem Fahrstift dieses Instrumentes eine beliebige Curve AA_1 (Fig. 47), so wird man nach 12 (S. 45) die Flächendifferenz zwischen (+ 1) und (− 1) gleich

Fig. 47.

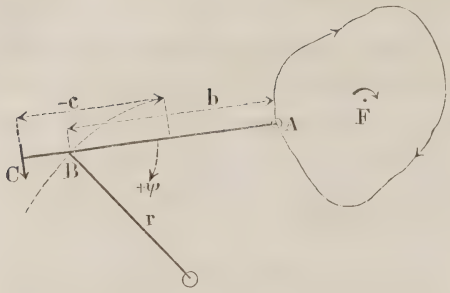


$$F = b\,(l + c\psi)$$

erhalten, weil c negativ ist. Da es nun selten Figuren giebt, die gerade von einem Kreis des Halbmessers r zwischen 2 Linien von der Länge des Stabes $AB = b$ begrenzt sind, so ist es Regel, die zu messenden Flächen F (Fig. 48 S. 52) ganz zu umfahren; kommen dann beide Enden wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück, so haben sie geschlossene Figuren beschrieben, von denen die des einen Endes $B = o$ ist, weil sie mit dem Kreisbogen des Radius r zusammenfällt. Ebenso ist der vom Stab AB beschriebene Winkel $\psi = o$,

UNIVERSITY OF

Fig. 48.



und man hat einfach den Flächeninhalt der von A umfahrenen Figur $F = b\,l$.

In dieser Form ist also das Planimeter ein Instrument, das auf die constante Basis b reducirt.

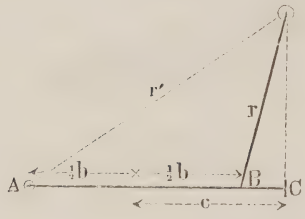
Liegt ○ im Innern der Figur, so wird während des Umfahrens derselben der Endpunkt B mit dem Halbmesser r einen Kreisbogen beschreiben, der zur Fig. F z. B. die in Fig. 45 S. 50 angedeutete Lage hat. Setzt man die Pfeile ein wie dort, und bezeichnet man die ganze vom Stift B beschriebene Fläche mit F, so erhält man

weil $\psi = 2\,\pi$ ist

als Ausdruck der vom Stab bestrichenen Fläche

$$F - r^2\,\pi = b\,(l + 2\,c\,\pi)$$

Fig. 49.



woraus $F = b\,l + (r^2 + 2\,b\,c)\,\pi$ folgt. $r^2 + 2\,r\,b\,c$ ist aber gleich $r_,^2$ wo $r_,$ die Länge des Leitstrahls $\bigcirc A$ (Fig. 49) bezeichnet, wenn die Ebene der Rolle C durch den Pol O geht, denn man hat dann

$$r_,^2 = \overline{A\,C}^2 + \overline{\bigcirc C}^2$$

$$= (c + {}^1/_2 b)^2 + \left[r^2 - (c - {}^1/_2 b)^2\right]$$

$$= r^2 + 2\,b\,c$$

und es wird einfach

$$F = b\,l + r_,^2\,\pi.$$

Wird mit dem Radius $r_,$ ein Kreis beschrieben, so dreht sich offenbar die Rolle nicht, man hat $l = o$ und dann $F = r_,^2\,\pi$, wie es sein soll.

Drittes Kapitel.

Verwandlung der Körper.

---

16. Darstellung der Cubikinhalte durch Linien.

Ganz analog dem, was bei Verwandlung der Flächen gesagt wurde, verstehen wir hier unter Verwandlung der Körper die Bestimmung der Höhe eines Prisma's, dessen Grundfläche gegeben ist und dessen Cubikinhalt dem des vorliegenden Körpers gleich sein soll.

Indem man sich nun den Cubikinhalt eines jeden Körpers als das Product einer Fläche F mit einer Länge oder Höhe k denkt, verwandelt man zuerst nach den Regeln des vorigen Kapitels die Fläche auf eine Basis b, so dass $bl = F$ ist, und dann, weil der Cubikinhalt $\mathfrak{J} = Fh = blk$ ist, das Product lk, das nun ebenfalls als eine Fläche betrachtet werden kann, auf eine zweite Basis a, so dass $ah = lk$ ist, und erhält

$$\mathfrak{J} = Fk = abh.$$

betrachtet man hier ab als Flächeneinheit, so ist h das Maass des Körpers.

Es ist demnach diese Verwandlung nichts anderes als eine wiederholte Flächenverwandlung, und da diese aus dem vorigen Abschnitt bekannt ist, so haben wir uns hier nicht mit den Verwandlungen selbst, sondern nur mehr mit der Wahl der zu verwandelnden Dimensionen, und den Modificationen derselben bei unregelmässig begrenzten Körpern zu beschäftigen, wobei wir die Verwandlung der einfachen geometrischen Körper als Parallelepipeden, Prismen, Pyramiden etc. übergehen.

Bei weitem die meisten unregelmässigen Körper, deren Cubikinhalt zu bestimmen ist, sind durch eine Reihe paralleler Querschnitte gegeben, die in mehr oder weniger grossen Abständen aufeinander folgen. Unter diesen Körpern sind die der Strassen und Eisenbahndämme ihres häufigen Vorkommens wegen die wichtigsten, und wir werden uns daher hier vorerst mit diesen beschäftigen.

17. Inhalt regelmässiger Auf- und Abtragskörper.

Die Auf- und Abtragskörper geradlinigter Bahnkörper (Taf. 4_1) sind durch auf einander folgende Querprofile

$$F = (A\,B\,C\,E) \text{ und } F_1 = (A_1\,B_1\,C_1\,E_1)$$

gegeben, deren Entfernungen $l = AA_1 = EE_1$ so klein angenommen werden sollen, dass die Begrenzungslinien BB_1 und CC_1 noch als gerade Linien betrachtet werden können; nimmt man dann auch noch die Begrenzungslinien der Endprofile BC und B_1C_1 und eines jeden Zwischenprofils $B_{\prime\prime}\,C_{\prime\prime}$ geradlinigt an, so ist die Begrenzungsfläche des Geländes ein Paraboloid, dessen Leitlinien BB_1 und CC_1 sind und dessen Erzeugungslinien immer in einem der sich parallel bleibenden Querprofile liegen. Diese Paraboloidfläche hälftet das Tetraeder $BC\,B_1C_1$, denn jedes zwischenliegende Querprofil bei $B_{\prime\prime}\,C_{\prime\prime}$ schneidet das Tetraeder in einem Parallelogramm (siehe die Fig. Taf. 4_1) das von der Erzeugungslinie $B_{\prime\prime}\,C_{\prime\prime}$ als Diagonale gehälftet wird. Es werden also von der Paraboloidfläche alle Elemente des Tetraeders, mithin auch das Tetraeder selbst gehälftet. Die Summe der Inhalte der beiden unter den zwei Tetraederflächen BCC_1 und BB_1C_1 liegenden Prismen, ist daher um ebensoviel unter, als die der beiden Prismen unter CB_1C_1 und CB_1B, über dem wahren Inhalt des Körpers ist.

Dieser ist also gleich dem arithmetischen Mittel dieser beiden Summen weniger dem der abgestutzten Pyramide unter den Böschungen oder

$$\mathfrak{I} = {}^1/_2 \left(\begin{matrix} A\,D\,A_1 \\ B\,C\,B_1 \end{matrix} + \begin{matrix} A\,D\,D_1 \\ B\,C\,C_1 \end{matrix} + \begin{matrix} A_1\,D_1\,A \\ B_1\,C_1\,B \end{matrix} + \begin{matrix} A_1\,D_1\,D \\ B_1\,C_1\,C \end{matrix} \right) - \begin{matrix} C\,D\,E \\ C_1\,D_1\,E_1 \end{matrix}$$

wobei der Inhalt des Bahngrabens der ein Prisma ist vorerst vernachlässigt wurde. Bezeichnet man nun noch die Breite des Erdkörpers in der Bahnplanie mit $b = AE = A_1E_1$ und den verticalen Abstand zwischen dem Gelände und der Bahnplanie in der Mittellinie mit h und h_1, an den Böschungen mit H und H_1, endlich die Tangente des Böschungswinkels mit τ wie alles in der Fig. angedeutet ist, so wird

$$E\,D = \frac{H}{\tau};\; E_1\,D_1 = \frac{H_1}{\tau};\; AD = b + \frac{H}{\tau} \text{ und } A_1\,D_1 = b + \frac{H_1}{\tau_1}$$

und man erhält den Inhalt

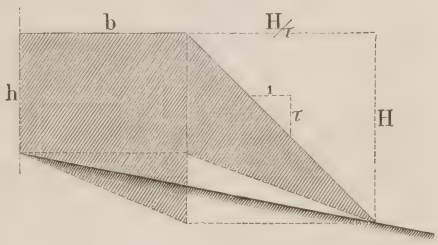
$$\mathfrak{J} = {}^1/_2 \left\{ \begin{array}{l} {}^1/_2\, l\,(b + \frac{H}{\tau}) \left[{}^1/_3\,(h+H+h_1) + {}^1/_3\,(h+H+H_1) \right] + \\ {}^1/_2\, l\,(b + \frac{H_1}{\tau}) \left[{}^1/_3\,(h_1+H_1+h) + {}^1/_3\,(h_1+H_1+H) \right] \end{array} \right\}$$
$$- {}^1/_6\, l \left(\frac{H^2}{\tau} + \frac{H_1{}^2}{\tau} + \frac{H H_1}{\tau} \right)$$

der sich wie folgt reducirt

$$\mathfrak{J} = {}^1/_4\, l b\,(h + H + h_1 + H_1) + {}^1/_4\, \frac{l}{\tau}\,(h\,H + h_1\,H_1)$$
$$- {}^1/_{12}\, l\,(h - h_1)\,\frac{(H - H_1)}{\tau}$$

Nun ist aber der Inhalt des Querprofils, siehe die Verwandlung Fig. 50 durch die beiden Parallellinien zu h, gleich dem Inhalt der schraffirten Fläche, oder

Fig. 50.



$$F = {}^1/_2\, b\,(h + H) + \frac{h\,H}{2\,\tau}$$

und ebenso

$$F_1 = {}^1/_2\, b\,(h_1 + H_1) + \frac{h_1\,H_1}{2\,\tau}$$

woraus durch Substitution

$$\mathfrak{J} = l\,.\,\frac{F + F_1}{2} - {}^1/_{12}\, l\,(h - h_1)\,\frac{H - H_1}{\tau}$$

folgt.

$$\frac{F + F_1}{2}$$

ist die mittlere Fläche der beiden Endprofile, welche noch die Querschnitte aller prismatischen Abtragskörper als Graben-Fahr-

bahnkasten etc. enthalten dürfen. Es ist also nicht ganz richtig wenn bei Berechnung solcher Erdkörper einfach die Länge mit der mittleren Fläche multiplicirt wird, sondern es muss diese noch vorher um die Fläche des Inhaltes

$$^1/_{12}\,(h—h_1)\,\frac{H—H_1}{r}$$

vermindert werden. Da

$$\frac{H}{r} \text{ und } \frac{H_1}{r}$$

die Projectionen $E\,D$ und $E_1\,D_1$ (Taf. 4_1) der Böschungen sind, so ist diese Fläche (siehe Fig. 51) gleich dem $^1/_6$ des Inhaltes des Dreiecks $A\,B\,C$, dessen Eckpunkt C vermöge der in der Figur ausgeführten Construction um $h—h_1$ vertical unter der Böschung liegt, und das die Böschungsdifferenz $A\,B$ zur Basis hat, oder gleich dem schraffirten Dreieck, das $^1/_6\,A\,B$ zur Basis hat. Kreuzt sich das Gelände innerhalb des Profils (Fig. 52), so sind $h—h_1$ und $H—H_1$ entgegengesetzten Zeichens und der genau ebenso construirte Fehler ist zur mittlern Fläche zu addiren.

Fig. 51.

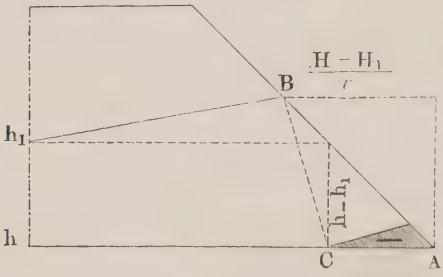
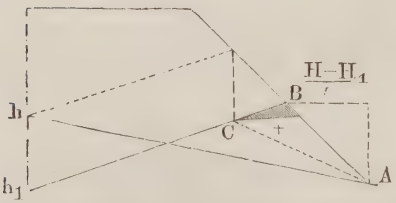


Fig. 52.



Mittelst dieser einfachen Construction kann also in jedem speciellen Fall leicht untersucht werden, ob es hinlänglich genau ist, den Inhalt des Erdkörpers durch Multiplication der Länge mit der mittleren Fläche zu bestimmen, und wenn dies nicht der Fall ist, so kann die Correction mittelst derselben ausgeführt werden, indem man bei Verwandlung des einen Querprofils das doppelte Fehlerdreieck gleich mit verwandelt.

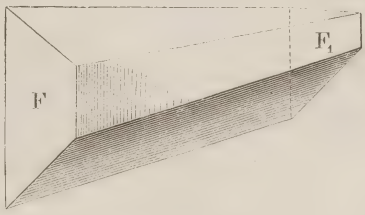
Wird die Böschung vertical, so ist natürlich ihre Projection

$$\frac{H_1 - H}{\tau} = 0$$

und mithin auch ihr Fehler = 0.

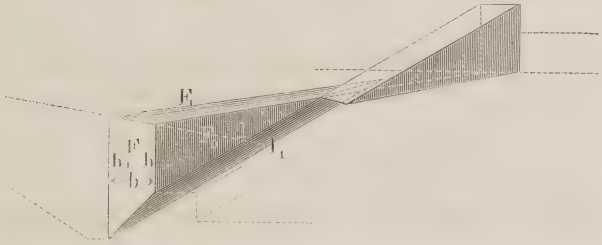
Der Inhalt von zwischen zwei parallelen verticalen Flächen eingeschlossenen Körpern (wie Fig. 53) ist also immer genau gleich dem Product der Länge mit der mittlern Fläche.

Fig. 53.



Bei dem Uebergang von Auftrag in Abtrag kommen häufig Körper, wie Fig. 54, sogenannte Keile vor. Auf solche Körper sind die oben entwickelten Formeln ganz anwendbar. Die vordern und hintern Flächen F_0 und F_1 sind vertical und parallel und ihre

Fig. 54.



Entfernung ist gleich der Dicke b des Keiles. Da ferner h und l vertical auf einander stehen, so ist schon

$$\frac{H_1 - H}{\tau} = l_1 - l$$

und man erhält den Inhalt des Körpers

$$\mathfrak{I} = {}^1/_2\, b\, (F_0 + F_1) - {}^1/_{12}\, (h_1 - h)\, (l_1 - l)$$

allein diese Form ist praktisch nicht wohl anwendbar, denn bei Massenberechnungen hat man nie die Flächen F_0 und F_1, sondern immer nur die im Querprofil enthaltene Fläche F vor sich, und es ist üblich, dieses F mit der halben mittleren Länge des Keiles d. h. mit

$$\frac{l_1 + l}{4}$$

zu multipliciren, wo l und l_1 durch eine kleine Nebenrechnung oder eine Construction bekannt sind.

Um nun zu untersuchen, wie gross der Fehler ist, der auf diese Weise begangen wird, und um diesen Fehler nöthigenfalls berücksichtigen zu können, drücke man F_0 und F_1 durch ihre Werthe $^1/_2\ h\,l$ und $^1/_2\ h_1\ l_1$ und ebenso

$$F \text{ durch } b\,.\,\frac{h + h_1}{2}$$

aus, und man erhält

$$\Im = {}^1/_{12}\ b\ (2\ hl + 2\ h_1\,l_1 + h\,l_1 + h_1\,l)$$

$$F.\frac{l_1 + l}{4} = {}^1/_8\ b\ (h\,l + h_1\,l_1 + h\,l_1 + h_1\,l)$$

und hieraus

$$\Im = F\,.\,\frac{l_1 + l}{4} + {}^1/_{24}\ (h_1 - h)\ (l_1 - l)$$

Um das letzte Glied berücksichtigen zu können, betrachte man es als Correction, die an F vorzunehmen ist, nehme

$$\frac{l_1 + l}{4}$$

als Faktor heraus, und bringe den Inhalt in folgende Form

$$\Im = \frac{l_1 + l}{4}\left[F + {}^1/_2\ b\ (h_1 - h)\,.\,\frac{{}^1/_3\ (l_1 - l)}{l_1 + l}\right]$$

Man erhält daher den wahren Inhalt, wenn man F um ein Dreieck vergrössert, dessen Basis $= b$ und dessen Höhe gleich

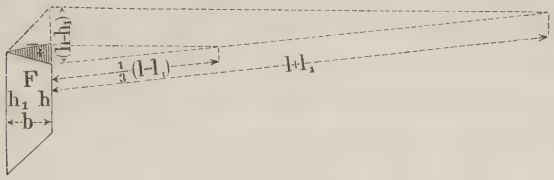
$$(h_1 - h)\,.\,\frac{{}^1/_3\ (l_1 - l)}{l_1 + l}$$

ist und dann mit der halben mittleren Länge des Keiles multiplicirt.

Fig. 55 zeigt die Construction dieses in der Figur schraffirten Dreiecks, sie bedarf wohl keiner weitern Erläuterung. $^1/_3\ (l_1 - l)$ und $l_1 + l$ können dabei in beliebigem Maassstab aufgetragen sein. Die Correction wird negativ, wenn die Werthe $h_1\ h$ und $l_1\ l$ sich

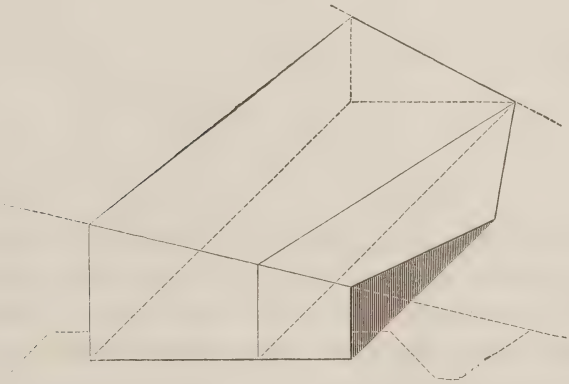
kreuzen, d. h. wenn dem kleineren h das grössere l entspricht und umgekehrt.

Fig. 55.



Körper wie Fig. 56 sind nicht mehr als continuirlich erzeugt zu betrachten und müssen so getheilt werden, wie es die Figur

Fig. 56.



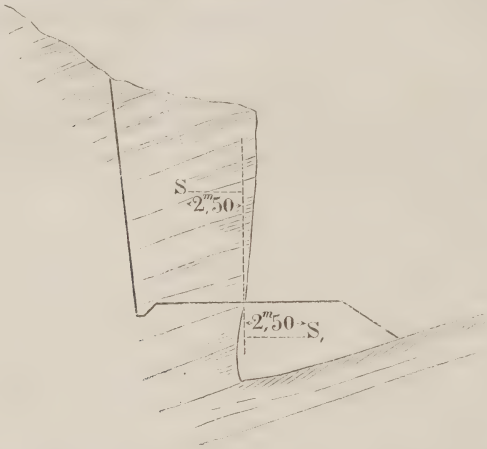
andeutet. Der eine ist wie ein gewöhnlicher Erdkörper aus der mittlern Fläche zu berechnen, und der zweite ist der oben behandelte Keil.

18. Bestimmung des Inhalts unregelmässiger Erdkörper nach Guldins Regel.

Nicht immer ist die Bahn oder der Strassenkörper geradlinigt, und namentlich bei letzterem kommen häufig Krümmungen von sehr kleinem Halbmesser vor. Es ist allgemein üblich, in solchen Fällen die Krümmung ganz zu vernachlässigen, und die immer

zu der Bahnaxe senkrecht aufgenommenen Querprofile mit den in derselben gemessenen Bogenlängen zu multipliciren. Diess kann wohl in den meisten Fällen so gestattet sein, doch kann es auch vorkommen, dass auf diese Weise ein sehr merklicher Fehler begangen würde. Denken wir uns das Felsen-Profil (Fig. 57) einer

Fig. 57.



Strasse winde sich in einem Bogen von 20 M. Halbmesser um einen Felsenkopf herum, und es liegen die Schwerpunkte S und S_1 der Auf- und Abtragsflächen nur 2,50 M. ausserhalb der Bahnaxe: so würde man, bei Messung der Längen in der Bahnaxe den Abtrag um ein volles $^1/_8$ zu gross und den Auftrag um ebensoviel zu klein annehmen. Denn nach Guldins Regel ist der Cubikinhalt eines durch Bewegung eines Profils erzeugten Körpers gleich dem Inhalt des Profils multiplicirt mit dem Weg, den dessen Schwerpunkt S zurücklegt, vorausgesetzt, dass das Profil immer senkrecht auf der Bahn des Schwerpunktes stehe. Im oben erwähnten Fall aber hat diese Schwerpunktsbahn nur 17,5 nicht 20 M. Radius, und die in der Bahnaxe gemessenen Längen müssen um

$$\frac{2,5}{20} = {}^1/_8$$

reducirt werden.

Diese Guldinsche Regel ist überhaupt sehr nützlich, um bei den vielen unregelmässigen Körpern, die der Ingenieur zu berechnen

hat, die richtige Länge derselben zu bestimmen, wenn einmal Profile in irgend einer Richtung aufgenommen oder construirt sind. Wir glauben diess nicht besser als durch Anwendung auf die Bestimmung des Inhaltes eines Wegübergangs (Taf. 4_{23}) erläutern zu können. Es würde zwar auch hier das gewöhnliche Verfahren, mehrere Profile bei *a*, *b*, *c*, *d* zu den gegebenen Endprofilen zu construiren und den Inhalt durch Multiplication ihrer mittleren Flächen mit ihren Längen zu bestimmen, wo dann die Genauigkeit von der Zahl und der Wahl der Profile abhängt, angewendet werden können; allein, gesetzt es handle sich darum, diesen Inhalt ganz genau zu bestimmen, so könnte man auf die folgende Weise verfahren. Wir würden den Körper (durch die Verticalebene *ABC* die durch den Fuss der Böschung geht, und durch die Cylinderfläche *DEB* mit verticalen Erzeugungslinien die die obere Wegkante projicirt) in 3 Theile theilen.

Der erste liegt über den Böschungen des Bahndammes, der Inhalt seiner Erdflächen ist dem Aufriss Taf. 4_3 zu entnehmen, wo sich die eine als krummlinigtes Dreieck *BCH*, die andere als Trapez mit der Diagonale *AD* projicirt und ihr Mittel ist mit der senkrechten Entfernung des Schwerpunktes *S* der Endfläche von dem Profil *a* zu multipliciren. Der zweite ist ein Cylinder mit der Grundfläche *ABEDA* (Taf. 4_2), dessen Höhe im Schwerpunkt derselben bei *S*, zu construiren ist (siehe den Aufriss).

Der dritte bildet die Böschungen des Wegdammes; dieser ist erzeugt durch die Bewegung des veränderlichen Profils 1, 2, 3. 1 ist da construirt, wo die Wegkante ihre Richtung ändert, 2 wo die Böschung am breitesten ist und 3 am Ende. Das Mittel je zweier dieser Profile ist mit dem —.—.—ten von ihrem Schwerpunkt zurückgelegten Weg zu multipliciren. Der Inhalt von 3 aber mit dem Weg 3 *F*. Bei allen derartigen Böschungen liegt natürlich die Schwerpunktslinie im $^1/_3$ der Böschungsbreite. Das letzte Stück zwischen den Profilen 3 und *BC* könnte auch als Kegel berechnet werden, indem man die horizontale Projection seiner Grundfläche mit dem $^1/_3$ des verticalen Abstands des Schwerpunkts derselben von der Spitze des Kegels multiplicirt; diess ist ganz genau dasselbe, als ob man $^1/_3$ der Grundfläche des Kegels mit dem von der Spitze auf sie gefällten Perpendikel multiplicirte.

Dem eben Gesagten entsprechend ist also auch die Höhe der

Viertelskegel zu bestimmen, welche beim Anschluss an hohe Viaducte mitunter auf sehr steilen Thalabhängen liegen; hier muss auch $^1/_3$ des verticalen Abstandes des Schwerpunktes der Grundfläche von der Spitze des Kegels mit der horizontalen Projection der Grundfläche multiplicirt werden.

Ist das Gelände gebrochen, so gilt das eben Gesagte auch von jedem einzelnen Theil des Kegels, dessen Grundfläche als eben angenommen werden darf.

19. Bestimmung des Cubikinhalts aus Horizontalcurven.

Die Parallelebenen, durch welche oben die Cubikinhalte bestimmt wurden, standen alle vertical, allein häufig werden auch horizontale Parallelebenen, die Horizontalcurven, zur Bestimmung des Inhalts ganz unregelmässiger Körper benutzt.

Der Abstand der Horizontalcurven wird gewöhnlich so bestimmt, dass der Schnitt des Geländes mit einer normal auf den Curven stehenden verticalen Ebene als geradlinigt angenommen werden darf. Nimmt man dann weiter an, zwei aufeinanderfolgende Curven seien ähnlich, so ist der Erdkörper zwischen denselben als ein abgestutzter Kegel zu betrachten, und sein Inhalt

$$\Im = {}^1/_3\, h\,(F + F_1 + \sqrt{F F_1})$$

wo h den verticalen Abstand zweier Curven und F und F_1 ihren Flächeninhalt bezeichnet.

In der Praxis begnügt man sich jedoch gewöhnlich damit, die mittlere Fläche mit h zu multipliciren, also

$$\Im = {}^1/_2\, h\,(F + F_1)$$

zu setzen, was um

$${}^1/_6\, h\,(\sqrt{F} - \sqrt{F_1})^2$$

zu gross ist. Da alle ähnlichen Dimensionen der beiden Flächen sich wie

$$\sqrt{F} : \sqrt{F_1}$$

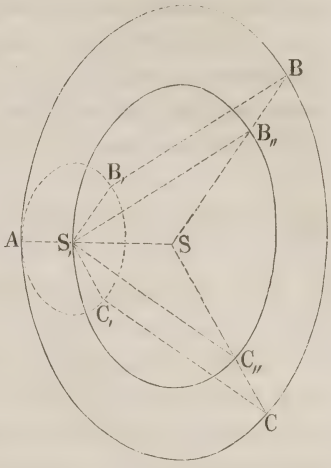
verhalten, so erhält man diesen Fehler, wenn man (siehe Fig. 58) auf einer Differenz $S_1 A$ zweier ähnlicher Strahlen $S A$ und $S S_1$, wo S das perspectivische Projectionsmetrum ist, eine ähnliche

Curve $AB,C,$ construirt, und ihren Flächeninhalt mit $^1/_6$ des verticalen Abstandes der Curven multiplicirt. Bei dem in der Regel sehr kleinen Verhältniss von

$$\frac{AS,}{AS}$$

ist dieser Fehler meistens so klein, dass er füglich vernachlässigt werden kann; in Folge der Kleinheit desselben Verhältnisses ist der aus der möglichen Unähnlichkeit solcher Figuren entspringende Fehler nothwendigerweise noch viel kleiner, indem er nur eine kleine Aenderung in der Länge der Projectionsstrahlen $S,(AB,C,)$ bewirkt. Diesen zweiten Fehler kann man nur für eine bestimmte Form der Curven ermitteln, und da eine jede bestimmte Form in der Natur wohl nur einmal vorkommt, so wollen wir diesem Fehler zweiter Ordnung hier nicht mehr weiter nachspüren.

Fig. 58.



Bei der Bestimmung des Cubikinhaltes mancher Körper, z. B. Hügelkuppen, kommt es vor, dass diese nicht gerade von einer zu den Horizontalcurven parallelen Ebene begrenzt sind, sondern noch etwas über die letzte Curve hinausragen. In diesem Fall wird man, wenn die Kuppe abgerundet ist oder eine Keilform hat, den Flächeninhalt der letzten Curve mit $^1/_2$ der überragenden Höhe, dagegen mit $^1/_3$ derselben multipliciren, wenn die Kuppe mehr kegelförmig gebildet ist. Ueberhaupt wird man dann, je nach der Aehnlichkeit der Kuppe mit der einen oder andern Form, diesen Coefficienten zwischen 0,33 und 0,5 wählen. Ist sie aber durch ein Plateau begrenzt, das nicht ganz parallel zu den Horizontalcurven läuft, so wird man die verticale Höhe des Schwerpunktes des Plateaus über der Ebene der Curve mit der Mittelfläche dieser und der Horizontalprojection des Plateaus multipliciren.

Das bequemste, um nicht zu sagen einzige praktische Mittel den Flächeninhalt, den die Curven einschliessen zu berechnen, besteht darin, sie mit dem Planimeter zu umfahren. Sind, wie es sein sollte, die verticalen Abstände der Horizontalcurven alle gleich

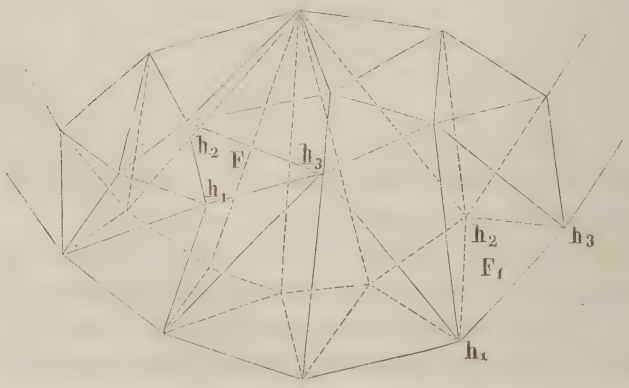
gross, so hat man einfach die um das Mittel der obersten und untersten Endfläche verminderte Flächensumme aller Curven mit h zu multipliciren, um den ganzen Cubikinhalt zwischen diesen Endflächen zu erhalten. Eine allenfallsige Kuppe über oder unter einer der Endflächen wäre natürlich hier noch nicht mit inbegriffen, und wäre besonders zu addiren.

20. Bestimmung des Cubikinhaltes aus cotirten Plänen.

Der Cubikinhalt von Körpern keiner sehr grossen und keiner bestimmten Längen-Ausdehnung, bei denen es also nicht der Mühe werth ist, besonders Horizontalcurven aufzunehmen, wird wohl am zweckmässigsten aus einem cotirten Plan bestimmt. Es werden so viele Punkte aufgenommen und nivellirt, dass man die Dreiecke, die sie einschliessen, wenn sie durch gerade Linien mit einander verbunden werden, als eben betrachten kann. Denkt man sich dann alle diese Dreiecke als Endflächen von Prismen, welche die horizontale Projection des Dreiecks zur Basis haben, und multiplicirt man den Inhalt dieser Basis mit dem $^1/_3$ der Cotensumme ihrer drei Ecken, so erhält man den Cubikinhalt des durch dieses Dreieck projicirten Theiles des Körpers, wenn als Cotenhorizont eine Begrenzungsfläche des Körpers angenommen worden war; war letzteres jedoch nicht möglich, so ist von diesem Inhalt noch der des Raumes zwischen dem Cotenhorizont und der zweiten Begrenzungsfläche des Körpers abzuziehen.

Wäre z. B. der in Fig. 59 dargestellte Inhalt einer ausge-

Fig. 59.



hobenen Füllgrube zu bestimmen, deren ursprüngliche Geländeumrisse durch punktirte Linien angedeutet sind, so hätte man

$$\mathfrak{J} = \Sigma\, {}^1/_3\, (h_1 + h_2 + h_3)\, F - \Sigma\, {}^1/_3\, (h'_1 + h'_2 + h'_3)\, F_1$$

wo F die Flächeninhalte der untern dreiseitigen Begrenzungsflächen nach ausgehobener Erde, und F_1 die der obern ursprünglichen Flächen bezeichnet, h und h' sind die auf einen über dem Gelände liegenden Horizont bezogenen Coten.

Genau auf die eben hier angedeutete Weise müsste auch verfahren werden, wenn der Cubikinhalt eines Körpers aus seiner orthogonalen Projection zu bestimmen wäre.

21. Das Massennivellement.

Unter Massennivellement verstehen wir jene graphische Darstellung der auf einer Bahnstrecke (Körper von vorwiegender Längenausdehnung) vorkommenden Auf- und Abtragsmassen, aus der am deutlichsten die Verwendungsart dieser Massen, die Längen und Grenzen der verschiedenen Transportsektionen ersehen, aus der sogar die Transportkosten graphisch bestimmt werden können, wenn das Massennivellement in hinlänglich grossem Maassstab aufgetragen wurde; und aus der am leichtesten alle jene bei Anordnung der Erd-Transporte zu beobachtenden Gesetze und Regeln abgeleitet werden können. Das Massennivellement wurde von dem leider zu früh verstorbenen bayrischen Sektionsingenieur Bruckner aus Neustadt an der Hardt ersonnen, und wurde auf den bayerischen Staatseisenbahnen als nothwendige Beilage aller Massenberechnungen betrachtet, um deren specielle Verwendung anschaulich zu machen.

Das Massennivellement unterscheidet sich vom gewöhnlichen Längenprofil dadurch, dass statt der Coten des Geländes die algebraische Summe aller bis zum treffenden Profil vorkommenden Auf- und Abtragsmassen, die beide mit entgegengesetzten Zeichen in Addition zu bringen sind, aufgetragen werden. Diese Summen sind also nichts anderes als die Zahlen der in vielen Massenberechnungen eingeführten Abgleichungscolonne, in der die Differenz der Abgleichungszahlen zweier beliebigen nicht aufeinander folgenden Profile unmittelbar den zwischen ihnen vorkommenden Ueberschuss an Auf- oder Abtrag giebt.

Ohne uns weiter in die Bildung dieser Zahlen einzulassen, wollen wir hier sogleich das auf Taf. 5_2 unter dem eigentlichen Nivellement Taf. 5_1 aufgetragene Massennivellement erklären. In demselben wurden die Aufträge aufwärts, die Abträge abwärts aufgetragen; bei der ersten Verticalen von O aus beginnend, wurde also der zweite Punkt des Massennivellements in der Verticalen III^a so aufgetragen, dass seine verticale Höhe über O also O_1 1 in irgend einen Maassstab die Auftragsmasse vor III^a darstellt. Ebenso sind die Höhendifferenzen 1 2 und 2 B gleich den Auftragsmassen zwischen III^a und ^{b}, und zwischen ^{b} und ^{c}, die ganze Verticale O_1 B ist also gleich dem ganzen Auftrag bis III^c.

Bei III^c beginnt der Abtrag, er wird als negative Zahl in Addition gebracht, die Zahlen der Abgleichungstabelle, d. h. die Coten des Massennivellements nehmen ab, und die Massen des Abtrags nach III^c muss man sich von B aus abwärts aufgetragen denken, und so fort.

Eine unmittelbare Folge dieser Anordnung ist:

1) Die gebrochene Linie, welche die einzelnen Punkte des Massennivellements mit einander verbindet, ist aufsteigend im Auftrag, abfallend im Abtrag; im vorliegenden Massennivellement wurden erstere ausgezogen, letztere punktirt.
2) Die Uebergänge von Auf- in Abtrag sind Maxima der Berge, die von Ab- in Auftrag Minima der Thäler in dieser Linie.
3) Der Linienzug des Massennivellements ist desto steiler, je grösser der Auf- oder Abtrag zwischen zwei aufeinanderfolgenden Profilen ist, also je grösser das Querprofil der Bahn ist; überhaupt
4) ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen der Zug des Massennivellements mit der Horizontalen bildet, dem Querprofil der Bahn proportional. Sie ist also positiv, aufwärts gerichtet, im Auftrag, negativ, abwärts gerichtet, im Abtrag, sie ist=0 bei dem Uebergang von einen in den Andern, und zwar bezeichnet sie dann ein Maximum, wenn sie in Abtrag übergeht, negativ wird; ein Minimum, wenn sie in Auftrag übergeht, positiv wird.
5) Bei constantem Querprofil des Auf- oder Abtrags bildet die Linie des Massennivellements eine gerade Linie.
6) Im Allgemeinen werden also gewöhnlich anfangs zu- dann abnehmende Auf- oder Abträge die Form eines ∽ haben.

Aus dem eben Gesagten geht hervor, dass ein solches Massennivellement einen bessern Ueberblick der Auf- und Abtragsverhältnisse als das Längenprofil selbst giebt, weil die zu bewegenden Massen, die nicht einmal den Auf- und Abtragsflächen desselben proportional sind, hier als verticale Abstände, als lineäre Grössen ins Auge fallen, allein der grösste Vorzug desselben besteht darin, dass:

7) Zwischen allen Profilen, deren Endpunkte auf einer Horizontalen liegen, Ausgleichung des Auf- und Abtrags stattfindet; dass

8) Der Flächeninhalt der Berge und Thäler über und unter dieser Horizontalen dem variabeln, von der Entfernung abhängigen Theil der Transportkosten proportional ist, und dass

9) Diese Berge und Thäler die einzelnen Transportsektionen bezeichnen, und zwar die über der horizontalen Abgleichungslinie liegenden Berge die Sektionen in denen rückwärts, und die unter derselben liegenden Thäler die Sektionen, in denen vorwärts transportirt wird.

Da die Ordinaten durch Addition der Auf- und Abtragsmassen gebildet werden, so ist es ad 7) klar, dass wenn die Ordinate des Endpunktes eines beliebigen Stückes des Massennivellements gerade so gross wie die des Anfangspunktes ist, zur erstern ebensoviel Auf- als Abtrag addirt werden musste, dass beide sich demnach innerhalb dieser Profile ausgleichen, und dass eine oder mehrere ganze Transportsektionen zwischen denselben gebildet werden können.

Nimmt man, wie gewöhnlich bei Anfertigung der Tabellen für Transportkosten, an, es bestehe der Preis für den Transport der Cubikeinheit auf eine variable Entfernung aus einer Constanten mehr einer einfach dieser Entfernung proportionalen Variabeln, so wird das sub 8) Gesagte für diesen variabeln Theil der Transportkosten gelten, wobei man sich den constanten Theil einfach den Förderungskosten zugeschlagen denken kann. Es sind nämlich dann die Transportkosten des Massenelementes $\triangle M$ (Taf. 5_2) z. B. das in der Transportsektion III von IIIe aus rückwärts zu transportiren ist, bis zum Uebergang von Auftrag in Abtrag dem Product $e \triangle M$ oder dem in Sektion III schraffirten Flächenelement proportional. Die Gesammttransportkosten des in der III. Sektion zu transportirenden Abtrags M bis zum Uebergang von Ab- in Auftrag sind

$\Sigma e \triangle M$ oder der Fläche ABD proportional. Auf dieselbe Weise wird bewiesen, dass die Transportkosten derselben Erdmasse M vom Uebergang von Auf- in Abtrag an bis zu den Orten, den diese Massen im Auftrag einzunehmen haben, der Fläche BCD proportional sind. Die Gesammtkosten sind also dem Flächeninhalt ABC proportional.

Da bei diesem Beweis die gegenseitige Lage der Auf- und Abtragselemente gar nicht in Betracht kam, so ist es bezüglich der Kosten ganz einerlei, wohin die einzelnen Abtragselemente im Auftrag transportirt werden, vorausgesetzt nur, dass bei diesem Transport die Grenzen der Sektion nicht überschritten, nicht rückwärts, dagegen parallel oder doch annähernd parallel zur Bahnaxe transportirt werde.

Nur nebenbei wollen wir hier bemerken, dass die Fläche ABD oder die $\Sigma e \triangle M$ dem statischen Moment der Masse in Bezug auf den Uebergang von Auf- in Abtrag, also dem Product der Abtragsmasse M mit der Entfernung ihres Schwerpunktes von diesem Uebergang proportional ist, weil $\Sigma e \triangle M$ der Ausdruck dieses statischen Momentes ist.

Da dasselbe auch bezüglich des Transportes derselben Masse vom Uebergang an zum Ort des Auftrages gilt, so sind die totalen Transportkosten einer beliebigen Erdmasse, dem Product dieser Masse mit der Entfernung ihrer Schwerpunkte im Ab- und Auftrag proportional, wie es seiner Zeit schon Gauthey bewiesen hat.

Ein Blick auf Taf. 5_1 und 5_2 genügt, um die Richtigkeit des sub 9) Gesagten einzusehen. Da immer vom Abtrag der abwärts laufenden punktirten, zum Auftrag der aufsteigenden, ausgezogenen Linie forttransportirt werden muss, und jene nothwendigerweise v o r jedem Thal und h i n t e r jedem Berg liegt, so folgt, dass Berge Sektionen bezeichnen, in denen rückwärts, und Thäler solche, in welchen vorwärts transportirt wird.

Alles bisher Gesagte ist eine unmittelbare Folge dessen, dass die Zahlen der Abgleichungscolonnen aufgetragen werden. Willkürlich aber ist die Art und Weise, wie die seitwärts liegenden Füllgruben und Ablagerungsplätze aufgetragen werden können. Auf Taf. 5_2 sind sie auf die folgende Weise dargestellt.

Es sei (Taf. 5_3) die Ansicht der Bahn von oben und die schraffirte Fläche in derselben die Füllgrube. Dann tragen wir von jedem Punkt C aus auf einer Horizontalen die Entfernung $CE = C_1E_1$

(Taf. $5_{2\,3}$) dieses Punktes von der Füllgrube, mit Berücksichtigung des Transportsinnes auf. Die Entfernung eines auf der andern Seite der Füllgrube liegenden Punktes ($L\ L_1$) wird also in entgegengesetztem Sinn so aufgetragen, dass $L\,M = L_1\,J_1\,K_1$ ist, wobei vorausgesetzt wird, dass, wie es manchmal der Fall ist, alle Transportwagen nur über einen bestimmten Punkt J_1 weg von der Füllgrube zur Bahn gelangen können; in diesem Fall wird dann der Ort aller Endpunkte dieser Entfernungen eine Verticale $M\,K$ sein, weil die Entfernung der Punkte der Bahn genau mit der Länge der Bahnstrecken wächst. Längs der Füllgrube zwischen ($J\,F$, $J_1\,F_1$) ist die Entfernung eines jeden Punktes der Bahn von der Füllgrube gleich gross, also $J\,K = F\,G = J_1\,K_1 = F_1\,E_1$; nimmt man endlich die Mitte der Füllgrube H als den Ort an, wo die Transportrichtung wechselt, so erhält man als Ort aller Entfernungen der Füllgrube die gebrochene Linie $E\,G\,H\,K\,M$. Man sieht hiernach, dass die von der Füllgrube bediente Bahnstrecke in zwei Sektionen I und II (Taf. 5_1) zerfällt, in deren letztern II vorwärts und in deren erstern I rückwärts transportirt wird. Die Transportkosten in der erstern sind dem Flächeninhalt $E\,G\,H\,C\,E$, und die der zweiten dem Flächeninhalt $M\,K\,H\,L\,M$ proportional. Auch sieht man, dass die an die Abgleichungslinie $C\,P$ stossende Sektion II dieser gegenüber sich gerade wie ein Thal, in dem vorwärts transportirt wird, verhält.

Genau auf dieselbe Weise, wie hier angedeutet, wurden auch die beiden Ablagerungsplätze, welche die letzten Sektionen VIII, IX, X und XI umfassen, aufgetragen und Alles hier von den Füllgruben Gesagte gilt auch von den Ablagerungsplätzen.

Zwischen zwei Füllgruben oder Ablagerungsplätzen ist durch das Massennivellement allein die Eintheilung der Transportsektionen durchaus noch nicht bestimmt, und es hängt z. B. ganz von unserm Belieben ab, durch Hinaufrücken der Abgleichungslinie $C\,P$ mehr aus der Füllgrube Sektion II zu entnehmen, mehr auf dem Ablagerungsplatz Sektion VIII abzulagern, und gleichzeitig alle Thal-Sektionen, in denen vorwärts transportirt wird, zu vergrössern, und alle Berg-Sektionen, in denen rückwärts transportirt wird, zu verkleinern, oder auch das Umgekehrte durch Hinabrücken der Abgleichungslinie zu thun.

Da frägt es sich nun, wie müssen die Transportsektionen eingerichtet werden, damit die Transportkosten ein Minimum werden,

oder was ganz dasselbe ist, wie muss die Abgleichungslinie CP gelegt werden, damit die Summe der Flächeninhalte der von dieser Linie abgeschnittenen Berge und Thäler ein Minimum werde.

Untersuchen wir die Aenderung, die wir durch ein ∞ kl. Hinaufrücken der Abgleichungslinie CP um $\triangle h$ (Taf. 5_2) an der Summe dieser Inhalte bewirken. Die Inhalte der Berge werden dann offenbar um $\triangle h$mal die Basen dieser Berge vermindert, der Inhalt der Thäler dagegen wird um dasselbe $\triangle h$mal die Breitensumme aller Thäler, hier inclusive der Breite der Sektionen II und VIII, vergrössert. Die eigentliche Minderung in Folge des Vorrückens von CP ist daher gleich $\triangle h$ multiplicirt mit der Summe der Basen aller Berge, weniger der Breite aller Thäler. Soll nun durch diese Verrückung keine Minderung des Flächeninhaltes möglich sein, d. h. soll die Lage von PC schon der Art sein, dass die Inhalte der Berge und Thäler schon ein Minimum sind, so muss die Aenderung in Folge der ∞ kl. Verrückung $= 0$ sein; es muss also die Summe der Basen aller Berge gleich der Summe der Breiten aller Thäler sein.

Uebersetzen wir diesen graphisch abgeleiteten Satz in die Sprache der Wirklichkeit, so gelangen wir zu der wichtigen Regel:

Die Transportsektionen eines aus mehren Sektionen bestehenden Erdbaues sollen so angeordnet werden, dass die Längensumme aller Sektionen, in denen vorwärts transportirt wird, gleich der Längensumme aller Sektionen, in denen rückwärts transportirt wird, sei.

Bei Bildung dieser Summen müssen natürlich die Längen der äussersten Füllgruben- und Ablagerungssektionen (wie die Fig. Taf. 5_2 zeigt) mit inbegriffen sein.

Diese zweckmässigste Lage von CP ist leicht zu ermitteln; durch regelmässiges Umschlagen des Zirkels auf dieser Linie erhält man sehr bald die Differenz zwischen den Bergbasen und Thalbreiten; findet man z. B. für eine durch $P_,$ gehende Abgleichungslinie die Thalbreiten grösser als die Bergbasen, so trage man diesen Ueberschuss auf der Abgleichungslinie selbst in beliebiger Richtung, z. B. nach $P_, Q_,$ auf; findet man dann für eine durch $P_{,,}$ gehende Abgleichungslinie die Bergbasen grösser, so trage man diesen Ueberschuss $P_{,,} Q_{,,}$ in entgegengesetzter Richtung auf; verbindet man schliess-

lich $Q_,$ und $Q_{,,}$ durch eine Fehlerlinie, so schneidet diese in P die richtige Lage der Abgleichungslinie CP ab. Diese Linie $Q_, Q_{,,}$ wird im vorliegenden Falle eine Gerade sein, weil keine Brechungspunkte des Zuges des Massennivellements zwischen die durch $P_,$ und $P_{,,}$ geführten Horizontalen fallen. Im Allgemeinen aber wird diese Linie eine Curve sein, die wir mit dem Namen Fehlercurve bezeichnen wollen.

Dieses Verfahren, das ganz der arithmetischen Regula falsi entspricht, werden wir noch öfters anzuwenden Gelegenheit haben. Es besteht also im Allgemeinen darin, die Fehler $+P_,Q_,$, $-P_{,,}Q_{,,}$, die bei gewissen Annahmen gemacht werden, mit Berücksichtigung ihres Sinnes, in irgend einer Richtung, in irgend einem Maassstab, von irgend einer Abscissenaxe $P_, P_{,,}$ aus so aufzutragen, dass die Abscissen in irgend einer Beziehung zu den gemachten Annahmen stehen, (hier bestimmt der Fuss der Ordinate $P_, P_{,,}$ selbst die Lage der Abgleichungslinie) dann bestimmt die Fehlercurve, die man erhält, wenn die Endpunkte aller dieser Fehlerordinaten mit einander verbunden werden, durch ihren Schnitt P mit der Abscissenaxe die Annahme, die den Fehler 0 giebt; im vorliegenden Fall geht die Abgleichungslinie selbst durch diesen Punkt P.

Durch die zweckmässigste Lage der Abgleichungslinie ist also diejenige Länge aller Transportsektionen bestimmt, welche die Transportkosten zum Minimum macht.

Früher wurde auf den bayerischen Bahnen das Massenprofil nur zu dieser graphischen Bestimmung der Transportsektionen benutzt, in der letzten Zeit aber wurde es auch auf den würtembergischen Bahnen zur Ermittlung der Transportkosten selbst, durch Umfahren der Berge und Thäler mit dem Planimeter, gebraucht.

Kommen verschiedene Transportarten vor, so versteht es sich, dass jede einen Transport darstellende Fläche besonders umfahren werden muss, um mit dem entsprechenden Preis multiplicirt zu werden.

Sollten auch verschiedene Transportarten in der Nähe der Abgleichungslinie, also an den Sektionsgrenzen vorkommen, z. B. Hülfseisenbahnen und Pferdebahnen, so müssten bei Bildung der Fehler $P_, Q_,$, $P_{,,} Q_{,,}$ alle Sektionsbasen, die billigern Transportarten zugehören, vorher im Verhältniss dieser Billigkeit reducirt, oder was genau zu demselben Resultat

führen würde, alle, welche theurern Transportarten zugehören, müssten im Verhältniss des grössern Preises vergrössert werden. Käme z. B. auf der Sektionsgrenze Schubkarren-, Pferde- und Eisenbahntransport vor, deren variable Transportkosten sich gegenseitig verhalten mögen wie 8:2:1, so müssten die Basen der Sektionen, auf deren Grenze Schubkarrentransport stattfindet, 8 Mal, die auf deren Grenzen Pferdewagentransport stattfindet, 2 Mal bei Bestimmung der Differenz $P, Q,$ in Addition oder Subtraction gebracht werden. Denn die darüber liegenden Flächen, mithin auch die den Sektionslängen proportionalen Flächenelemente, welche bei Bestimmung der zweckmässigsten Lage der Abgleichungslinie in Betracht kommen, müssen mit diesen Coefficienten multiplicirt werden, um gleiche Kosten wie die Eisenbahntransportflächen zu geben.

22. Die graphische Massenberechnung.

Wir schliessen diesen Abschnitt, indem wir als Anwendung alles Bisherigen zeigen, wie alle bei einem Erdbau vorkommenden Rechnungen graphisch ausgeführt werden können; wir haben hierzu nur nothwendig (Taf. 5) eine Zusammenstellung aller dieser Operationen, die bereits schon einzeln alle behandelt sind, kurz zu erklären.

Taf. 5_1 stellt ein Längenprofil vor. Wären die einzelnen Querprofile gegeben, so könnte man noch alle diese einzelnen Querprofile mittelst der Flächentafel (Taf. 3) auf die Basis von 10 Ctm. verwandeln. Der Einfachheit wegen haben wir vorausgesetzt, das Querprofil habe die einfache Form $A\,B\,C$ (Taf. 5_4) im Auf- und $A_1\,B_1\,C$ im Abtrag. Auf die Doppel-Basis $O\,H = 2b$ verwandelnd, erhält man dann (laut Nr. 9 S. 33) die Parabel $O\,O,\ O_{,,}$ zur Verwandlungscurve, und $O,\ X,$ und $O_{,,}\ X_{,,}$ als Abscissenaxen für den Auf- und Abtrag, wo jeder Profilhöhe oder Tiefe die Ordinate y der Parabel als Flächeninhalt so entspricht, dass derselbe $= b\,y$ ist.

Werden alle diese y im Längenprofil (Taf. 5_1) vom Bahnenniveau aus je auf dem entsprechenden Profil aufgetragen, so erhält man das ————te Profil. Der Flächeninhalt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten desselben ist gleich der mittlern Ordinate, multiplicirt mit der Entfernung der Profile, oder weil die mittlere Ordinate

auch der mittlern Querschnittsfläche proportional ist, dem Cubikinhalt der Masse zwischen den Profilen proportional, den man selbst erhält, wenn dieser Flächeninhalt mit b multiplicirt wird. Will man bei dieser Reduction den Fehler berücksichtigen, den man bei Multiplication der mittleren Fläche mit der Entfernung begeht, so kann das Fehlerdreieck von den zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten abgezogen werden.

Verwandelt man alle diese Flächen in Dreiecke der constanten Höhe h, so sind die Basen den Massen proportional, z. B. bei dem Abtrag nach V^d, die Länge $O_{„}\,1,\ 1\,2,\ 2\,3$ etc. den Abträgen zwischen $V^d - {}^e$; ${}^c - VI^a$; ${}^a - {}^b$ etc. so proportional, dass man diese Abträge durch Multiplication der entsprechenden Linien mit der constanten Fläche bh erhält. Wegen der Grösse des letzten Abtrags wurde dieser auf die Höhe $2h$ verwandelt, dafür müssen aber auch dessen Basen dann überall doppelt gerechnet werden. Greift man die Totallänge $O_{„}\,5$ mit einem Maassstab ab, dessen Eintheilungen mit bhmal dem Preis der Förderungskosten mehr dem Preis der constanten Transportkosten bezeichnet sind, so erhält man unmittelbar diesen Theil der Kosten für den Abtrag nach V^d. Dass man mit gehöriger Ausscheidung hierbei auch noch verschiedene Erd- und Transportarten, d. h. verschiedene Förderungs- und Transportkosten berücksichtigen kann, braucht wohl nicht erst auseinandergesetzt zu werden.

Dieselben Längen auf der Verticalen (V^d in Taf. 5_2) aufgetragen, geben im Massennivellement die Höhendifferenzen der einzelnen Profilpunkte, und die Flächen dieses den variablen Theil der Transportkosten, den man durch Umfahren mit dem Planimeter und durch Multiplication der erhaltenen Fläche mit bh mal dem Preis dieser Kosten ermitteln kann.

23. Zusammenhang der Linien mit Flächen, Körpern, Momenten.

Wir haben an diesem Beispiel gezeigt, wie nach Verwandlung der Flächen auf eine bestimmte Basis die Flächen gewissen Linien proportional sind, die mit andern Linien verbunden werden können und Flächen geben, die Körpern proportional sind; wie dann die letztern Flächen wiederum auf eine Basis reducirt werden können und Linien geben, die Körpern proportional sind; und die, mit

andern Linien zusammengesetzt, Flächen geben, die statischen Momenten oder Producten von Linien mit Körpern proportional sind, deren entsprechende Flächen wiederum verwandelt werden könnten u. s. f.

Also schon auf diese Weise könnten statische Momente, und weiter gehend auch Trägheitsmomente etc. graphisch bestimmt werden, doch giebt es Formen, die sich hiezu besser eignen und die wir im nächsten Abschnitt behandeln werden.

ZWEITER ABSCHNITT.

DIE GRAPHISCHE STATIK.

ERSTES KAPITEL.

Zusammensetzung von Kräften die auf einen Punkt oder in einer Ebene wirken.

---

24. Zusammensetzung von Kräften die auf einen Punkt wirken.

Wir entnehmen der Statik die beiden folgenden Sätze bezüglich der Zusammensetzung mehrerer auf einen Punkt wirkender Kräfte.

Die Kräfte können durch Linien dargestellt werden, setzen sich wie Linien (Nr. 1 S. 4) zusammen, und die Mittelkraft mehrerer auf einen Punkt wirkender Kräfte geht ebenfalls durch diesen Punkt.

Werden also die auf den Punkt O (Fig. 4 S. 4) wirkenden Kräfte in Richtung und in Grösse durch die Linien $l_1\ l_2\ l_3 \ldots . l_n$ dargestellt, so wird auf dieselbe Weise die Mittelkraft der $2, 3 \ldots . n$ ersten durch die Linien $O2\ O3\ On$ also durch die Summe jener Linien dargestellt, und alles über die Addition und Subtraction der Linien und namentlich ihren Sinn Gesagte gilt auch von Kräften, und wir haben hier über diese Zusammensetzung selbst nichts mehr beizufügen. Wir werden also die Kräfte auf dieselbe Weise mit Linien und Pfeilen bezeichnen. Ist die Kraft im Texte durch die Zeichen ihrer Endpunkte auszudrücken, so soll die Auf-

einanderfolge der Zeichen die Richtung der Kraft in der Art ausdrücken, dass die Spitze des Pfeils gegen das letzte Zeichen gekehrt ist. Die Kraft

$$\overrightarrow{AB}$$

ist also genau das Entgegengesetzte der Kraft $\overrightarrow{BA}$.

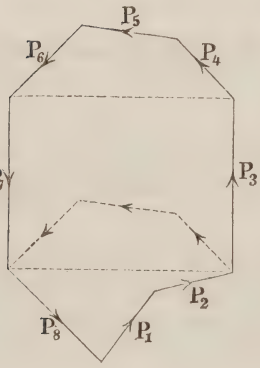
Bilden mehrere auf einen Punkt wirkende Kräfte einen geschlossenen Kräftezug und haben alle Pfeile dieselbe Richtung, so ist ihre Mittelkraft $= 0$ und alle Kräfte sind im Gleichgewicht.

Hat in einem geschlossenen Kräftezug ein Pfeil eine allen andern entgegengesetzte Richtung, so ist die Kraft, die ihn trägt, als Mittelkraft aller übrigen zu betrachten.

Haben mehrere Kräfte eines geschlossenen Zuges entgegengesetzte Richtungen, so haben alle Kräfte gleicher Richtung auch die gleiche Mittelkraft (Fig. 5 S. 6).

Kommen in einem Zug (Fig. 60) zwei Kräfte P_3 und P_7 gleicher Grösse aber genau entgegengesetzter Richtung, so kann der ganze Zug $P_{4\,5\,6}$ zwischen diesen Kräften parallel mit sich selbst an den andern Endpunkt von P_3 und P_7 versetzt werden, und die Gleichgewichtsverhältnisse der übrigen Kräfte bleiben dieselben wie früher. Diese beiden Kräfte heben sich demnach auf, ohne die Gleichgewichtsverhältnisse der übrigen zu stören. Zu demselben Resultat gelangt man auch, wenn man die beiden Kräfte P_3 und P_7 unmittelbar aufeinander folgen lässt. Kurz, es ist Alles über die Addition und Subtraction der Linien im Raum Gesagte, auch von Kräften die auf einen Punkt wirken gültig, sobald sie durch Linien dargestellt sind.

Fig. 60.



25. Zusammensetzung beliebiger Kräfte in der Ebene.

Es sei die Mittelkraft der Kräfte $P_1\,P_2 \ldots P_9$, die in Taf. 4_4 in Richtung und Lage durch die Linien P_1, $2\;2_{,,}$, $3\;3_1$, $4\;4_1$ etc., wo die Zahlen als Indices von P betrachtet werden, gegeben sind, zu bestimmen.

Man verlängere P_1 bis zum Durchschnittspunkt 2 mit der Kraft P_2, setze dann nach den oben gegebenen Regeln P_1 mit P_2 zu $P_{1\,2}$ der Mittelkraft von P_1 und P_2 zusammen. Diese Mittelkraft $P_{1\,2}$ der beiden ersten Kräfte verlängere man bis zum Schnitt 3 mit P_3, setze von 3 ausgehend $P_{1\,2}$ mit P_3 zusammen, so erhält man die Mittelkraft $P_{1\,2\,3}$; diese kann wiederum bis P_4 verlängert werden und so fort, bis alle vorhandenen Kräfte zu einer Mittelkraft vereinigt sind.

Da es technisch sehr leicht ist, Parallele zu ziehen, so ist es zweckmässig, die Zusammensetzung der Kräfte selbst in einer besondern Figur (Taf. 4_5) vorzunehmen. Trägt man nämlich von einem beliebigen Punkt O aus in Richtung und Grösse die Kraft P_1 (1) auf und fügt zu dieser die Kraft P_2 (2), so ist das Dreieck, das von O aus die Kraft 2 projicirt, mit dem Dreieck $P_1\,P_2\,P_{1\,2}$ (Taf. 4_4) congruent; die Linie 2 3, die man durch 2 parallel zu O (2 3) der Taf. 4_5 zieht, ist daher die Lage der Mittelkraft, während die Linie O (2 3) (Taf. 4_5) die Richtung und Grösse der Mittelkraft ist. Fügt man (in Taf. 4_5) die Kraft 3 zu (1 2), so ist O (3 4) die Mittelkraft von 1 2 3, in Richtung und Grösse; die Parallele 3 4, die man in Taf. 4_4 zu ihr zieht, ist ihre Lage, und so fortfahrend erhält man der Reihe nach die Mittelkraft von (1 2) (1 2 3); (1 2 3 4) .... .. (1 2 3 ... 9) in Richtung und Grösse als Strahl der Taf. 4_5 und in Richtung und Lage als Seite des Zuges, der in Taf. 4_4 die einzelnen Kräfte mit einander verbindet. Da Fig. 4_5 identisch ist mit der Figur, die man erhalten würde wenn alle Kräfte auf einen Punkt wirkten, so geht hieraus hervor, dass durch Aenderung der Lage der einzelnen Kräfte nichts an der Richtung und Grösse geändert werde und diese dieselben sind, als ob alle Kräfte auf einen Punkt wirkten.

26. Seilpolygon oder Drucklinie und Kräftepolygon.

Da in Folge der Anordnung der Taf. 4_4 alle Strecken des Zuges gespannt werden, so würde zur starren Verbindung der Kräfte 1 ... 10 ein Seil, auf das alle diese Kräfte wirkten, genügen. Es wird daher häufig dieser Zug der Mittellinien ein Seilpolygon genannt. In der Gewölbetheorie, wo alle Seiten des Polygons gepresst sind, heisst es mitunter auch die Drucklinie. Wir werden beide Ausdrücke gebrauchen, je nachdem die meisten

Polygonseiten gespannt oder gepresst sind. Wir werden also auch den Zug 2 3_1 4_1 .... 10_1 (Taf. 4_4) ein Seilpolygon nennen, trotzdem, dass die Seite 7_1 8_1 gedrückt ist. Um aber zu ermitteln, ob eine Polygonseite gepresst oder gespannt sei, zerlege man eine der nächstliegenden Kräfte in ihre Seitenkräfte nach der Richtung der Polygonseiten; ist nun die eine dieser Seitenkräfte gegen den folgenden Eckpunkt gekehrt, so ist die Polygonseite, die man sich zerschnitten denken kann, gedrückt, zieht sie dagegen vom folgenden Eckpunkt weg, so ist sie gespannt.

Auf Taf. 4_4 wurden zwischen 7 und 8 und 7_1 und 8_1 Schnitte angedeutet und Richtungen der Mittelkraft der auf jeder Seite wirkenden Kräfte durch einen Pfeil angegeben; man sieht, die Polygonseite 7 8 ist gespannt, die Seite 7_1 8_1 dagegen gedrückt.

Zum Unterschied des Seil- oder Druckpolygons werden wir die Hülfsfigur (Taf. 4_5), welche die Richtung und Grösse der Kräfte giebt, das Kräftepolygon nennen.

Um beide Polygone unmittelbar auf einander beziehen zu können, ist es wohl am zweckmässigsten, wie es in Taf. $4_{4\,5}$ geschehen ist, die Angriffspunkte der Kräfte im Seilpolygon, also dessen Ecken, und die Kräfte selbst im Kräftepolygon, also dessen Seiten, mit demselben Zeichen, hier dem Index der Kraft, zu versehen. Folgen dann mehrere parallele Kräfte, wie 4 5 6 7 auf einander, deren Richtungen im Kräftepolygon also zusammenfallen, so kann je nach Umständen eine der Bezeichnungsarten (Fig. 7, 8 und 9 Seite 7) gewählt werden. Ist dann das Kräftepolygon vorerst aufgetragen und also bezeichnet worden, so kann das Seilpolygon ganz mechanisch nach demselben construirt werden, indem man dessen Seiten 2 3, 3 4, 4 5 .... zwischen den entsprechenden Kräften nach einander parallel zu den Strahlen O(2 3, 3 4, 4 5 ...) zieht.

27. Die Mittelkraft mehrerer aufeinanderfolgender Kräfte.

Die Mittelkraft mehrerer aufeinanderfolgender Kräfte geht immer durch den Schnittpunkt ihrer äussersten Polygonseiten.

Die Mittelkraft der Kräfte 2 und 3 (Taf. 4_4) z. B. geht erstens durch den Schnittpunkt 3_1 derselben, und ist zweitens parallel zum Strahl O_1 (3 4), der im Kräftepolygon (Taf. 4_5) die Kräfte 2 und 3 unterspannt. Nun läuft aber die Diagonale 3_1 (3 4) (Taf. 4_4)

parallel zur Richtung der Mittelkraft (2 3) (Taf. 4_3) weil beide als sechste Seiten der zwei Vierecke 2 (3 4) 3 3_1 (Taf. 4_4) und O (1 2) (2 3) (3 4), von denen schon je zwei Paar gegenüberliegende Seiten und die 5. Seiten parallel liegen, ebenfalls parallel sein müssen. Es sind nämlich in beiden Vierecken die Richtungen der 2 Kräfte 2 und 3, und die 3 aufeinanderfolgenden Seilpolygonseiten 1 2 (3 4), 2 3, (3 4) 3 4 den drei Strahlen O (1 2, 2 3, 3 4) parallel. Mithin fällt die Linie 3_1 (3 4) des Seilpolygons mit der Lage der Mittelkraft 2 3 zusammen, und geht durch den Schnittpunkt (3 4) der Seilpolygonseiten 1 2 vor 2 und 3 4 nach 3.

Hieraus folgt auch, dass es ganz einerlei ist, ob man nach einander die Kräfte 2 und 3, oder ob man unmittelbar die Mittelkraft 2 3 mit 1 zusammensetzt.

Verlängert man (Taf. 4_4) die Kraft (2 3) bis zur Kraft 4 in 4_1 so geht die Mittelkraft von (2 3) und 4 oder die Kraft (2 3 4) durch diesen Punkt 4_1 und auf dieselbe Weise, wie oben bewiesen wurde, dass die Mittelkraft (2 3) durch den Schnitt (3 4) der Polygonseiten vor 2 und nach 3 gehe, kann auch bewiesen werden, dass die Mittelkraft von (2 3) und 4 durch den Schnitt (4 5) der Polygonseite 1 (3 4) vor der Kraft (2 3) mit der Seite 4 5 nach 4 gehe. Mithin ist die Linie 4_1 (4 5) die Mittelkraft der Kräfte (2 3 4). Auf dieselbe Weise fortfahrend kann man beweisen, dass die Schnittpunkte (5 6) (6 7) (7 8) etc. der Polygonseite 1 2 vor der Kraft 2 mit den gleichbezeichneten Polygonseiten nach den Kräften 5, 6, 7, etc. Punkte der Mittelkraft der Kräfte (2 ... 5), (2 ... 6), (2 ... 7) sind. Benutzt man diese Schnittpunkte in der bereits begonnenen Weise, zur Construction des mit der Kraft 2 beginnenden Polygons $2\,3_1\,4_1\,5_1 \ldots . 9_1$, so erhält man die Lage dieser Mittelkräfte, welche gleiche Richtungen mit den Strahlen O_1 (2 3, 3 4, 4 5 ...) (Taf. 4_3) des mit dem Endpunkt O_1 der Kraft 2 zusammenfallenden Büschels haben müssen.

Betrachtet man den Inbegriff aller Seilpolygonseiten als Strahlenbüschel, so können die zuletzt angedeuteten Beziehungen der einzelnen Figuren auch also geometrisch ausgedrückt werden:

Die Strahlenbüschel 1 2 3 4 ... und $2\,3_1\,4_1 \ldots .$ haben den Strahl 1 2 entsprechend gemein.

Ausserdem hat der erste Büschel, mit dem Büschel erster Ordnung O und der zweite mit dem Büschel erster Ordnung O_1 der Taf. 4_3 die ∞ ferne Gerade entsprechend gemein. Es ist

also durch ein solches Seil- und Kräftepolygon die Mittelkraft beliebiger aufeinanderfolgender Kräfte vollständig bestimmt; der Schnitt der äusseren Polygonseiten giebt einen Punkt, und im Kräftepolygon die Linie, welche sie alle unterspannt, die Grösse und Richtung der Mittelkraft. Da ferner jede solche Mittelkraft im Kräftepolygon mit dem Pol *O* (Taf. 4_5) ein Dreieck bildet, dessen beide Schenkel in Richtung und Grösse die Spannungen der äussern Polygonseiten darstellen, so kann die Mittelkraft auch als Mittelkraft dieser Spannungen, mit gehöriger Berücksichtigung des Sinnes der Pfeile, betrachtet werden.

28. Aenderung der Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte.

Vertauscht man in der Zusammensetzung der Kräfte zwei aufeinanderfolgende einzelne Kräfte z. B. 2 und 3, so hat diess keinen Einfluss auf die folgenden Mittelkräfte.

Dass diess keinen Einfluss auf die Richtung und Grösse ausübe, und dass im Kräftepolygon (Taf. 4_5) die beiden Züge 1 2 3 und $1\,3_1\,2_1$ zu demselben Endpunkt und derselben Lage der Kraft 4 führen, ist schon früher (Nr. 1 S. 5) bewiesen worden. Allein auf die Lage 3 4 (Taf. 4_4), welche mit $2_{\prime\prime}$ 4 identisch ist, der Mittelkraft im Seilpolygon, kann diese Aenderung der Reihenfolge keinen Einfluss ausüben, weil diese Mittelkraft durch den Punkt (3 4) der durch den Schnitt der Polygonseite 1 2 mit der Mittelkraft (2 3) oder 3_1 (3 4) gegeben ist, gehen muss. Es führt also der Zug $1\,3_{\prime\prime}\,2_{\prime\prime}\,4\,5$ .... zu demselben Resultat, als der Zug 1 2 3 4 5 ... Auf dieselbe Weise könnte auch 2 nicht nur mit 3, sondern auch mit der Mittelkraft einer beliebigen Zahl folgender Kräfte vertauscht werden, ohne dass es auf das Endresultat einen Einfluss ausüben könnte.

Was aber von der Kraft 2 gilt, gilt auch von jeder andern Kraft. Wir können also durch Vertauschung, jede Kraft an jede beliebige Stelle in der Ordnung der Reihenfolge bringen, ohne dass diess auf das Endresultat: Grösse, Richtung und Lage der Mittelkraft, einen Einfluss ausüben kann.

Die Mittelkraft mehrerer Kräfte in der Ebene ist daher von der Ordnung ihrer Zusammensetzung ganz unabhängig.

29. Aenderung einer Kraft im Seilpolygon.

Wird in einem Seilpolygon, das also eine bestimmte Reihenfolge in der Zusammensetzung der Kräfte voraussetzt, irgend eine derselben mit einer andern Kraft vertauscht, so werden hierdurch keine der vorausgehenden, allein alle folgenden Mittelkräfte oder Seilpolygonseiten in der Weise verändert, dass sich je zwei entsprechende Polygonseiten auf der Mittelkraftslinie der beiden vertauschten Kräfte schneiden; von denen jedoch die eine in entgegengesetztem Sinne genommen werden muss.

Nehme man z. B. an (Taf. 4_6), es werde die zweite Kraft 2 mit 2_1 vertauscht, was ganz allgemein ist, weil man unter 1 die Mittelkraft aller vorausgegangenen Kräfte verstehen kann: so wird die Seite nach der $n$ten Kraft die Mittelkraft der Kräfte $(1\,2\,3\,....\,n)$ und $(1\,2_1\,3\,....\,n)$ in den beiden Polygonen sein. Will man nun direct von der erstern zur zweiten übergehen, so muss man offenbar $(1\,2\,3\,...\,n)$ mit $(-2+2_1)$ zusammensetzen, um $(1\,2_1\,3\,...\,n)$ zu erhalten. Diese drei Kräfte müssen sich daher in einem Punkte schneiden; da aber die Lage von $(-2+2_1)$ für alle Kräftecombinationen dieselbe bleibt, so schneiden sich alle entsprechenden Mittelkräfte auf der Linie, in der die Kraft $(-2+2_1)$ oder was dasselbe ist $(+2-2_1)$ wirkt.

Diese Kraft $(-2+2_1)$ geht natürlich immer durch den Schnitt A (Taf. 4_6) dieser beiden Kräfte und man erhält ihre Richtung mit Umgehung des Kräftepolygons, wenn man von diesem Punkt A aus beide in Richtung und Grösse aufträgt, in der Richtung der dritten Seite $(-2+2_1)$; denn in dem entstandenen kleinen Hülfsdreieck haben die Pfeile von 2 und 2_1 entgegengesetzte Zeichen. Die durch A zu $(-2+2_1)$ parallel laufende Linie ist also diejenige, auf welcher sich je zwei entsprechende Polygonseiten schneiden.

Trägt man auch im Kräftepolygon (Taf. 4_7) die Kraft 2_1 von 2 3 an rückwärts die Aenderung auf, so ist es klar, dass alle vorausgehenden Eckpunkte und demnach auch die Pole O und O_1 in Länge und Richtung um $(-2+2_1)$ auseinander liegen.

Aus Obigem folgt auch, dass je zwei Seilpolygone, welche dieselbe Reihenfolge von Kräften verbinden, sich auf einer gera-

den Linie schneiden, welche die Mittelkraftslinie der beiden Kräfte ist, welche in den ersten Polygonseiten wirken, vorausgesetzt, dass die eine in entgegengesetzter Richtung genommen wurde. Man kann daher ganz allgemein sagen:

Je zwei Seilpolygone, welche dieselbe Reihenfolge von Kräften mit einander verbinden, haben eine gerade Linie entsprechend gemein. Man erhält die Richtung und Lage dieser Linie, wenn man alle vorausgehenden oder folgenden nicht gemeinschaftlichen Kräfte des einen Polygons in entgegengesetzter Richtung mit den nicht gemeinschaftlichen Kräften des andern Polygons zusammensetzt.

Dass die beiden Polygone (Taf. $4_{4\,5}$) ebenfalls in diesem Satz mit inbegriffen sind, bedarf wohl kaum der Erinnerung, denn die Kraft 1 ist dort die einzige nicht gemeinschaftliche Kraft der beiden Polygone, mithin müssen sich alle entsprechenden Seiten auf ihr schneiden.

Dieser Satz ist ausserordentlich nützlich; er setzt uns in den Stand, ohne auf das Kräftepolygon zurückzugreifen, ein neues Seilpolygon zu construiren.

Zweites Kapitel.

Die projectivische Verwandtschaft zwischen dem Kräfte- und dem Seilpolygon.

30. Collineäre und reciproke Beziehungen.

Da zu jedem Kräftepolygon, es mag jede beliebige Figur bilden, ein Seilpolygon construirt werden kann und umgekehrt, so können wir mit einem derselben jedem beliebigen Linienzug, also auch einem Polygon folgen, das einer Curve zweiter Ordnung um- oder eingeschrieben ist. Es fragt sich nun aber, ob und

wann dann auch das erste Polygon eine Curve zweiter Ordnung werden kann.

Die Frage wäre beantwortet, wenn wir sagen könnten, in welchen Fällen die beiden Polygone projectivisch aufeinander bezogen werden können, denn dann müssen Kräfte- und Seilpolygon gleichzeitig Gebilde zweiter Ordnung werden.

Wollten wir die beiden Gebilde, das Kräfte- und das Seilpolygon, collineär auf einander beziehen, so müssten wir das erstere auf den Kräftebüschel, den Inbegriff aller Kräftelagen, im Seilpolygon beziehen; beide Polygone hätten dann die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein, wären ähnlich und ähnlich gelegen. Wird dann das Seilpolygon construirt, so gelangt man zur Verwandlungsfigur (Fig. 26 S. 28) in welcher $O\,1\,2_1\,3_1$ etc. das Seilpolygon vorstellen würde. Da aber die verwandelte Fläche dem Moment der Mittelkraft, also auch dem Moment einzelner Kräfte, die sie zusammensetzen, proportional ist, so gelangt man zum Schluss, dass das Moment einer beliebigen Zahl Kräfte, deren Lage im Seilpolygon dem Kräftepolygon ähnlich ist, dem Flächeninhalt dieses letztern proportional sei.

Dieses Resultat mag interessant sein, allein es führt uns nicht zum Ziel, denn die beiden Polygone $O\,1\,2_1\,3_1$ und $O\,1\,2\,3$ (Fig. 26 S. 28) sind nichts weniger als projectivisch. Wir wollen also der collineären Verwandtschaft nicht weiter nachforschen, sondern es versuchen, die Gebilde reciprok auf einander zu beziehen.

Reciprok können das Kräfte- und Seilpolygon wohl nur in der Art aufeinander bezogen werden, dass der Kraft im Kräftepolygon ihr Angriffspunkt im Seilpolygon entspreche, denn es muss doch das dieselbe Kraft Treffende mit einander in Verbindung gebracht werden.

Entspricht jeder Kraft 2, 3, 4... des Kräftepolygons (Fig. 62 S. 87) ihr Angriffspunkt 2, 3, 4... (Fig. 61 S. 87) im Seilpolygon, so entspricht auch umgekehrt jeder Seilpolygonseite 2 3, 3 4 dem Schnittpunkt zweier Kräfte 2 3, 3 4 (Fig. 62) im Kräftepolygon u. s. f. Der Bedingung endlich, dass die Strahlen O_1) 2 3, 3 4 (Fig. 62) mit 2 3, 3 4 (Fig. 61) parallel laufen sollen, können wir nur dadurch genügen, dass wir den Pol O_1 (Fig. 62) des Kräftepolygons auf die unendlich ferne Gerade des Seilpolygons (Fig. 61) so beziehen, dass beide perspectivisch liegen; jeder Strahl O_1) 2 3, 3 4 etc. des Poles O_1, schneidet dann die unendlich ferne Gerade in dem

ihm zugeordneten Punkt ∞) 2 3, 3 4 etc. des Seilpolygons, d. h. die Strahlen, welche von O_1 aus die Punkte 2 3, 3 4 projiciren, laufen mit den diesen letztern zugeordneten Seilpolygonseiten parallel, was bewirkt werden sollte.

Sind die beiden Polygone also aufeinander bezogen, so schneiden sich die Richtungslinien 2 3 4 (Fig. 61) aller Kräfte im Seilpolygon, die mit den ihnen entsprechenden Kräftepolygonseiten 2 3 4 (Fig. 62) parallel laufen, in dem Punkt O, welcher als Punkt des Seilpolygons der unendlich fernen Geraden des Kräftepolygons zugeordnet ist (diesen Satz verdanke ich Herrn Privatdocent Reye). Denn bezeichnen wir z. B. den Schnitt der Richtungslinie der Kraft 3 im Kräftepolygon mit der unendlich fernen Geraden mit U, so wird, weil laut Annahme der Büschel O_1 mit der ihm zugeordneten unendlich fernen Geraden perspectivisch liegt, dem Strahl $O_1 U$ des Kräftepolygons der Punkt U des Seilpolygons entsprechen. Mithin entspricht auch dem Punkt U des Kräftepolygons als Schnitt von $O_1 U$ mit der unendlich fernen Geraden der Strahl UO. Da aber (Fig. 62) U in 3 liegt, so muss (Fig. 61) OU durch 3 gehen. OU (Fig. 61) läuft also mit 3 (Fig. 62) parallel und giebt die Richtung und Lage der Kraft 3.

Was hier von der Kraft 3 bewiesen wurde, gilt auch von jeder andern, mithin gehen die Richtungen aller Kräfte des Seilpolygons durch den Punkt O, welcher der unendlich fernen Geraden des Kräftepolygons entspricht.

Das hier von der unendlich fernen Geraden Bewiesene gilt auch allgemein von jeder andern, so dass wenn in zwei reciproken Systemen

eine gerade Linie / ein Strahlenbüschel mit dem ihr / der ihm zugeordneten Büschel / Geraden perspectivisch liegt, so liegt sie / er auch als Gebilde des letztern Systems betrachtet, mit dem ihr / der ihm zugeordneten Büschel / Geraden des erstern perspectivisch.

Wenn also alle Kräfte eines Seilpolygons durch einen Punkt gehen, so können das Kräfte- und das Seilpolygon reciprok aufeinander bezogen werden.

Werden auf irgend einem Strahl der Büschel O oder O_1 zwei Punkte $B B_1$ (Fig. 62) angenommen, so entsprechen ihnen (Fig. 61)

Fig. 61.

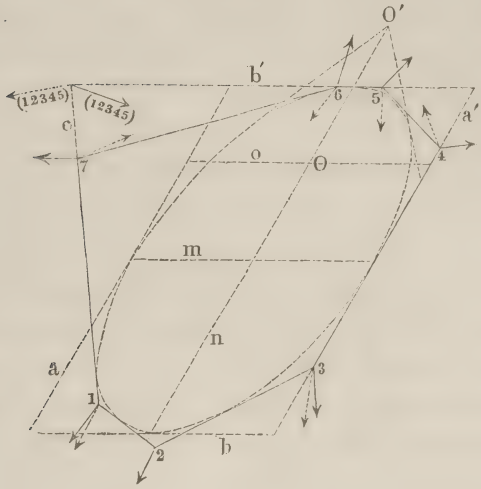
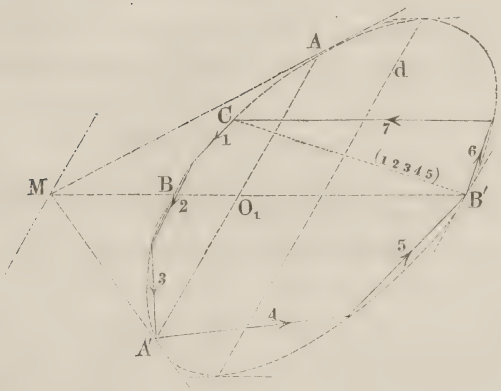


Fig. 62.



zwei zu BB_1 parallele Linien b und b_1. Da ferner das gerade Gebilde $BO_1B_1 \infty$ dem Parallelstrahlenbüschel $b \infty b_1 o$ mithin auch $b_1 o b \infty$ projectivisch ist, so sind BO_1B_1 und $b_1 o b$ ähnliche Gebilde, weil beide das unendlich ferne Element entsprechend gemein haben.

Die Entfernung irgend zweier Parallellinien von einem Pol O oder O_1 ist daher umgekehrt der Entfernung der beiden entsprechenden Punkte vom Pol des andern Polygons proportional.

Hieraus könnte nun auch geschlossen werden, dass alle

solche Seil- oder Kräftepolygone, welche zu einem gegebenen Kräfte- oder Seilpolygone construirt werden können, ähnliche Figuren seien, wenn es nicht schon unmittelbar daraus hervorginge, dass alle diese Figuren die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein haben.

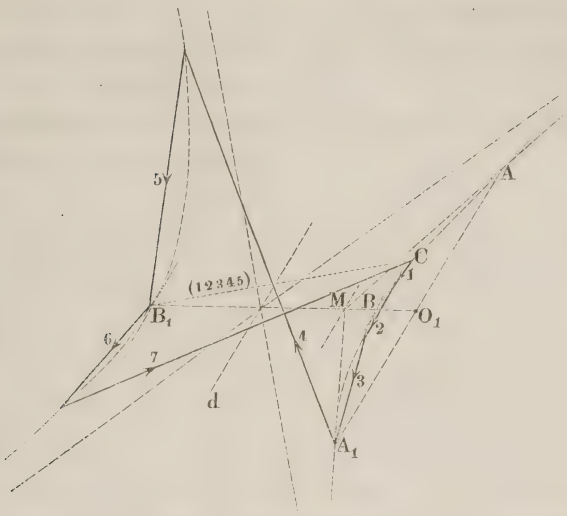
Dass die Mittelkraft einer beliebigen Zahl aufeinanderfolgender Kräfte durch den Schnitt ihrer äussern Polygonseiten gehe, wurde in Nr. 27 ganz allgemein bewiesen; es lässt sich aber auch speciell für den vorliegenden Fall direct aus der Reciprocität des Kräfte- und Seilpolygons ableiten. Die Mittelkraft (1 2 3 4 5) wird im Kräftepolygon (Fig. 62 S. 87) durch die Linie CB' dargestellt. Den Punkten C und B' als Schnitten der Seiten 1 7 und 5 6 entsprechen im Seilpolygon (Fig. 61 S. 87) die Linien c und b' als Verbindungslinien der Punkte 1 7 und 5 6. Mithin entspricht der Verbindungslinie der Punkte CB' der Schnitt der Seiten cb', und dem unendlich fernen Punkt in CB' die Verbindungslinie von O mit cb'. $O(cb')$ (Fig. 61) läuft demnach mit CB' (Fig. 62) parallel, ist also in Richtung und Lage die Mittelkraft von (1 2 3 4 5), die durch den Schnitt der ausserhalb 1 und 5 liegenden Polygonseiten c und b' geht.

31. Das Kräfte- und das Seilpolygon in Verbindung mit Curven zweiter Ordnung.

Wenn die Richtungslinien aller Kräfte durch einen Punkt gehen, und die beiden Polygone reciprok liegen, so muss, sobald das eine einer Curve zweiter Ordnung um- oder einbeschrieben ist, das andere einer Curve zweiter Ordnung ein- oder umbeschrieben sein.

Ist z. B. das Seilpolygon (Fig. 61) einer Ellipse umschrieben, so ist das entsprechende Kräftepolygon einer Ellipse (Fig. 62) oder einer Hyperbel (Fig. 63) eingeschrieben, je nachdem die Kräfte (Fig. 61) durch einen Punkt O im Innern oder O' ausserhalb der Curve gehen. Die durch den Punkt O (Fig. 61) gehenden und dem Kräftepolygon (Fig. 62) entsprechenden Kräfte sind ausgezogen, die durch den Punkt O' gehenden und dem Polygon (Fig. 63) entsprechenden dagegen sind punktirt. Wür-

Fig. 63.



den die Kräfte (Fig. 61) durch einen Punkt der Curve selbst gehen, so wäre das entsprechende Seilpolygon eine Parabel.

Denn da diesen Kräftepolen O oder O' (Fig. 61) die unendlich fernen Geraden von Fig. 62 und 63 entsprechen, und ferner den von der Curve (Fig. 61) eingeschlossenen Punkten, die von der Curve (Fig. 62 und 63) ausgeschlossenen Linien entsprechen, so ist die unendlich ferne Gerade von der Curve ausgeschlossen, diese also eine Ellipse (Fig. 62), wenn der Pol O (Fig. 61) im Innern liegt; liegt er ausserhalb in O', so schneidet die unendlich ferne Gerade die andere Curve und diese ist eine Hyperbel (Fig. 63); ist endlich O ein Punkt der Curve, so ist die unendlich ferne Gerade eine Tangente der andern Curve und diese eine Parabel. Diesen letzten Fall fanden wir nicht nöthig besonders zu zeichnen.

Die weitern Beziehungen, die daraus folgen, dass die Pole der Polygone den unendlich fernen Geraden entsprechen, stellen wir in Folgendem einander gegenüber; hierbei werden wir jede Beziehung nur einmal aussprechen, bemerken jedoch, dass alles, was von der einen Figur (dem Pol O der Fig. 61 z. B.) gesagt wird, wörtlich auch von den andern Figuren, den Polen O_1 (Fig. 62 und Fig. 63) gilt.

Es entspricht:

Fig. 62 und Fig. 63.	Fig. 61.
Jedem Strahl des Büschels O_1	Der in ihm liegende unendlich ferne Punkt U.
Zwei Curvenpunkten desselben.	Die durch U gehenden also zum Strahl von O_1 parallelen Tangenten.
Den Tangenten an diese.	Die Berührungspunkte dieser.
Ihrem Schnittpunkt.	Der sie verbindende Durchmesser.
Der Polaren M von O_1.	Der Mittelpunkt der Curve.
Zwei conjugirten Punkten dieser Polaren.	Zwei conjugirte Durchmesser, welche mit den Strahlen parallel laufen, welche die Punkte der Polaren aus O_1 projiciren.
Den Endpunkten des durch O_1 gehenden Durchmessers BB'.	Die zu BB' parallelen Tangenten bb'.
Den Endpunkten der BB' conjugirten Sehne AO_1A' welche mit dem BB' conjugirten Durchmesser parallel läuft.	Die zu AA' parallelen Tangenten aa'.
Den unendlich fernen Punkten der Sehnen AB', BA', $A'B$ und BA.	Die Strahlen, welche von O oder O' aus die Punkte ab', $b'a'$ $a'b$ und ba projiciren, und demnach mit den entsprechenden Sehnen parallel laufen.
Den in den Asymptoten liegenden unendlich fernen Punkten der Curven.	Die zu den Asymptoten parallelen Tangenten durch O'.
Den beiden durch die Asymptoten getrennten Armen der Curve.	Die durch die Berührungspunkte dieser Tangenten getrennten Theile der Curve.
Tief in die Curve schneidenden Sehnen 4, 7.	Weit ausspringende Winkel 4, 7.

Ohne einander gegenübergestellt werden zu können, folgen noch aus Obigem die Sätze: dass die Richtungen der zwei durch

O_1 und O gehenden Durchmesser in beiden Curven in Bezug auf ihren Mittelpunkt conjugirt sind.

Da AB mit dem Strahl $O(ab)$ dann noch AO_1 mit dem Durchmesser n und O_1B mit b parallel läuft, so folgt, dass das Dreieck AO_1B dem Dreieck $O(ab)(bn)$ ähnlich sei. Eben so auch die Dreiecke

$$\frac{BO_1A'}{O(ba')(bn)}; \quad \frac{A'O_1B'}{O(a'b')(b'n)} \text{ und } \frac{B'O_1A}{O(b'a)\ b'n)}$$

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke könnte noch bewiesen werden, dass die Segmente der durch O und O_1 getheilten Durchmesser sich umgekehrt proportional seien, wenn diess nicht schon in Nr. 30 S. 87 bewiesen worden wäre.

Auch sind die Dreiecke AO_1M und MO_1A_1 den Dreiecken $O(am)$ (mn) und $O(a'm)$ (mn) ähnlich. Mittelst dieser Aehnlichkeiten, von denen immer die eine oder die andere ausführbar ist, wird man jederzeit rasch vom Pol aus zu zwei conjugirten Durchmessern der einen Curve gelangen, wenn die andere gegeben ist, und so die Curve leicht construiren können.

Bei der Construction der Polygone kann endlich noch das Folgende von Nutzen sein: da conjugirte Strahlen des einen Poles mit conjugirten Durchmessern der andern Curve parallel laufen, Gebilde von conjugirten Elementen aber stets projectivisch sind, so sind auch die Strahlenbüschel projectivisch, welche vom einen Pol und vom Mittelpunkt der andern Curve aus, die Punkte der einen Curve und die Berührungspunkte der entsprechenden Tangenten der andern Curve projiciren. Diese beiden Strahlenbüschel werden von je zwei Linien, deren Richtungen conjugirt sind, in ähnlichen Gebilden geschnitten, denn in beiden Gebilden entsprechen sich dann die unendlich fernen Punkte.

Als besondere Lagen des Poles wollen wir noch untersuchen, wie sich die Curven verhalten, wenn der Pol in ihrem Mittelpunkt, auf dem Umfang oder im Unendlichen liegt.

32. Der Mittelpunkt der Curve als Pol der Polygone.

Liegt der Pol der einen Curve im Mittelpunkt, so liegt er auch in jedem Durchmesser, mithin auch der Pol der andern Curve in dem jeder Richtung conjugirten Durchmesser, d. h. ebenfalls im Mittelpunkt der Curve.

Da jetzt die Polare des Poles mit der unendlich fernen Geraden zusammenfällt, und zwei conjugirte Punkte derselben zwei conjugirten Durchmessern der andern Curve entsprechen, so sind je zwei Durchmesser der einen Curve, welche mit conjugirten Durchmessern der andern parallel laufen, selbst conjugirt. Die beiden Curven sind also immer gleichzeitig Ellipsen oder Hyperbeln; erstere sind sich ähnlich, letztere liegen in den Supplementwinkeln paralleler Asymptoten.

Wird berücksichtigt, dass alle Kräfte- und Seilpolygone, welche zu einem Seil- oder Kräftepolygon construirt werden können, ähnlich sind, so folgt, dass bei gehöriger Aenderung des Maassstabes der Linien oder Kräfte dieselbe Ellipse, welche dem einen Polygon umschrieben ist, auch dem andern einbeschrieben sein kann.

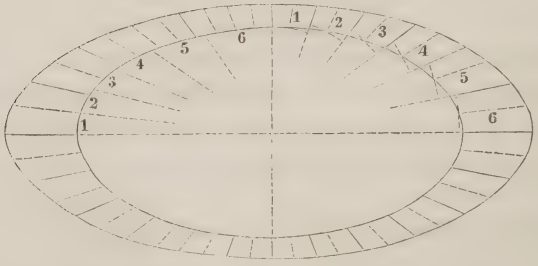
Von der Hyperbel gilt dasselbe, sobald man sich den offenen Asymptotenwinkel durch die Supplementhyperbel ausgefüllt denkt.

In diesen Fällen ist dann die Spannung in jeder Seilpolygonseite (wir denken uns das Seilpolygon um-, das Kräftepolygon einbeschrieben) gleich dem halben mit ihr parallel laufenden Durchmesser.

Jede Kraft wird dann durch die Sehne der Ellipse dargestellt, welche die Endpunkte der Durchmesser verbindet, die mit den Seilpolygonseiten parallel laufen, durch deren Schnittpunkt die Kraft geht.

Fig. 64 soll diese Verhältnisse anschaulich machen; sie stellt

Fig. 64.



das Gleichgewicht von central wirkenden Pressungen oder Spannungen dar, welche über eine elliptische Hülle vertheilt sind.

Wir theilten den Umfang der Ellipse der innern Curve hier

in Bogenstücke, welche senkrecht auf die Richtung der Kräfte, also in der Richtung der kleinen punktirten Bogen gemessen, einander gleich sind. Denken wir uns dann die Intensität der auf die Ellipse wirkenden Kräfte durch den Inhalt der Lamellen dargestellt, welche über jedem Bogentheil stehen, so muss die mittlere Höhe, 1 , 2 , 3 ... dieser Lamellen den Sehnen 1 , 2 , 3 .. (resp. Bogen) der Ellipse proportional (hier gleich) sein, welche die Endpunkte der Durchmesser verbinden, die den Durchmessern conjugirt sind, zwischen denen die Lamelle liegt. Streng genommen sollten diese Höhen halb unter, halb über den, die mittlere Breite darstellenden Bogen geschlagen werden; es geschah nicht, weil die Figur zu ungefällig geworden wäre.

Die Spannung der elliptischen Hülle am Ende irgend eines Durchmessers endlich, ist gleich der Länge des halben conjugirten Durchmessers.

Wird die Ellipse ein Kreis, so werden die gleich breiten Lamellen conjugirter Sehnen oder Bogenstücke selbst gleich lang und zwar gleich der Breite der Lamelle, und die Spannungen in allen Punkten der Kreishülle werden gleich dem constanten Radius. In diesem Fall, der bei dem Druck von Flüssigkeiten auf die Wände kreisrunder Gefässe häufig vorkommt, verhält sich also der Druck auf irgend einen Theil des Bogenumfanges zur Spannung im Bogen, wie die Länge dieses Bogentheiles zum Radius.

33. Ein Punkt der Curve als Pol des einen Polygons.

In diesem Fall wird, wie wir schon bemerkten, die andere Curve eine Parabel, weil die unendlich ferne Gerade, welche dem Pol entspricht, eine Tangente der Curve sein muss. Der Pol dieser Parabel liegt dann in oder ausserhalb derselben, je nachdem die erste Curve eine Ellipse oder Hyperbel ist.

Wir glaubten keinen dieser Fälle besonders zeichnen zu müssen, doch wird man sich das gegenseitige Verhältniss der beiden Curven im ersten Fall leicht vorstellen können, wenn man sich (Fig. 61 S. 87) den Pol in $n\,b'$, und (Fig. 63 S. 89) den Scheitel B_1 auf $O_1\,B_1$ in's Unendliche gerückt denkt. Die Parabel nimmt dann die Stelle des Armes $A\,B\,A_1$ ein. Es versteht sich von selbst, dass keine Seilpolygonseite wie 5 6 durch den Pol gehen darf,

weil sonst die an ihr wirkenden Kräfte 5 und 6 unendlich gross werden würden.

Noch einfacher ist das Verhältniss, wenn der eine Pol der Punkt einer Hyperbel ist; in diesem Fall ist die Parabel einem Dreieck einbeschrieben, dessen drei Seiten mit den Asymptoten und mit dem durch den Pol gehenden Durchmesser parallel laufen. Die Ecke, welche diesem letztern gegenüberliegt, ist der Pol der Parabel und die Linie, welche ihn mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite verbindet, ein Durchmesser derselben.

In projectivischer Beziehung ist bemerkenswerth, dass jetzt der Pol mit allen Gebilden der Curve perspectivisch liegt, weil er ein Punkt der Curve ist. Einer beliebigen Zahl Punkte der Curve sind daher projectivisch:

die Tangenten an diesen Punkten,
der Strahlenbüschel, welcher sie vom Pol aus projicirt,
die Schnitte ihrer Tangenten mit irgend einer Tangente,
der Strahlenbüschel, welcher diese Schnitte von irgend einem Punkt, also auch vom Pol aus projicirt,
die entsprechenden Punkte und Tangenten der Parabel und die mit ihnen perspectivisch liegenden Gebilde.

Insbesondere erzeugen noch ähnliche Gebilde:

der Schnitt aller Tangenten mit der zur Poltangente parallelen Tangente,
der Schnitt des Strahlenbüschels, welcher vom Pol aus die Berührungspunkte projicirt mit derselben Tangente,
die Schnitte der entsprechenden Paralleltangenten mit irgend einer dieser Tangenten,
der Parallelstrahlenbüschel, welcher die entsprechenden Punkte der Parabel projicirt,
der Strahlenbüschel, welcher von irgend einem Punkt der Parabel aus dieselben Punkte auf eine zur Poltangente parallelen Linie projicirt.

34. Ein unendlich ferner Punkt als Pol des einen Polygons.

Sobald der Pol des Seilpolygons z. B. im Unendlichen liegt, so wird das Kräftepolygon zu einer geraden Linie, wie es sich von selbst versteht, weil dann alle Kräfte gleiche Richtung haben.

Diese gerade Linie hat man als Inbegriff zweier zusammenfallenden Linien zu betrachten; denn zieht man durch den Pol des Kräftepolygons eine gerade Linie nach einem Punkt A desselben und zwei parallele Tangenten an die Curve des Seilpolygons die wir mit a und b bezeichnen wollen, so muss nach Nr. 30 S. 87 $ab\,\infty$, BAO ähnlich sein, wenn wir mit O den Pol des Kräftepolygons bezeichnen; sind nun $a\,\infty$ und $b\,\infty$ unendliche Strecken, AO dagegen endlich, so kann die Aehnlichkeit nur bestehen, wenn A und B zusammenfallen; jeder Punkt der geraden Linie, welche das Kräftepolygon darstellt, ist daher ein Doppelpunkt und dieses reducirt sich auf eine und nicht etwa auf zwei gerade Linien, die man sich symmetrisch zu O gelegen denken möchte.

Ist nun die Curve des einen Polygons eine Ellipse oder eine Parabel, so ist die das andere Polygon darstellende Gerade unbegrenzt; denn zieht man durch den Pol O Parallelen zu allen möglichen Tangenten der Ellipse, so erfüllen sie den ganzen Strahlenbüschel O. Ist dagegen die Curve des einen Polygons eine Hyperbel, so reducirt sich das andere auf eine Strecke, deren Schein vom Pol aus dem Supplement des Asymptotenwinkels gleich ist, weil die Strecke der unendlich fernen Geraden, welche in der Hyperbel (zwischen den Asymptoten) liegt, von keiner Tangente geschnitten werden kann.

Die Strecke selbst ist eine unendliche zusammenhängende, wenn der unendlich ferne Pol in der Hyperbel liegt, weil dann die unendlich ferne Strecke im Supplement des Asymptotenwinkels nicht durch ihn getrennt wird; dagegen eine durch das Unendliche laufende, aus zwei getrennten Armen bestehende, wenn der unendlich ferne Pol ausserhalb der Hyperbel liegt, weil dieser dann die unendlich ferne Gerade im Supplement des Asymptotenwinkels in zwei Strecken trennt.

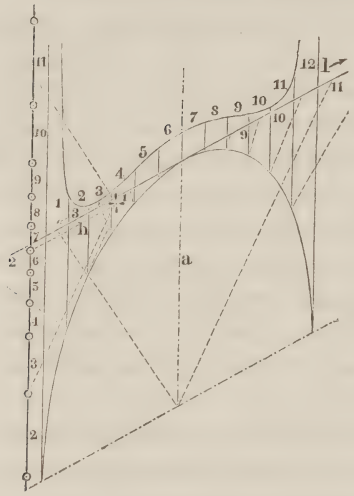
Liegt endlich der unendlich ferne Pol auf einer Hyperbel, so reducirt sich die Gerade des andern Polygons auf eine Linie, die parallel zur Asymptote läuft; die im Supplement des Asymptotenwinkels liegende Strecke des Kräftepolygons wird daher vom unendlich fernen, und von einem endlichen Punkt begrenzt. Ausserdem finden noch alle Nr. 33 S. 94 aufgezählten projectivischen Beziehungen statt.

Zur Construction der einzelnen Punkte des Kräftepolygons selbst ist es wohl am einfachsten, das Ende Nr. 31 S. 91 er-

wähnte Verhältniss zu benutzen, wonach das Kräftepolygon jedem Schnitt des Strahlenbüschels projectivisch ist, welcher aus dem Mittelpunkt der Curve ihre einzelnen Punkte auf eine Linie projicirt, deren Richtung der Richtung der Kräfte conjugirt ist.

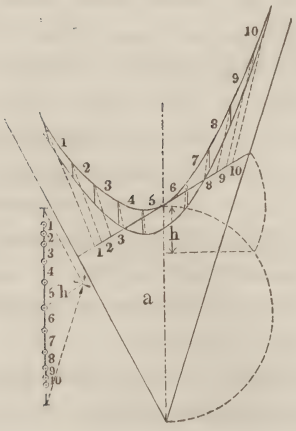
Um das eben Gesagte an zwei Beispielen zu erläutern, haben wir (Fig. 65 und Fig. 66) ein solches Kräftepolygon für eine Ellipse und eine Hyperbel, unter denen man sich ein elliptisches Gewölbe oder eine hyperbolische Kette vorstellen kann, construirt.

Fig. 65.



Wir nehmen an, die verticalen Kräfte bestehen aus über den Bogen vertheilten Belastungen und zerlegen diese in gleich breite Lamellen, dann muss die Höhe derselben den einzelnen Kräften des Kräftepolygons proportional sein, wenn ihr Flächeninhalt die Belastung darstellen soll. Diesen Kräften aber sind alle Segmente proportional, welche vom Strahlenbüschel abgeschnitten werden, der die einzelnen Curvenpunkte auf Linien projicirt, deren Richtung der der Kräfte conjugirt ist. Wir haben also die (punktirten) Strahlen bis zur Scheiteltangente gezogen, und auf dieser die Lamellenhöhe abgegriffen; die den einzelnen Lamellen zugeordneten Segmente sind da gleichartig numerirt, wo sie nicht gerade mit den entsprechenden Lamellen zusammenfallen.

Fig. 66.



Aus den Figuren geht hervor, dass die Belastungen der elliptischen Curve ins Unendliche zunehmen müssen, weil ihr Mittelpunkt in der Curve liegt, demnach Strahlen in allen Richtungen, also auch in der Richtung des

Trägers der Kräfte vorkommen. Die Kräftesegmente der hyperbolischen Kette nehmen gegen die Asymptoten zu ins Unendliche ab, weil der Mittelpunkt ausserhalb der Curve liegt und die unendlich vielen Lamellenbasen zuletzt die Richtung der Asymptote annehmen. Alle ihnen entsprechenden Segmente aber summiren sich zur endlichen zwischen den Asymptoten liegenden Strecke. Etwas Weniges vorgreifend machen wir hier darauf aufmerksam, dass bei parabolischen Curven diese Segmente weder ab- noch zunehmen und die Belastung daher eine gleichförmige wird.

Um die Pressungen und Spannungen im Bogen und in der Kette unmittelbar in Grösse und Richtung dem Kräftepolygon entnehmen zu können, hat man die Träger der Kräftesegmente nur in die Richtung der Kräfte zu bringen, um ein richtig orientirtes Kräftepolygon zu erhalten. Zur Bestimmung der Lage des Poles muss die Richtung von wenigstens 2 Strahlen bekannt sein. In Fig. 66 wurde er durch den Schnitt der 3 Strahlen, welche mit der Scheiteltangente und den beiden Asymptoten parallel laufen, bestimmt; in Fig. 65 durch den Schnitt der Strahlen, welche mit der Scheiteltangente, mit der Tangente an dem Punkt (2 3) oder mit dem (2 3) conjugirten Durchmesser und mit dem Durchmesser (2 3) parallel laufen; der Schnittpunkt dieses letztern mit dem Kräftepolygon wird im Segment 1 1 durch den Schnitt des conjugirten Durchmessers mit der Scheiteltangente bestimmt. Die Länge eines jeden Strahles giebt nun die Spannung oder Pressung im entsprechenden Bogenelement gleicher Richtung an.

Um auch noch die in der Richtung der Scheiteltangente gemessene Poldistanz h (Fig. 65) direct zu erhalten, bemerken wir, dass das Dreieck, welches dieselbe mit irgend einem Strahl (2 3) z. B. und dem Träger der Kräfte bildet, dem Dreieck ähnlich ist, welches der mit der Richtung der Kräfte parallel laufende Durchmesser a, der zum Strahl parallele, also dem entsprechenden Durchmesser (2 3) conjugirte Durchmesser und das Stück l der Scheiteltangente bilden, ähnlich ist; wird daher die Strecke l gleich a gemacht, so muss auch h gleich der entsprechenden Strecke (3 4 5 6) also auch gleich der Strecke sein, welche der conjugirte Durchmesser (hier 2 3) auf der Scheiteltangente abschneidet. Werden also vom Scheitelpunkt aus die Längen a und h, in entgegengesetzter Richtung bei der Ellipse, in gleicher Richtung bei der Hyperbel aufgetragen, so liegen ihre Endpunkte auf con-

jugirten Durchmessern. Die directe Construction dieser beiden Durchmesser führt wohl jederzeit am schnellsten zur Poldistanz h, und sie wurde Fig. 65 nur desshalb nicht ausgeführt, weil sie über den Rahmen der kleinen Figur hinausgefallen wäre.

Daraus, dass die Endpunkte der Strecken a und h auf der Scheiteltangente dem involutorischen Punktsystem angehören, welches durch den Schnitt aller conjugirten Durchmesser mit der Scheiteltangente entsteht und in dem daher der Scheitel, von dem aus a und h aufgetragen wurden, dem unendlich fernen Punkt conjugirt ist, kann noch weiter geschlossen werden, dass das Product $a\,h$ constant sei. Bei der Ellipse, wo a und h in entgegengesetzten Richtungen aufgetragen werden und daher das Punktsystem keine Ordnungspunkte hat, ist dieses Product negativ. Bei der Hyperbel dagegen, wo a und h in gleichem Sinn aufgetragen werden und wo die Schnitte der Asymptoten mit dem Träger der Kräftesegmente die Ordnungspunkte bestimmen, ist $a\,h$ gleich dem Quadrat der Entfernung dieser Punkte vom Scheitel.

Bei der Hyperbel kann man daher auch sagen: das Quadrat des halben (endlich begrenzten) Kräfteträgers ist die mittlere Proportionale zwischen a und h. Eine hieraus abgeleitete Construction ist Fig. 66 eingezeichnet, allein sie ist weitläufiger als die weiter oben angegebene Construction; dasselbe wäre auch der Fall, wenn man bei der Ellipse die mittlere Proportionale irgend zweier conjugirten Strecken und aus diesen dann h bestimmen wollte.

Schliesslich erinnern wir noch, dass je zwei Tangenten sich, als äussere Polygonseiten, auf der Mittellinie des Belastungsdruckes aller zwischen ihren Berührungspunkten vertheilten Lasten schneiden. Der Schnitt der Tangente bei 2 3 mit der Scheiteltangente 6 7, liegt auf der Mittellinie des Druckes (Verticalen durch den Schwerpunkt) den die Lamellen zwischen 2 3 und 6 7, also die Lamellen 3 4 5 6 (3 4 5 bei der Hyperbel) ausüben. Die Tangente bei (2 3) ist nur in Fig. 65 angedeutet.

35. Der unendlich ferne Punkt einer Parabel als Pol des einen Polygons.

Wir vereinigen die Ellipse und Hyperbel zur Parabel, indem wir mit dem Mittelpunkt der Curve in der Richtung der Kräfte ins Unendliche rücken.

Hierbei verweilen wir einen Moment im Mittelpunkt der Erde, bloss um zu constatiren, dass alle gleichförmig belasteten Gewölbe und Ketten als Ellipsen und Hyperbeln betrachtet werden können, deren Mittelpunkte mit dem Mittelpunkt der Erde zusammenfallen.

Denken wir uns nun, dieser liege im Unendlichen, so werden diese Curven Parabeln, durch deren unendlich fernen Punkt gleichzeitig die Richtung aller Kräfte geht. Der Strahlenbüschel derselben liegt daher perspectivisch mit der Curve, es gilt also alles in Nr. 34 S. 95 Gesagte; da endlich auch die unendlich ferne Gerade eine Tangente der Curve wird, so werden alle überhaupt vorkommenden einförmigen projectivischen Gebilde, deren bis jetzt Erwähnung geschah, ähnlich, weil in allen der unendlich ferne Punkt oder die unendlich ferne Tangente der Curve entsprechende Elemente bestimmt.

Insbesondere also sind ähnlich:

Der Parallelstrahlenbüschel, welcher in der Richtung der Kräfte (des unendlich fernen Pols) die einzelnen Parabelpunkte projicirt;

Die Segmente, in welche die Tangenten an diesen Punkten jede andere Tangente theilen;

Die Segmente, in welche die Gerade des Kräftepolygons vom Strahlenbüschel des Kräftepols getheilt wird, dessen einzelne Strahlen mit jenen Tangenten parallel laufen.

Die Parabel des Kräftepolygons hat man sich jetzt als auf zwei parallele Gerade reducirt vorzustellen, von denen eine durch den Pol der Kräfte geht, weil dieser jetzt perspectivisch, also in der Curve selbst liegt. Der Nr. 34 Seite 95 gegebene Beweis ist jetzt nicht mehr gültig, weil in den Gebilden $a\,b\,\infty$, b mit ∞ zusammenfällt, mithin wird $a\,b$ gleich $a\,\infty$, d. h. die Entfernung je zweier Curvenpunkte wird, parallel zur Richtung der Kräfte gemessen, gleich der Poldistanz.

Aus der Aehnlichkeit des durch die Curvenpunkte bestimmten Parallelstrahlenbüschels und der Segmente des Kräftepolygons folgt noch, dass, wenn erstere äquidistant sind, es auch die einzelnen Kräftesegmente sind; die Belastung aller in der Richtung irgend einer geraden Linie gemessenen gleich weit langen Strecken ist demnach auch gleich gross, die Parabel erscheint daher als die Curve der gleichmässigen Belastung.

Der Schnitt irgend zweier Parabel-Tangenten liegt immer in

der Mitte zwischen den Durchmessern ihrer Berührungspunkte; denn betrachtet man diese beiden Durchmesser als Seiten eines einer Curve zweiter Ordnung einbeschriebenen Dreiecks, so sind sie durch die Tangente ihres Schnittpunktes, hier die unendlich ferne Gerade, und durch den Schnittpunkt der beiden übrigen Tangenten harmonisch getrennt. Der Mitteldruck einer gleichmässig belasteten Strecke geht daher immer durch ihre Mitte. Hieraus folgt auch noch, dass das Aehnlichkeitsverhältniss zwischen den geraden Gebilden, welche durch den Schnitt aller Tangenten und den Parallelstrahlenbüschel aller ihrer Berührungspunkte mit irgend einer Tangente entsteht, gleich 1:2 ist.

Die hier auseinandergesetzten und in der Praxis gar häufig vorkommenden Verhältnisse sind so einfach, dass sie wohl keiner Erläuterung durch eine Figur bedürfen. Uebrigens können wir auf die Seilpolygone (Taf. 7 Nr. 50 u. f.) verweisen, wo der Mitteldruck der Räder eines Locomotivzuges bestimmt wird. Wird dort von der kleinen Unregelmässigkeit, dass die Lasten einer Locomotive nicht gleichmässig auf äquidistante Räder vertheilt sind abgesehen, so können die Polygone im grossen Ganzen als Parabeln betrachtet werden, und die verschiedenen Polygonseiten zwischen denselben zwei Rädern der verschiedenen gleich schweren Locomotiven umhüllen eine und dieselbe Parabel.

Drittes Kapitel.

Das Moment der Kräfte und unendlich ferne Kräfte in der Ebene.

36. Moment von Kräften in der Ebene.

Unter dem Moment einer Kraft z. B. P_1 (Fig. 67) in Bezug auf einen beliebigen Punkt O versteht man gewöhnlich den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $O1$, welches von Punkt O aus die

Fig. 67.

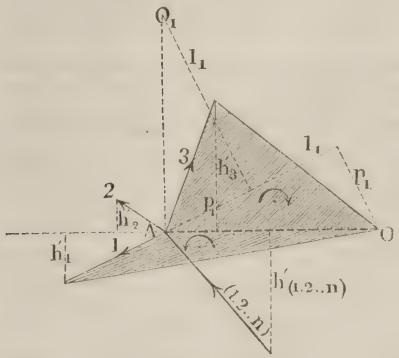
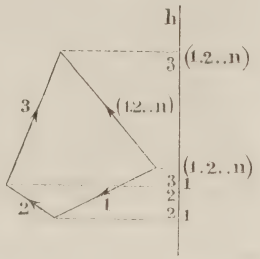


Fig. 68.



Kraft 1 projicirt, wobei man sich dieselbe in ihrer Grösse auf ihrer Richtungslinie aufgetragen zu denken hat. Der Sinn der Fläche wird durch die Richtung desselben Pfeiles bestimmt, welcher die Richtung der Kraft andeutet. So haben z. B. die Momente der Kräfte 1 und 3 entgegengesetzten Sinn, wie es durch die beiden Kreispfeile angedeutet ist.

Die Summe der Momente einer beliebigen Zahl Kräfte in einer Ebene bezüglich eines Punktes dieser Ebene ist gleich dem Moment ihrer Mittelkraft in Bezug auf denselben Punkt.

Wirken alle Kräfte auf einen Punkt A (Fig. 67), so verbinde

man diesen mit dem angenommenen Pol der Momente und projicire das Kräftepolygon $1 . 2 . . n$ (Fig. 68) auf eine Senkrechte h zu $\overline{A\,O}$, dann wird der Inhalt einer jeden eine Kraft, z. B. 1 projicirenden Fläche gleich $\frac{1}{2}\,\overline{A\,O}$mal der Projection h_1 dieser Kraft auf die Linie h (Fig. 68) sein, weil h_1 gleich h'_1 der Höhe des projicirenden Dreiecks ist. Nun ist aber Σh (in Fig. 68) $= h_{1\,2\,\ldots\,n}$, mithin auch $\frac{1}{2}\,\overline{A\,O}\ \Sigma h = \frac{1}{2}\,\overline{A\,O}\ h_{1\,2\,\ldots\,n}$ oder das Moment der Kräfte $1\,2\,..\,n$ ist gleich dem Moment ihrer Mittelkraft $(1\,2\,..\,n)$ bezüglich eines beliebigen, aber für alle Kräfte gleichen Punktes.

Wirken die einzelnen Kräfte nicht auf einen und denselben Punkt, so verbinde man sie alle durch ein Seilpolygon, dann erhält man, von einem Eckpunkt (Taf. 4_4) zum andern übergehend, das Moment der Spannung in 2 3 gleich dem Moment der Kräfte 1 und 2. Das Moment der Spannung in 3 4 gleich dem der Kraft 3 mehr dem der Spannung in 2 3, das gleich ist der Summe der Momente von 1 und 2, mithin ist das Moment der Spannung in 3 4 gleich der Summe der Momente der Kräfte 1 2 3, und so kann man bis zur $n$ten fortfahren.

Gewöhnlich wird das Moment analytisch durch das Product der Kraft P_1 mit ihrer Entfernung p_1 vom Momentenpol (dem sogenannten Hebelarm), also durch $P_1\,p_1$ ausgedrückt, wo dann das Moment der Mittelkraft einer beliebigen Zahl Kräfte $= \Sigma\,P\,p$ ist. Mitunter wird auch, wenn alle Kräfte auf einen Punkt wirken, statt $P_1\,p_1$ das Product $P_1\,l_1$ gebildet, wo l_1 die Entfernung des Punktes A (Fig. 67) vom Fusspunkt des Hebelarmes p_1 bezeichnet. Bezüglich dieser Producte gilt natürlich dasselbe Gesetz, denn sie sind nichts anderes als die Momente derselben Kräfte bezüglich eines Punktes O_1 der so liegt, dass $O\,A\,O_1$ ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck ist. Denn dann sind immer die Längen $l_1\,l_1$ eben so wie $p_1\,p_1$ einander gleich.

Diese Producte P können aber nur dann einen Sinn haben, wenn die Richtung aller Kräfte durch einen Punkt geht, denn nur dann ist der Punkt O_1 vorhanden.

Da das Moment einer beliebigen Zahl Kräfte gleich dem Moment ihrer Mittelkraft ist, so ist es gleich 0 für alle Punkte dieser Mittelkraft, gleich gross für alle Punkte einer Parallelen zur Richtung dieser Mittelkraft, und die absolute Grösse desselben wächst proportional mit der Entfernung dieser Parallelen von der Mittelkraft.

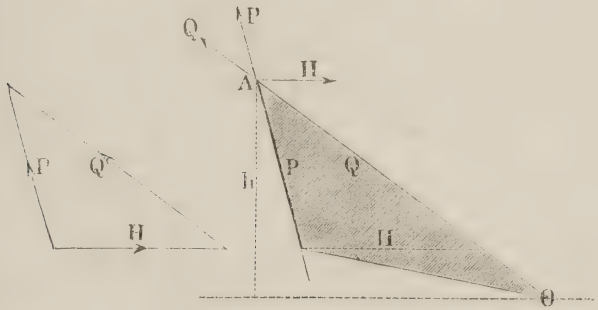
37. Graphische Bestimmung der Momente.

Die Bestimmung der Grösse der Momente geschieht am zweckmässigsten durch Verwandlung der sie darstellenden Flächen, und wir hätten hier dem in Nr. 5 (S. 25) Gesagten nichts weiter beizufügen, wenn es nicht möglich wäre, diesen oder doch ähnlichen Constructionen einen mehr statischen Sinn, wenn wir uns so ausdrücken dürfen, unterzulegen.

Wie wir bei Verwandlung der Flächen alle auf eine bestimmte constante Basis verwandelt haben, um Linien zu erhalten, welche diesen Flächen proportional sind, so wollen wir auch bei Bestimmung der Momente, diese auf eine constante Kraft von H einer runden Zahl Gewichtseinheiten so reduciren, dass wir am Hebelarm h dieser Kraft, direct das Moment Hh ablesen können.

Da nun das Moment einer jeden Kraft die durch den gegebenen Momentenpol geht $= 0$ ist, so gelangt man sehr leicht zu dem Hebelarm h, wenn man die gegebene Kraft P im Kraftpolygon (Fig. 69 und 70) in zwei Seitenkräfte zerlegt, wovon die eine dem

Fig. 69. Fig. 70.



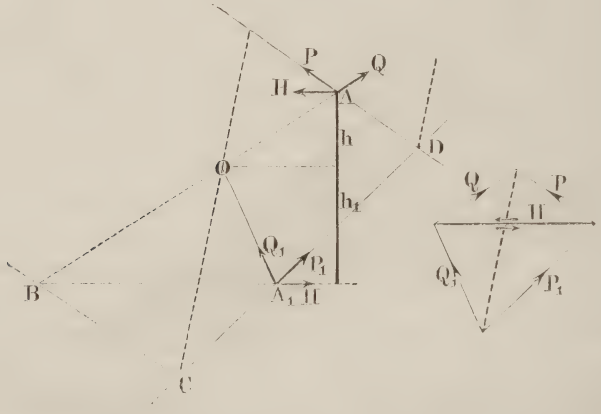
in Richtung und Grösse gegebenen H gleich ist, wodurch dann auch die andere Q bestimmt ist. Zieht man nun durch den gegebenen Pol O (Fig. 70) eine Parallele OA zu Q und denkt man sich die Zerlegung von P in dem Schnittpunkt A mit der Parallelen vorgenommen, so wird die Kraft Q durch den Pol O gehen und das Moment von P dem von H gleich sein; der Perpendikel h (der nicht immer ausgezogen zu werden braucht) vom Punkt A auf eine durch O laufende Parallellinie zu H, ist der gesuchte Hebel-

arm. Um zu zeigen, dass diese ganze Operation nichts anderes als eine Flächenverwandlung war, haben wir das Dreieck PQH auch in die Fig. 70 eingetragen, und man sieht auf den ersten Blick, dass Hh der doppelte Inhalt der schraffirten Momentenfläche ist.

Hier müssen wir bemerken, dass der Sinn der Fläche nicht aus der Lage von h, sondern nur aus dem Pfeile von P und H, welche immer eine in demselben Sinn umfahrene Momentenfläche geben, entnommen werden kann. Da alle Momentendreiecke einen ihrer Eckpunkte im Pol O haben, so muss der Sinn der Fläche immer mit dem Sinn der Drehung der Kraft um den Punkt O zusammenfallen.

Wenden wir das eben Entwickelte noch auf die Bestimmung des Momentes zweier Kräfte, unter denen wir uns z. B. die Spannungen zweier äussersten Seilpolygonseiten als Mittelkräfte der zwischen ihnen wirkenden Kräfte denken können, an. Es sei O (Fig. 71) der Momentenpol (siehe noch das Kräftepolygon Fig. 72), P und P_1 die Kräfte, deren Moment bestimmt werden soll,

Fig. 71. Fig. 72.



endlich H die Kräftebasis, auf welche die Momente zu reduciren sind. Dann zeigt Fig. 72 die Zerlegung der Kräfte P in H und Q, und P_1 in H und Q_1 und man erhält die Punkte A und A_1 (Fig. 71), in welchen die Zerlegung, wie angedeutet ist, stattzufinden hat, indem OA und OA_1 parallel zu Q und Q_1 (in Fig. 72) gezogen werden und die Perpendikel h und h_1 auf die durch O

gezogenen Parallelen zu H sind die gesuchten Hebelarme. Sie addiren sich, weil beide Kräfte P und P_1 eben so wie beide H in demselben Sinn um O drehen. Die ganze stark ausgezogene Linie $h + h_1$ multiplicirt mit H, ist daher dem Moment der beiden Kräfte P und P_1 gleich.

Bewegt sich der Momentenpol auf einer zur Mittelkraft von P und P_1 parallelen Linie $O\,C$, so ändert sich $h + h_1$ nicht, denn verlängert man $A\,O$ bis B bis zu einer durch C gehenden Parallelen $B\,C$ zu P, so sind $A_1\,B$ und H immer parallel als sechste Seiten der beiden Vierecke $O\,A_1\;C\,B$ (Fig. 71) und $P\;P_1\;Q_1\,Q$ (Fig. 72) von denen schon 2mal 2 gegenüberliegende und die fünften Seiten parallel laufen; $h + h_1$ ist daher immer die auf H senkrecht stehende Projection der zwischen zwei Parallelen parallel zu sich selbst sich bewegenden und desshalb gleich lang bleibenden Linie $A\,B$. Nähert sich O und mit O auch die Gerade $O\,C$ dem Schnittpunkt D der beiden Kräfte P und P_1, d. h. ihrer Mittelkraft, so bleibt sich doch stets das Gebilde $O\,A\,D\,A_1$ $h + h_1$ ähnlich und $h + h_1$ ändert sich proportional der Entfernung des Punktes D von O oder $O\,C$. Die Länge $h + h_1$ wird $= 0$, wenn $O\,C$ durch D geht.

Wir haben zwar (Nr. 36 S. 102) das eben Gesagte schon einmal ausgesprochen und bewiesen, doch glaubten wir die Richtigkeit der Construction von Fig. 71 auch noch geometrisch nachweisen zu sollen, weil wir dieselbe später noch benutzen werden.

Sind die Momente sehr vieler Kräfte, die man gerade nicht durch ein Seilpolygon zu verbinden gedenkt, zu reduciren, so kann auch folgende Construction mit Vortheil angewendet werden.

Man beschreibe von dem Pol (Taf. 6) als Centrum einen Kreis mit $H = r$ als Halbmesser, der so gross anzunehmen ist, dass er die Richtungslinie aller Kräfte schneidet, deren Moment zu bestimmen ist. Betrachtet man dann H als Basis aller einzelnen Momentendreiecke, so sind die Antiprojectionen h_1, h_2 ..... der einzelnen Kräfte senkrecht zu diesem H gleich den gesuchten Hebelarmen, durch deren Addition man das Totalmoment erhalten kann.

Flächen sind Producte von zwei in jeder Beziehung homogenen Linien, diess ist bei Momenten nicht mehr der Fall; sie sind das Product einer Kraft und einer Linie, zwei vollkommen heterogenen Elementen, und man könnte fragen, ob es gestattet sein kann, sie, so wie wir es gethan haben, zu verwandeln, als ob sie ganz

homogen zusammengesetzt wären. Diese Frage muss unbedingt bejaht werden. Die Fläche an und für sich als das Moment repräsentirend, muss als etwas ganz Gleichartiges betrachtet werden. Die Kilogrammmeter z. B., die man erhalten hat, sind weder Kilogramm noch Meter, sondern eben Kilogrammmeter, das Product beider, und ebenso wie dieses verwandelt werden kann, muss auch die dieses Product darstellende Fläche verwandelt werden können, vorausgesetzt nur, dass sie durch Multiplication beider, d. h. dadurch entstanden sei, dass eine ihrer Dimensionen ursprünglich eine Kraft und die andere eine Linie war. Man kann also die Fläche eben so gut verwandeln, als man das Moment einer Kraft von 4 Kilogr. an einem Hebelarm von 15 Metern, dem einer Kraft von 10 Kilogr. an einem Hebelarm von 6 Metern gleichsetzen kann. Auch kann man stets den Hebelarm mit der Kraft eben so gut vertauschen, als man im eben citirten Beispiel auch eine Kraft von 6 Kilogr. an einem Hebelarm von 10 Metern annehmen darf. Nur muss stets, wenn eine der Linien, in die man die Momentenfläche zerlegt hat, auf dem Maassstab der Linien abgegriffen wurde, die andere senkrecht darauf stehende auf demselben Maassstab der Kräfte abgegriffen werden, in welchem die Kräfte aufgetragen wurden, die zur ursprünglichen Bildung der Momente dienten.

Die Constructionen, die zur Reduction der Momente auf einen Hebelarm von einer runden Zahl Längeneinheiten dienten, sind daher genau dieselben als diejenigen, welche zur Reduction derselben auf eine Kraft von einer runden Zahl Gewichtseinheiten dienten. Wäre z. B. (in Fig. 72) H gleich einer runden Zahl Längeneinheiten, so könnte man $h + h_1$ auf dem Maassstab der Kräfte ablesen, und als am Hebelarm H wirkend betrachten.

38. Unendlich ferne und unendlich kleine Kräfte.

Wenn zwei Seilpolygonseiten parallel laufen, so liegt ihr Schnitt im Unendlichen und ihre Richtung ist jedenfalls auch die der Mittelkraft der zwischen ihnen wirkenden Kräfte. Auf Taf. 4_1 z. B. laufen die Polygonseiten 4 5 und 9 10 parallel, hierdurch ist der unendlich ferne Punkt der Mittelkräfte von (5 6 7 8 9) d. h. ihre Richtung gegeben, allein die Lage der Kraft ist noch unbestimmt. Um sie zu bestimmen, hat man nur dieselben Kräfte durch irgend ein anderes Seilpolygon $4_1\ 5_1\ 6_1\ 7_1\ 8_1\ 9_1\ 10_1$ zu verbinden, dessen ent-

sprechender Pol O_1 im Kräftepolygon (Taf. 4_5) nicht auf dem zu den parallelen Seilpolygonseiten parallelen Strahl O (5 4) (9 10) liegt, um durch Verlängerung und Schnitt der äussersten Seilpolygonseiten $4_1 5_1$ und $9_1 10_1$ (Taf. 4_4) einen Punkt der Mittelkraft (5 6 7 8 9) zu erhalten, deren Richtung und Lage somit bekannt ist. Sollte die Mittelkraft ganz im Unendlichen liegen, so müssten auch die Seiten $4_1 5_1$ und $9_1 10_1$ parallel laufen, dann ginge die Mittelkraft nicht allein durch den unendlich fernen Punkt der Polygonseite 4 5, sondern auch durch den der Seite $4_1 5_1$ und läge demnach ganz im Unendlichen. Damit aber diess eintreffe, müssten nicht allein die Strahlen O (4 5) und O (9 10) (Taf. 4_5) sondern auch die Strahlen O_1 (4 5) und O_1 (9 10) im Kräftepolygon zusammenfallen. Diess findet aber nur dann statt, wenn die Punkte (4 5) und (9 10) selbst zusammenfallen, d. h. wenn die Grösse der Mittelkraft (5 6 7 8 9) = 0 oder besser gesagt, unendlich klein ist.

Diese unendlich fernen und kleinen Kräfte mit endlichen Kräften in endlicher Entfernung zusammengesetzt, können, wie aus dem Kräftepolygon hervorgeht, zwar die Grösse der Mittelkraft nicht ändern, aber wie aus dem Seilpolygon hervorgeht, deren Lage. Setzt man z. B. die beiden parallelen, aber in entgegengesetzter Richtung wirkenden gleichen Kräfte 6 und 7, die ein Kräftepaar genannt werden und die der einfachste Ausdruck einer unendlich fernen und kleinen Kraft sind, mit der Kraft (1 2 3 4 5) zusammen, deren Richtung und Lage 5 6 ist, so verschiebt sie diese letztere nach 7 8, ebenso verschiebt sich die Lage der Kraft (2 3 4 5) in Folge der Zusammensetzung mit demselben Kräftepaar 6 7, von 5_1 6_1 parallel zu sich selbst nach 7_1 8_1.

Hieraus geht also hervor, dass unendlich kleine und ferne Kräfte Grössen gleicher Ordnung als wie endliche Kräfte in endlicher Entfernung sind und mit diesen zusammengesetzt werden können. Endliche Kräfte in unendlicher Entfernung sind unendlich grosse Grössen, die mit endlichen Kräften nicht mehr zusammengesetzt werden können, denn wenn eine unendlich kleine und ferne Kraft die Mitfelkraft (2 ... 5) um ein Endliches verrückt, so würde diese durch eine unendlich ferne endliche Kraft ins Unendliche verrückt und die Zusammensetzung ist unmöglich. Ebenso klar ist es auch, dass eine unendlich kleine Kraft in endlicher Entfernung, die Lage einer endlichen Mittelkraft nicht mehr ändern kann, und als unendlich kleine Grösse niedrigerer

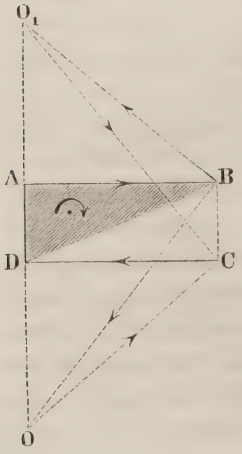
Ordnung vernachlässigt werden kann. Um unendlich kleine und ferne Kräfte direct zusammensetzen zu können, fehlt nichts mehr als ihr Maass.

39. Das Maass unendlich kleiner und ferner Kräfte.

Da alle Kräfte, welche in einer und derselben geraden Linie wirken, ihren Momenten, in Bezug auf irgend einen Pol proportional sind, so sind auch die in der unendlich fernen Geraden wirkenden Kräfte ihren Momenten in Bezug auf irgend einen Pol proportional. Da ferner durch die Aenderung der Lage des Poles in der Endlichkeit, nur verschwindend kleine Aenderungen am Hebelarm der unendlich fernen Kräfte hervorgebracht werden, so ist das Moment der unendlich fernen Kräfte constant für alle Pole in der Endlichkeit. Wir dürfen daher, so lange wir nur in der Endlichkeit construiren, das Moment der unendlich fernen Kräfte als ihr Maass annehmen. Die wirkliche Grösse dieser Kräfte ist jedoch immer nur gleich diesem Moment, getheilt durch ihren constanten aber unendlich langen Hebelarm.

Dass das Moment aller ∞ kl. Kräfte constant sei, lässt sich leicht an einem Kräftepaar erproben. So ist z. B. das halbe Moment der beiden parallelen aber in entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte (Fig. 73), gleich der Differenz der beiden Dreiecke OAB und ODC oder der Figur $ABOCDA$ = dem Dreieck ABD. Der Inhalt dieses letzteren ist aber von der Lage des Poles O ganz unabhängig, und sein doppelter Inhalt gleich der einen Kraft AB multiplicirt mit der senkrechten Entfernung der andern als Hebelarm. Dasselbe gilt nothwendiger Weise auch von Momentensummen beliebiger anderer Kräfte, deren Mittelkraft = 0 ist. Da unter der Grösse einer solchen Momentensumme auch ihr Zeichen inbegriffen ist, so folgt, dass auch die Momentenflächen solcher Kräfte mit der Mittelkraft 0 stets in demselben Sinn umfahren werden, und dass daher der Drehungssinn solcher unendlich fernen Kräfte stets derselbe sei. Die Momenten-

Fig. 73.



fläche des Kräftepaares (Fig. 73), ist dieselbe, wenn auch der Pol O auf die andere Seite des Paares nach O_1 versetzt würde, die Fläche ist in demselben vom Pfeil angedeuteten Sinn umfahren, und das Paar dreht in demselben Sinn um O_1 als wie um O.

40. Zusammensetzung der unendlich fernen und kleinen Kräfte in der Ebene.

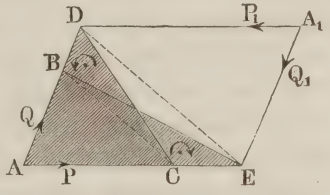
Da die unendlich ferne Linie in der Ebene eine Gerade ist, so addiren sich einfach die in derselben wirkenden unendlich fernen Kräfte.

Das stimmt vollkommen damit überein, was Nr. 36 S. 101 bewiesen wurde, dass die Momente mehrerer beliebiger, also auch unendlich ferner Kräfte sich bei Bildung einer Mittelkraft einfach addiren.

Ferner geht hieraus hervor, dass zwei Kräftepaare von gleichen aber entgegengesetzten Momenten sich aufheben, weil die Summe der unendlich fernen Kräfte, durch die sie dargestellt werden, $= 0$ ist.

Es lässt sich diess auch leicht direct geometrisch beweisen. Sind die schraffirten Momentendreiecke der beiden bis zu ihren gegenseitigen Durchschnittspunkten verlängerten Kräftepaare PP_1 und QQ_1 (Fig. 74) gleich gross und entgegengesetzten Sinnes, so laufen $\overline{BC}$ und DE parallel, P und Q verhalten sich daher wie AE und AD, wie die Seiten des Parallelogramms ADA_1E, die Mittelkraft von P und Q fällt dann mit der Diagonale desselben zusammen, ebenso die gleich grosse aber entgegengesetzt wirkende Mittelkraft von P_1 und Q_1 und beide heben sich gegenseitig auf.

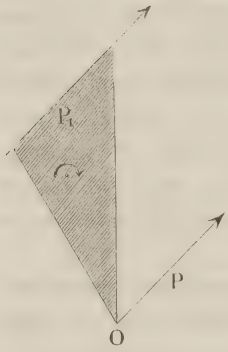
Fig. 74.



Sind unendlich ferne und kleine Kräfte als Mittelkräfte zweier oder mehrerer andern Kräfte gegeben, so kann man sie einfach durch Verbindung mittelst eines Seilpolygons mit andern Kräften zusammen setzen, wie es z. B. in Nr. 27 S. 81 Taf. 4_4 gezeigt ist, wo das Kräftepaar 6 7 mit den Mittelkräften (1 2 ... 5) und (2 3 .. 5) zusammengesetzt wurde.

Sind die unendlich fernen Kräfte durch ihre Momentenfläche, ihr Maass gegeben, und mit endlichen Kräften zusammenzusetzen, so hat man die Mittelkraft dieser letztern einfach um so viel zu versetzen, dass sich ihr Moment, in Bezug auf irgend einen Punkt der Ebene, um die gegebene Momentenfläche der unendlich fernen Kraft ändert. Denn durch die unendlich kleine Kraft kann weder die Richtung noch die Grösse der endlichen Mittelkraft verändert werden, und nur ihr Moment ändert sich um das der unendlich fernen Kraft. Denkt man sich zum Zweck dieser Versetzung den Momentenpol auf der Richtungslinie P der Mittelkraft selbst in O (Fig. 75), so versetzt sich dieselbe bei der Zusammensetzung mit einer unendlich fernen Kraft um so weit nach P_1, dass die schraffirte Momentenfläche in Sinn und Inhalt gleich der der unendlich fernen Kraft werde. Und umgekehrt kann man jede Kraft P in eine gleich grosse in beliebiger Entfernung parallel zu ihr wirkende Kraft P_1 und eine unendlich ferne Kraft zerlegen, deren Momentenfläche der negativen schraffirten Fläche gleich wäre.

Fig. 75.



Wäre eine nur durch ihr Moment gegebene unendlich ferne Kraft in ein Seilpolygon einzuschalten, so würde bezüglich der Polygonseite, nach der sie folgen soll, genau dasselbe gelten, was eben über die einzelne Kraft P gesagt wurde; z. B. wäre statt des Kräftepaares 6 und 7 (in Taf. 4_4) die schraffirte Momentenfläche desselben als Dreieck gegeben, dessen Höhe h gleich der Entfernung und dessen Basis gleich einer der Kräfte 6, 7 und dessen Sinn durch den Pfeil angedeutet ist, so hätte man nur dieses Dreieck auf die Basis (1...5) zu verwandeln, um einen Punkt der Kraft (1...7) zu erhalten. Wären dann die Linien 6, 7 und (6 7) nicht vorhanden, so dürfte man sich das Seilpolygon bei 5 nicht abgebrochen, sondern dort in's Unendliche und zurück nach 7 8 gehend denken, was durch eine Klammer angedeutet werden könnte.

41. Das Gleichgewicht von Kräften in der Ebene.

Wir können nun die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte ganz allgemein wie folgt ausdrücken; dabei werden wir uns unter einer unendlich fernen Kraft, die = 0 ist, eine solche denken deren Moment = 0 ist.

Eine beliebige Zahl Kräfte ist im Gleichgewicht, wenn ihre Mittelkraft = 0 ist.

Die Kräfte sind hier im allgemeinsten Sinn genommen, sie können endliche und unendlich ferne Kräfte sein; und dürfen also auch eine unendlich ferne Mittelkraft haben.

Sind Kräfte nicht im Gleichgewicht, so kann dieses immer durch die umgekehrte Mittelkraft, d. h. durch die Kraft hergestellt werden, durch welche die Mittelkraft des ganzen Kräfte-Systems auf 0 reducirt wird.

Besondere Fälle sind nun folgende.

Wirken mehrere Kräfte in einer geraden Linie oder fallen mehrere Mittelkräfte verschiedener Systeme mit einer geraden Linie zusammen, so kann das Gleichgewicht, wenn es nicht vorhanden sein sollte, nur durch eine Kraft hergestellt werden, deren Richtung mit derselben Linie zusammenfällt.

Dieser Satz ist auch von der unendlich fernen Geraden gültig, also kann das Gleichgewicht mehrerer Kräftepaare, oder überhaupt Kräftesysteme, deren Mittellinie alle in der unendlich fernen Geraden liegen, nur durch eine unendlich ferne Kraft hergestellt werden. Haben alle in der Endlichkeit liegenden Kräfte eine endliche Mittelkraft, so bleibt diese endlich, wie viele unendliche ferne und kleine Kräfte damit auch verbunden werden mögen.

Werden mehrere Kräfte in der Art durch ein Seilpolygon mit einander verbunden, dass, wie in Taf. 4_4, die erste Kraft 1 als Polygonseite benutzt wird, so sind die sämmtlichen, hier 10, Kräfte im Gleichgewicht, wenn die Mittelkraft im Kräftepolygon = 0 ist, und wenn die Richtung der letzten Polygonseite mit der Richtung der letzten Kraft 10 zusammenfällt. Ist diess nicht der Fall, so kann das Gleichgewicht durch eine in der letzten Polygonseite und durch das Kräftepolygon gegebene Kraft hergestellt werden.

Mehrere an einem Seitenpolygon wirkende Kräfte sind im

Gleichgewicht, wenn die erste und letzte Seite sich auf der letzten in das Seilpolygon noch nicht eingeflochtenen Seite schneiden, und die Summe aller = 0 ist. Denkt man sich z. B. eine Mittelkraft (5 ... 9) (Taf. 4_4) in entgegengesetzter Richtung wirkend, so ist also — (5 6 ... 9) mit den Kräften 5 6 7 8 und 9 im Gleichgewicht, was sich dadurch zeigt, dass das Polygon 5_1 6_1 7_1 8_1 9_1 — (5 6 ... 8 9) 5_1 geschlossen erscheint; dass die Summe dieser Kräfte im Kräftepolygon ebenfalls = 0 sein muss, versteht sich von selbst. Im andern der Taf. 4_4 verzeichneten Polygone erscheint das Polygon der entsprechenden Kräfte nicht minder geschlossen, nur liegt der Punkt — (5 6 ... 8 9) im Unendlichen, bezeichnet man diesen auch in der Richtung 4 5 und 9 10 liegenden Punkt mit ∞, so ist das geschlossene Polygon (∞ 4 5) 5 6 7 8 (9 10 ∞), wo ∞ 4 5 und 9 10 ∞ parallele Polygonseiten sind, die sich in ∞ schneiden. Denkt man sich auch noch das Kräftepaar 6 7 durch seine unendliche ferne Kraft ersetzt, so geht dieses Polygon zweimal durchs Unendliche, ohne dass dadurch die Lage eines Eckpunktes oder einer Polygonseite an Bestimmtheit verliere. Umgekehrt kann durch Schluss des Seilpolygons und Kräftepolygons das Gleichgewicht wieder hergestellt werden, indem man im Schnitt der ersten und letzten Polygonseite die Schlusskraft des Kräftepolygons anbringt.

Dieser Schluss kann auch durch zwei und mehrere Kräfte bewirkt werden, in die man sich eben die Mittelkraft zerlegt zu denken hat.

42. Zusammensetzung der Kräfte mit Hülfe der unendlich fernen Kräfte.

Man kann nach 40 S. 110 jede Kraft in eine gleichgrosse parallele Kraft, die durch einen bestimmten Punkt ***O*** geht, und in eine unendlich ferne Kraft zerlegen; vollzieht man diese Zerlegung mit allen vorhandenen Kräften, so erhält man mittelst eines Kräftepolygons allein die Richtung und Grösse aller auf diesen Punkt ***O*** wirkenden Kräfte. Die unendlich fernen Kräfte addiren sich einfach zu einer einzigen unendlich fernen. Setzt man dann diese mit der Mittelkraft der auf ***O*** wirkenden Kräfte zusammen, so erhält man die Mittelkraft aller Kräfte.

Auf diese Weise kann man ohne Hülfe des Seilpolygons

Kräfte zusammensetzen; in der Ebene ist wohl immer das Seilpolygon (das Kräftepolygon ist bei keiner Methode entbehrlich) das einfachste Mittel um zur Lage der Mittelkraft mehrerer Kräfte zu gelangen, und wir erwähnten dieser Methode nur der Vollständigkeit wegen und weil sie das einzige Mittel darbietet die Kräfte im Raum zusammenzusetzen.

Viertes Kapitel.

Die Kräfte im Raum.

43. Die Zusammensetzung der Kräfte im Raum.

Nach den bisherigen Regeln können nur solche Kräfte im Raum direct zusammengesetzt werden, die in einer Ebene liegen und die sich daher in endlicher oder unendlicher Ferne schneiden; träfe dann die Mittelkraft irgend eine andere Kraft, so könnte sie auch mit dieser zusammengesetzt werden u. s. f. Da man jedoch im Allgemeinen nicht annehmen darf, dass sich alle zusammenzusetzenden Kräfte auf diese Weise durch ein Seilpolygon verbinden lassen, so muss man auch graphisch zu andern Methoden greifen.

Man nehme einen beliebigen Punkt O als Ursprung an, und zerlege alle zusammenzusetzenden Kräfte in eine parallele gleich grosse durch den Punkt O gehende, und in eine unendlich ferne Kraft.

Dann lassen sich alle endlichen auf den Punkt O wirkenden Kräfte nach 24 (S. 77) zu einer Mittelkraft P zusammensetzen, und ebenso alle unendlich fernen und kleinen Kräfte zu einer andern unendlich fernen Kraft U, weil diese alle in einer Ebene, der unendlich fernen Ebene wirken.

Ist $P = O$, so reduciren sich die zusammenzusetzenden Kräfte auf die Mittelkraft der unendlich fernen Kräfte U und umgekehrt. Haben P und U von O verschiedene Werthe, so wird man sie nur dann zu einer einzigen endlichen Kraft zusammensetzen können, wenn sie in einer und derselben Ebene liegen. Im Allgemeinen aber wird diess nicht der Fall sein; dann wird man die unendlich ferne Kraft

dadurch auf ein Minimum reduciren können, dass man sie in zwei Seitenkräfte zerlegt, wovon die eine U_1 parallel mit P läuft und die andere U_n senkrecht darauf steht. Die erstere U_1 wird in einer Ebene mit P liegen und mit P zu einer gleich grossen, aber nicht mehr durch O gehenden Kraft zusammengesetzt werden können, U_n aber wird die kleinste unendlich ferne Kraft sein, auf welche das System reducirt werden kann. Denn jeder Versetzung von P wird eine Verbindung von U_n mit einer senkrecht hierauf stehenden Kraft entsprechen, welche grösser als U_n sein muss, weil die Hypotenuse eines jeden rechtwinkligen Dreiecks grösser als jede der Katheten ist.

Diese bestimmte Richtung und Lage von P, welcher die kleinste mögliche unendlich ferne Kraft U_n des Systems entspricht, heisst mitunter die Centralaxe des Systems.

Will man das Kräftesystem nicht durch eine unendlich ferne Kraft ausdrücken, so kann man diese in zwei nach beliebigen Richtungen wirkende Kräfte zerlegen, jede derselben bestimmt mit dem Punkt O eine Ebene; durch den Punkt O und die gegebene Mittelkraft P kann man dann noch eine dritte Ebene legen. Diese letztere schneidet die beiden ersten Ebenen in zwei Linien, von denen jede in einer Ebene mit einer der unendlich fernen Seitenkräfte liegt, und deren Ebene gleichzeitig die Richtung von P enthält. Man kann daher P in zwei Seitenkräfte nach der Richtung dieser beiden Linien zerlegen, die dann je in derselben Ebene mit einer der beiden unendlich fernen Kräfte liegen, in die U_n zerlegt wurde, und daher mit ihnen zusammengesetzt werden können. Hierdurch reducirt sich das ganze Kräftesystem auf zwei nicht in einer Ebene liegende Kräfte.

Da alles hier willkürlich ist, so kann diese Zerlegung auf unendlich viele verschiedene Weisen stattfinden, und man kann sich verschiedene beschränkende Bedingungen stellen, z. B. dass die eine der beiden Kräfte mit einer gegebenen Axe R zusammenfallen, oder dass die beiden Kräfte senkrecht aufeinander stehen sollen. Im ersten Falle zerlege man P zuerst in eine Kraft P_1 gleicher Richtung und Grösse, die durch einen Punkt O_1 von R geht, und in eine unendlich ferne Seitenkraft V; dann P_1 in zwei Seitenkräfte, wovon die eine nach R, und die andere in der durch UV und O_1 bestimmten Ebene wirkt; endlich setze man diese letztere noch mit UV zusammen. Im zweiten Fall kann

man in einer Ebene, welche senkrecht auf U steht und P enthält, diese letztere Kraft auf unendlich verschiedene Weisen in zwei senkrecht aufeinander stehende Seitenkräfte zerlegen; dann lässt sich auch U in zwei unendlich ferne Seitenkräfte zerlegen, welche beide mit je einer der Seitenkräfte von P in einer Ebene liegen, und daher mit ihnen zu zwei Kräften zusammengesetzt werden können, die endlich sind und senkrecht aufeinander stehen.

44. Beziehungen zwischen den Momentenflächen, den ihnen entsprechenden Perpendikeln und ihren Projectionen.

Zerlegt man eine Kraft P_2 (Fig. 76 S. 117) in eine parallele Seitenkraft, welche durch den Pol O geht und in eine unendlich ferne Kraft, so liegt diese in der projicirenden Ebene OP_2, ist daher durch die Stellung dieser Ebene vollkommen bestimmt, und zwei unendlich ferne Kräfte bilden denselben Winkel mit einander, den ihre projicirenden Ebenen mit einander bilden, weil deren Schnittlinie als auf der unendlich fernen Ebene senkrecht stehend angenommen werden darf.

In der darstellenden Geometrie ist es allgemein üblich die Stellung einer Ebene durch einen Perpendikel auf dieser Ebene darzustellen, wenn man nämlich nur die Stellung einer Ebene im Auge hat, so ist diese durch den Perpendikel vollkommen bestimmt, weil alle Ebenen, welche senkrecht auf einer Linie stehen, parallel liegen, und weil die Winkel, welche zwei Linien mit einander bilden, gleich den Winkeln sind, welche die senkrecht auf ihnen stehenden Ebenen mit einander bilden.

Ganz diesem Gebrauch entsprechend werden daher auch wir die Richtungen der unendlich fernen Kräfte durch die Perpendikel darstellen, welche auf den sie projicirenden Ebenen senkrecht stehen, und die also dieselben Winkel mit einander bilden, als die unendlich fernen Kräfte selbst.

Wir haben dadurch den Strahlenbündel O in der Art reciprok auf die unendlich ferne Ebene bezogen, dass drei oder mehr unendlich ferne Linien, welche sich in einem Punkte schneiden: drei oder mehr auf den sie projicirenden Ebenen senkrecht stehenden Strahlen entsprechen, welche alle in einer Ebene liegen. Einzelnen Punkten der unendlich fernen Ebene, welche in einer geraden

Linie liegen, entsprechen ebenso viele Ebenen des Bündels, die alle sich in dem Strahl schneiden, welcher der Linie entspricht, in der die Punkte liegen.

Sind nun in der unendlich fernen Ebene drei auf einen Punkt wirkende Kräfte im Gleichgewicht, so müssen die entsprechenden drei Strahlen in einer Ebene liegen, weil die drei Kräfte sich in einem Punkt schneiden, und nach Obigem Winkel mit einander bilden, die den Winkeln gleich sind, welche die unendlich fernen Kräfte mit einander bilden. Denkt man sich nun zwischen zweien dieser Kräfte in der unendlich fernen Ebene ein Kräftedreieck construirt, dessen dritte Seite mit der dritten Kraft parallel läuft: so wird man ein ähnliches Dreieck erhalten, wenn man auf den zwei entsprechenden Strahlen die Momente der unendlich fernen Kräfte aufträgt, welche diesen proportional sind, und es wird dann auch die dritte Seite dieses Dreiecks dem Strahl parallel sein, der der dritten Kraft entspricht.

Will man also zwei Kräfte in der unendlich fernen Ebene zusammensetzen, so gelangt man ganz einfach zum Strahl, der auf der Mittelkraft senkrecht steht und dessen Länge dem Moment derselben gleich ist, indem man auf den Strahlen, welche diesen beiden Kräften entsprechen, die Momente aufträgt und wie gewöhnliche Kräfte zusammensetzt.

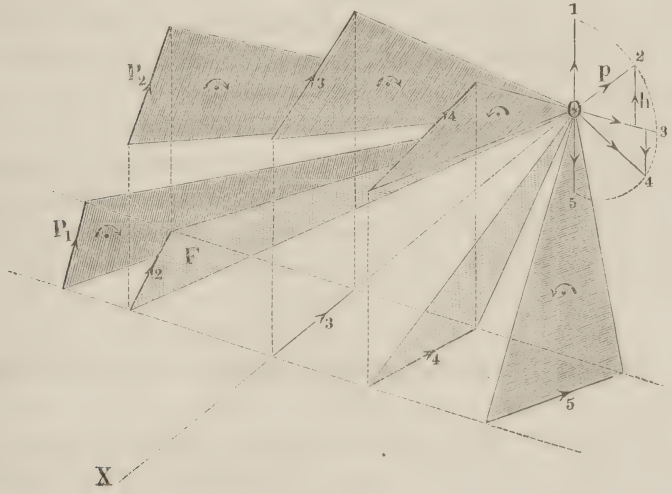
Sind mehr als zwei unendlich ferne Kräfte zusammenzusetzen, so denke man sich, der Angriffspunkt der Mittelkraft bewege sich in ihrer Richtungslinie bis zum Schnitt mit der dritten Kraft, so wird sich gleichzeitig in dem der unendlich fernen Ebene entsprechenden Strahlenbündel O die diesem Angriffspunkt entsprechende Ebene der beiden ersten Strahlen um den Strahl der Mittelkraft drehen bis in die Ebene des Strahles, welcher der dritten Kraft entspricht. In dieser setzt man einfach die dritte Kraft mit der Mittelkraft der beiden ersten zusammen, indem man an ihrem Endpunkt in Richtung und Grösse den Strahl zufügt der dieser dritten Kraft entspricht u. s. f.

Auf diese Weise kann man alle Kräfte der unendlich fernen Ebene zusammensetzen, und erhält dann einen Zug von Momenten im Raum, ähnlich dem von Figur 4 S. 4 und Figur 60 S. 78, der dem Seilpolygon in der unendlich fernen Ebene so entspricht, wie wir es eben auseinander gesetzt haben.

Sind die einzelnen Kräfte, wie es wohl meistens der Fall sein wird, durch ihre Projectionen auf zwei rechtwinkeligen Ebenen gegeben, so ist es nicht nothwendig, die projicirende Fläche einer jeden einzelnen Kraft umzuklappen und zu verwandeln, um den Momentenzug zu construiren, sondern es genügt: die Projectionen zu verwandeln, um die Ordinaten-Zunahme des Momentenzuges zu erhalten.

Denken wir uns, es drehe sich die Kraft P_1 (Fig. 76) sammt ihrem Perpendikel p_1, der auf der Ebene OP_1 senkrecht steht und

Fig. 76.



der unendlich fernen Kraft entspricht, die man erhält, wenn P_1 in eine solche und in eine zu ihr selbst parallele Seitenkraft durch O zerlegt wird, um die Axe OX so, dass sie einen senkrechten Kreiskegel und der Perpendikel eine Ebene beschreibt, so wird in jeder einzelnen Stellung z. B. P_2 der Winkel den die Ebene OP_2 mit der horizontalen Projectionsebene OP_1P_3 bildet gleich dem Winkel sein, den der senkrechte Strahl p_2 mit der Verticalen $1O5$ bildet; und es wird sich daher die Momentenfläche OP_2 zu ihrer Projection OF_2 gerade so verhalten, wie der Strahl p_2 zu seiner verticalen Projection h_2, so dass man die letztere einfach durch Verwandeln der Projectionsfläche OF_2 erhält.

Ferner geht auch aus Fig. 76 hervor, dass der Drehungssinn

der Projections-Fläche dem Sinn der Perpendikel h entspreche; hat man einmal dem Drehungssinn von P_1 den Sinn von p_1 im Strahl 5 O 1 angewiesen, so wird bei der Drehung von P_1 um die Axe OX, h denselben Sinn haben und abnehmen bis zur verticalen Stellung der Ebene OP_3; in dieser Stellung werden F_3 und h_3 gleich 0 sein, weil p_3 horizontal liegt. Bewegt sich die Fläche über die Verticalebene hinaus, so ändert sich der Drehungssinn der projicirenden Fläche F_4, gleichzeitig aber auch der Sinn der Projection h_4 von p_4; in einer solchen Lage der Kraft P wird die verticale Ordinate des Momentenzugs in Folge Hinzukommens des Strahles p_4 um h_4 abnehmen, nicht zunehmen. Hat sich endlich die Ebene OP um π gedreht und ist die Kraft P in die Horizontalebene nach OP_5 zurückgekommen, so wird der Strahl O_5 gerade in der Verlängerung des Strahles O_1 liegen, d. h. in entgegengesetztem Sinn erscheinen.

Hiermit wäre bewiesen: dass der Inhalt der Projection einer Momentenfläche mit Berücksichtigung ihres Drehungssinnes der entsprechenden Zunahme der Ordinaten des Momentenzuges mit Berücksichtigung des Zeichens proportional sei.

45. Graphische Zusammensetzung der Kräfte im Raum.

Auf Taf. 6 sind die eben angedeuteten Operationen nach den Regeln der darstellenden Geometrie beispielsweise an vier Kräften ausgeführt worden.

Die vier Kräfte sind in der Richtung und Grösse durch ihre horizontalen und verticalen Projectionen 1 2 3 4 gegeben. Zerlegen wir jede derselben in eine unendlich ferne, und in eine in Richtung und Grösse gleiche durch den Punkt O gehende Seitenkraft, so addiren sich alle die letztern mittelst des Kräftezuges O 1 2 3 4 P nach den bekannten Regeln (Nr. 24 S. 77) zu einer durch den Punkt PO gehenden Mittelkraft P, die in Richtung und Grösse durch die Linie OP gegeben ist.

Die Richtungen der entsprechenden unendlich fernen Kräfte, sind durch Strahlen bestimmt, welche auf den Momentenflächen senkrecht stehen, sie stehen also auch senkrecht auf den Linien, welche in der Momentenfläche parallel zu den Projectionsebenen gezogen sind.

Man erhält die Projection einer horizontalen Linie in der Fläche O_1 z. B., deren Umfang ganz in beiden Projectionsebenen ausgezogen ist, indem man in der verticalen Projection eine Horizontale a_1 zieht und die Schnitte derselben mit dem Umfang der Momentenfläche auf die entsprechenden Linien in der Horizontalebene projicirt, wodurch man dort die Projection a der Horizontalen in der Momentenfläche erhält. Auf dieselbe Weise wird die Projection b_1 der Linie, welche in der Momentenfläche zur verticalen Projectionsebene parallel läuft, bestimmt.

Diese Linien, welche zu den Schnitten der Momentenfläche mit den Projectionsebenen parallel laufen, sind bei allen Kräften —.—irt. Da die einzelnen Strecken des Momentenzuges auf den Momentenflächen senkrecht stehen, so stehen auch ihre Projectionen auf dieser Linie senkrecht. In beiden Projectionsebenen steht z. B. die Strecke ...3... des Momentenzuges $O\,1\,2\,3\,4\,U$ senkrecht auf — . der Kraft 3.

Die Ordinatenzunahme dieses Zuges senkrecht auf jeder Projectionsebene ist ferner dem Inhalt der Fläche proportional, auf welche sich die Momentenfläche projicirt; in beiden Projectionsebenen sind daher diese auf den gleichen Radius r, wie schon in Nr. 37 S. 105 angedeutet wurde, reducirt, indem bei der Kraft 1 z. B. der Radius von O nach dem Schnitt der Kraft 1 mit dem Kreis r als Basis des Dreiecks $O\,1$ betrachtet wurde, dann wird der Inhalt der projicirten Momentenfläche durch die Antiprojection h_1 in der Horizontalen und k_1 in der verticalen Projection dargestellt. In welchem Sinne diese Ordinatenänderungen jedesmal zu nehmen sind, ist durch Pfeile angedeutet; dem Drehungssinn der Flächenprojectionen entsprechen die Pfeile auf den Kreisbogen, und die ihnen entsprechenden Sinne der Ordinatenzunahmen sind auf den von ihnen ausgehenden senkrechten zur Grundlinie in der andern Projectionsebene angedeutet.

Diesen Antiprojectionen sind nun die Ordinatenzunahmen des Momentenzuges nämlich h'_1 in der verticalen und k_1 in der horizontalen Projection gleich. Da noch ausserdem die einzelnen Strecken auf den Linien —.— senkrecht stehen, so sind die aufeinanderfolgenden Endpunkte des Momentenzuges vollständig bestimmt.

Diese Constructionen werden ungenau, wenn die Momentenfläche sich einer Ebene nähert, welche auf beiden Projectionsebenen senkrecht steht. Man kann sich aber dann leicht dadurch

helfen, dass man die eine derselben dreht. Diess ist z. B. bei der Kraft 2 geschehen, wir haben dort die Projection der Horizontallinie a_2 als neue Grundlinie einer neuen verticalen Projectionsebene betrachtet, und diese um jene Grundlinie umgeklappt, es kam dann die neue Projection der Kraft 2 nach 2_1 und der Pol O nach O_1 zu liegen. Die Momentenfläche wurde dann wie früher reducirt, und man erhielt dann als Antiprojection von 2_1 senkrecht auf c_2 die Länge k_2, welche hier der der ganzen Strecke 2 des Momentenzuges gleich ist, weil diese auf der Grundlinie a_2 senkrecht steht.

Zur Bestimmung der verticalen Projection genügt es vollkommen die Ordinaten-Ab- oder Zunahme durch Reduction der Momentenfläche $O2$ in der Horizontalebene zu bestimmen.

Auf solche Weise können alle Strecken des Momentenzuges $O\,1\,2\,3\,4\,U$ aufgetragen werden, und man erhält als Strahl, welcher in Richtung und Länge der Richtung und Grösse der Mittelkraft der sämmtlichen unendlich fernen Kräfte entspricht, den Strahl OU in beiden Projectionen. Die unendlich ferne Kraft, welche diesem Strahl entspricht, ist nun in zwei Seitenkräfte zu zerlegen, wovon die eine senkrecht auf OP steht, und die andere in der unendlich fernen Ebene in einer und derselben Ebene mit OP liegt. Die erstere wird durch den Perpendikel von U auf OP dargestellt, die zweite durch die Entfernung seines Fusspunktes von O. Um diesen Fusspunkt zu bestimmen, denken wir uns durch U eine Ebene senkrecht auf OP gestellt; eine durch U gehende horizontale Linie in dieser Ebene wird durch die Linien u und u_1 projicirt, wovon erstere senkrecht auf OP steht. Eine zur verticalen Projectionsebene parallele Linie wird durch die Linien v und v_1 dargestellt, die durch einen Punkt von $(u\,u_1)$ geht, und von denen v_1 senkrecht auf OP in der Verticalprojection steht. Die Schnitte dieser beiden Linien $(u\,u_1)$ $(v\,v_1)$ mit der verticalen Ebene, welche in der horizontalen Projectionsebene durch OP projicirt wird, sind die Punkte d, $d_{,,}$; die sie verbindende Gerade liegt gleichzeitig in der Ebene, die senkrecht auf OP steht und in der Verticalebene, die OP projicirt, ihr Schnitt mit OP giebt daher die verticale Projection des gesuchten Fusspunktes $U, U_{,,}$. Zur Controle kann man die horizontale Projection desselben auf dieselbe Weise bestimmen.

Die senkrecht aufeinander stehenden Entfernungen $U_{,,}$ und $U_{,}$

dieses Punktes von O und U entsprechen den Momenten der Seitenkräfte der unendlich fernen Mittelkraft, von denen die $U_{''}$ entsprechende senkrecht auf OP steht; die andere $U_{'}$ entsprechende liegt jedoch mit OP in einer Ebene, weil $U_{'}$ senkrecht auf OP steht, wir können daher die Mittelkraft OP mit ihr zusammensetzen. Um die wahren Längen von $U_{'}$ und $U_{''}$, deren wir übrigens zu unserer Construction nicht bedürfen, zu erhalten, wurde noch auf Taf. 6 die Länge OP parallel zur verticalen Projectionsebene gestellt, die wahren Entfernungen OU und UP bestimmt, und mit diesen Längen das Dreieck construirt von dem $U_{'}$ die Höhe und $U_{''}$ das Segment ist. Diese Constructionen bedürfen keiner weitern Erläuterung.

Durch die Zusammensetzung wird OP in der Art nach C versetzt, dass die Momentenfläche von $C = OP$ mit Berücksichtigung des Sinnes gleich dem durch $U_{'}$ dargestellten Moment ist.

Die Perpendikel von den Endpunkten P auf die Radien, die durch die Schnitte von C mit den Verwandlungskreisen gehen, müssen in jeder der Projectionsebenen gleich der Differenz der Endpunkts-Ordinaten von $U_{'}$ sein, welche senkrecht auf diesen Projectionsebenen stehen. Diese Ordinaten-Differenzen sind gleich den Linien $h_{''}$ und $k_{''}$ in den horizontalen und verticalen Projectionsebenen. Beschreibt man daher von P aus Kreise mit den Radien $k'_{''} = k_{''}$ und $h'_{''} = h_{''}$, so bestimmen die Radien der Verwandlungskreise, welche diese Kreise berühren, die Schnitte von C mit den Verwandlungskreisen.

Zur Controle kann man noch untersuchen, ob die Projectionsfläche OC senkrecht auf $U_{'}$ steht.

Diese Richtungslinie C ist nun die Centralaxe. Ein Stück von C, das gleich der Mittelkraft der vier Kräfte 1 2 3 4 ist, ist stark ausgezogen. Diese vier Kräfte reduciren sich daher auf diese Kraft C und auf ein Drehungsmoment, das mit der Intensität $U_{''}\, r$ senkrecht um diese Axe dreht.

Hiermit schliessen wir die Zusammensetzung der Kräfte im Raum, ohne in die Zerlegung derselben nach bestimmten Richtungen einzutreten. Diese Zerlegungen würden zwar zu vielen interessanten Aufgaben Veranlassung geben, allein sie liegen doch dem Ingenieur ferner, der meist die an seinen Constructionen wirkenden Kräfte auf eine Ebene, ein Quer- oder Längenprofil, zu beschränken weiss.

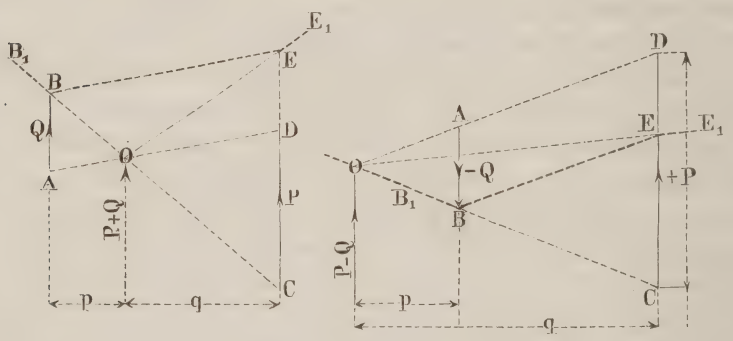
Fünftes Kapitel.

Parallele Kräfte.

46. Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte.

Wenn zwei Kräfte P und Q (Fig. 77) gegeben sind, die in den parallelen Richtungen AB und CD wirken, so vertausche man zur

Fig. 77.



Construction ihrer Mittelkraft ihre Richtungen, und trage mit Berücksichtigung des Zeichens Q in AB und P in CD auf, so geht die Mittelkraft durch den Schnitt O der beiden Linien BC und DA, welche die vier Punkte in der Art zu einem Viereck $ABCD$ ergänzen, dass dessen Umfang von den Kräften P und Q in demselben Sinn umfahren wird.

Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, hat man nur die Kraft Q mittelst der Parallelen BE zu AD in der Art auf ihre ursprüngliche Richtung CD nach DE zu projiciren, dass sich dort die P und Q mit Berücksichtigung des Sinnes zu CE addiren. Dann kann man $OCDE$ als ein Kräftepolygon und B_1BEE_1 als das entsprechende Seilpolygon betrachten, dessen Mittelseite BE mit OD parallel läuft, und dessen äussere Seiten sich in O schneiden, also ist O ein Punkt der gesuchten Mittelkraft. Die Grösse der Mittelkraft ist gleich $P + Q$ oder gleich CE.

Aus der Figur 77 und aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke OAB und ODC geht ferner hervor, dass die Richtung der

Mittelkraft zweier paralleler Kräfte mit der der Kräfte selbst übereinstimme, zwischen die Richtungen derselben falle, wenn beide in gleichem Sinne (bezüglich der unendlich fernen Geraden) dagegen jenseits dieser Richtungen und zwar auf die Seite der grössern Kraft (hier P, deren Richtung mit AB zusammenfällt) falle, wenn sie im entgegengesetzten Sinne wirken und dass endlich das Verhältniss der Entfernung der beiden Kräfte P und Q von O also

$$\frac{OB}{OC} = \frac{AO}{DO} = \frac{p}{q}$$

gleich dem umgekehrten Verhältniss der beiden Kräfte $= \frac{Q}{P}$ sei.

Dieser letztere Satz geht auch aus den Lehren von den Momenten, wonach $Pp = Qq$ sein muss, hervor.

Die häufig vorkommende reciproke Aufgabe, eine in Richtung und Grösse gegebene Kraft in zwei parallele Seitenkräfte zu zerlegen, die nach gegebenen Richtungen wirken, ist in obiger Fig. 77 ebenfalls gelöst. Durch einen Punkt O der Mittelkraft ziehe man zwei Strahlen OC und OE nach der auf der einen der beiden gegebenen Richtungen aufgetragenen und zu zerlegenden Kraft CE. Zieht man dann durch O einen Strahl OD parallel zur Linie BE, welche die Schnittpunkte der beiden Strahlen mit den gegebenen Richtungen der Seitenkräfte verbindet, so theilt dieser Strahl in D die gegebene Mittelkraft CE mit Berücksichtigung des Sinnes in die beiden Seitenkräfte CD und DE.

47. Zusammensetzung mehrerer paralleler Kräfte in der Ebene.

Sind mehr als zwei Kräfte in einer Ebene zusammenzusetzen, so ist es am zweckmässigsten, das Seilpolygon regelmässig zu construiren, was auch schon bei zwei Kräften vortheilhaft ist, wenn man ihrer Momente bedarf. Da parallele Kräfte sich erst in unendlicher Ferne schneiden, so kann man natürlich die erste der Kräfte nicht bis zu ihrem Schnitt mit der zweiten verlängern und als Pol im Kräftepolygon den Anfang der ersten Kraft annehmen, sondern es muss dieser Pol ausserhalb der geraden Linie, auf die sich das Kräftepolygon reducirt, weil die Richtungen aller

Kräfte zusammenfallen, angenommen werden. Jede Parallele zum Strahl des Anfangs der ersten Kraft kann dann als erste Seilpolygonseite betrachtet und das Seilpolygon nach den früheren Regeln construirt werden.

In Fig. 78 und 79 ist eine solche Zusammensetzung ausge-

Fig. 78.

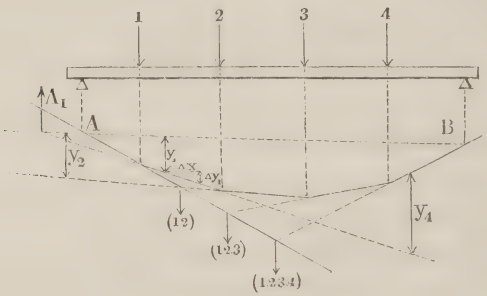
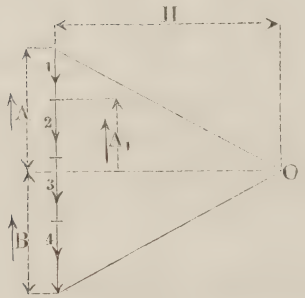


Fig. 79.



führt worden. Die in Fig. 79 aufgetragenen 4 Kräfte liegen in einer geraden Linie, die mit dem Pol *O* das Kräftepolygon bildet. Im Seilpolygon (Fig. 78) laufen die einzelnen Polygonseiten mit den entsprechenden Strahlen z. B. die Seiten zwischen 2 und 3 mit dem Strahl *O* (2 3), die äussersten Polygonseiten mit den äussersten Strahlen parallel.

Durch Verlängerung zweier beliebiger Seilpolygonseiten bis zu ihrem Schnitt erhält man einen Punkt der Mittelkraft, deren Richtung und Grösse durch das Kräftepolygon gegeben ist. Häufig ist die Mittelkraft der 1, 2, 3 .. ersten Kräfte zu bestimmen, dann

gestaltet sich die Construction wie Fig. 78, wo diese Mittelkräfte durch (1 2) (1 2 3) (1 2 3 4) angedeutet sind.

Wirken die 4 Kräfte an einem Balken oder einer andern Construction und handelt es sich darum, den Druck auf die Stützpunkte A und B zu bestimmen, so hat man (nach Nr. 46 S. 123 Fig. 77) nur die Mittelkraft (1 2 3 4) in zwei Seitenkräfte nach den Richtungen A und B zu zerlegen. Diess geschieht, indem man die äussersten Polygonseiten bis zu ihrem Schnitt mit den Parallelen durch A und B verlängert, und das Polygon durch die Schlusslinie AB schliesst. Der zu AB parallele Strahl $O(AB)$ (Fig. 79) im Kräftepolygon theilt dann die Summe (1 2 3 4) in die zwei Seitenkräfte A und B.

Stellt man das Gleichgewicht dadurch her, dass man diese Seitenkräfte in umgekehrter Richtung wirken lässt, wie es in Figur 79 durch die Pfeile angedeutet ist, so stellen diese Kräfte A und B den Gegendruck der Widerlager dar; wie es das Gleichgewicht verlangt, ist die Summe der 6 Kräfte A 1 2 3 4 B im Kräftepolygon $= 0$ und das Seilpolygon, in welchem die Linie AB jetzt eine Seite zwischen A und B darstellt, geschlossen (Nr. 41 S. 112).

Bei Brückenconstructionen ist es häufig nothwendig, die Mittelkraft aller ausserhalb eines bestimmten Querschnitts y_1 z. B. wirkenden Kräfte zu kennen. Diese Kräfte sind im vorliegenden Fall A und 1. Durch Verlängerung der Polygonseiten ausserhalb A und ausserhalb 1 (Nr. 27 S. 80) erhält man einen Punkt der Richtungslinie von $(A1)$ und das Kräftepolygon giebt die Summe A_1 von $(A1)$ wie es in beiden Polygonen angedeutet ist.

Wir machen hier darauf aufmerksam, dass, wie es aus der Figur hervorgeht, diese Summe mit der durch den Strahl $O(AB)$ im Kräftepolygon bezeichneten Kraft, hier 3, ihr Zeichen wechselt. Also die Kräfte $(A12)$ und $(A123)$ haben entgegengesetzte Zeichen und liegen auf entgegengesetzten Seiten des Polygons. Betrachtet man die Schlusslinie AB als Abscissenaxe, so liegt in 3 der Punkt, für welchen die Ordinate des Seilpolygons ein Maximum ist. In diesem Punkt ist die Tangente an das Seilpolygon natürlich parallel zur Schlusslinie, die Mittelkraft der ausserhalb wirkenden Kräfte ist eine unendlich kleine und ferne und ist gleich 0.

Das Seil- und Kräftepolygon, wie es hier in Fig. 78 u. 79 ge-

zeichnet ist, giebt unmittelbar die Gleichgewichtsbedingungen eines belasteten Bogenhängewerks (Fig. 80) oder einer Kettenbrücke (Fig. 81). Die Strahlen von O sind die Spannungen in den entsprechenden Bogenstücken oder Kettengliedern.

Fig. 80.

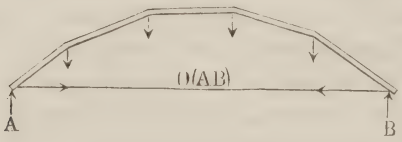
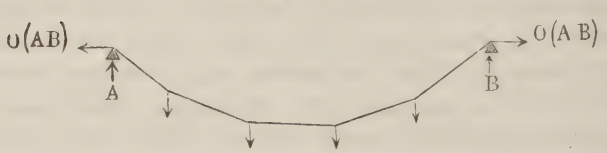


Fig. 81.



Der ganz allgemein bewiesene Satz, dass die Aenderung in der Reihenfolge der Zusammensetzung keinen Einfluss auf das Endresultat ausübe, gilt natürlich auch von parallelen Kräften. Man kann daher z. B. bei Kräfteplänen von Brücken, wie wir später sehen werden, zuerst das constante Polygon des Eigengewichtes auftragen, und die wechselnde zufällige Belastung immer nur zuletzt beifügen.

Schliesslich machen wir noch darauf aufmerksam, dass laut Nr. 35 S. 99 diese Polygone Parabeln umhüllen, wenn die Belastungen gleichmässig in irgend einer geraden Richtung gemessen vertheilt sind.

48. Momente paralleler Kräfte in der Ebene.

Setzt man bei Anwendung der in Nr. 37 S. 104 entwickelten Construction zur Bestimmung des Momentes einer beliebigen Zahl aufeinander folgender paralleler Kräfte die Länge H (Fig. 72 S. 104), das heisst die Kraft oder den Hebelarm, auf welchen man alle Momente reduciren will, gleich dem senkrechten Abstand des Punktes O von der Richtungslinie der Kräfte im Kräftepolygon, so werden die beiden zu Q und zu Q_1 (Fig. 71) parallelen Linien

$O A$ und $O A_1$ mit der Richtungslinie der Kräfte und mit der Richtung der Linie $h + h_1$ die senkrecht auf H steht, zusammenfallen. Das Maass des Momentes $h + h_1$ wird gleich dem Segment sein, das die Seilpolygonseiten ausserhalb der gegebenen Kräfte, auf der zu ihnen parallelen Linie abschneiden, in Bezug auf welche das Moment bestimmt werden soll. So ist z. B. Fig. 78 S. 124

das Moment der Kräfte $A1$ $A12$ 234
in Bezug auf die Querschnitte y_1 y_2 y_4
gleich den Producten $y_1 H$ $y_2 H$ $y_4 H$

wo der eine Faktor, jedoch beliebig welcher, als Kraft und der andere als Hebelarm abgegriffen werden muss. Der Drehungssinn der Momente kann natürlich immer nur der Richtung und Lage der Mittelkraft bezüglich dieses Querschnittes entnommen werden. Es bedarf kaum der Erinnerung, dass dieses Verfahren mit der Multiplication von Nr. 4 S. 22 Taf. 2_1 identisch ist.

Sehr wichtig ist es, den Punkt oder den Querschnitt zu ermitteln, für welchen das Moment der ausserhalb desselben wirkenden Kräfte ein Maximum ist, und den wir den Maximalmomenten-Punkt oder Querschnitt nennen wollen. Man erhält denselben, indem man (Fig. 78) eine Tangente parallel zur Schlusslinie $A B$ an das Seilpolygon zieht. So wie die Figur gezeichnet ist, geht dieselbe durch den Eckpunkt 3, und fällt mit keiner Polygonseite zusammen; denken wir uns jedoch das Polygon als Curve, wie sie bei Zusammensetzung vertheilter Lasten entsteht, so wird die Tangente mit der unendlich kleinen Polygonseite zusammenfallen, die mit der Schlusslinie $A B$ parallel läuft und deren Spannung im Kräftepolygon (Fig. 79) durch den Strahl $O(AB)$ angegeben ist. Dieser Punkt fällt demnach mit dem Punkt zusammen, dessen wir schon im Vorigen (Nr. 47 S. 125) erwähnt haben, und man kann daher ganz allgemein sagen:

Beim Maximalmomentenpunkt reducirt sich die Summe der ausserhalb desselben wirkenden Kräfte auf eine unendlich kleine und ferne Kraft, sie ändert hier ihr Zeichen, und ihre Mittellinie springt durchs Unendliche gehend, von einer Seite des Seilpolygons auf die andere hinüber.

In Anwendung auf einen belasteten Balken kann man auch sagen: der Maximalmomentenquerschnitt liegt da, wo das Ge-

wicht des von ihm abgeschnittenen Balkenstückes gleich dem Gewicht ist, mit dem er das Widerlager belastet.

Das Maass der ausserhalb des Maximalmomenten-Querschnitts wirkenden unendlich fernen Kraft ist demnach gleich dem Product des Auflagerdrucks mit der Entfernung zwischen ihm und der ihm gleichen Mittelkraft der am abgeschnittenen Balkenstück wirkenden Kräfte.

Ist speciell der Balken gleichförmig mit der Last p auf die Längeneinheit belastet, so fällt die Richtung sämmtlicher am Balken wirkenden Kräfte laut Nr. 35 S. 100 in die Mitte zwischen die Auflager, die Reactionen der Auflager sind daher gleich gross und der Maximalmomenten-Querschnitt liegt ebenfalls in der Mitte zwischen den Auflagern.

Bezeichnen wir die Länge der von ihm abgeschnittenen gleichlangen Balkenstücke, d. h. die halbe Spannweite mit l, so ist der Auflagerdruck gleich der Summe der am abgeschnittenen Balkenstück wirkenden Kräfte gleich pl, die Entfernung der Mittelkraft dieser letztern vom Auflager ist gleich $^1/_2\, l$, und das Maximalmoment ist nach Obigem gleich $pl \,.\, ^1/_2\, l = {}^1/_2\, pl^2$.

Endlich folgt noch aus einem Blick auf Fig. 79 S. 124, dass die Summe der ausserhalb eines beliebigen Querschnittes z. B. y_1 wirkenden Kräfte gleich den Kräften ist, die zwischen diesem Punkt und dem Maximalmomentenpunkt angreifen; bei concentrirten Lasten, wie z. B. der Kraft 3 im vorliegenden Fall, hat man sich diese natürlich in zwei Theile durch den Punkt (AB) getheilt zu denken, wovon der eine dem Balkenstück diesseits, der andere dem jenseits des Maximalmomentenpunktes zuzutheilen ist. Die Kraft 2 mehr diesem Theil der Kraft 3, bildet also die Summe A_1 der ausserhalb des Querschnittes y_1 wirkenden Kräfte. Denkt man sich den Querschnitt y_1 fortschreitend, jedoch so, dass dabei keine Angriffspunkte von Kräften überschritten werden, so entspricht einer Aenderung der Lage um die Länge $\triangle x$ (siehe Fig. 78 S. 124) eine Aenderung des Momentes der ausserhalb wirkenden Kräfte von $\triangle x$ $(A1)$, denn wo auch $A1$ bezüglich y_1 liege, so ändert sich, wenn keine neuen Kräfte hinzukommen, dessen Hebelarm um $\triangle x$. Setzt man daher für irgend einen Querschnitt die Summe der ausserhalb wirkenden Kräfte $= P$ und ihr Moment $= \mathfrak{M}$, wo beide Buchstaben noch mit den Zeichen der Querschnitte und Kräfte

versehen werden können, so hat man, weil dieses Moment auch gleich $H \triangle y_1$ ist, ganz allgemein

$$\frac{\triangle \mathfrak{M}}{\triangle x} = H \quad \frac{\triangle y}{\triangle x} = P.$$

Die Gleichung: $$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{P}{H}$$

geht übrigens auch aus der Aehnlichkeit der Figuren hervor, welche diese Längen im Seil- und im Kräftepolygon bilden.

Ganz dem oben Gesagten entsprechend wird $\mathfrak{M}$ ein Maximum wenn

$$\frac{\triangle \mathfrak{M}}{\triangle x} = P = 0$$

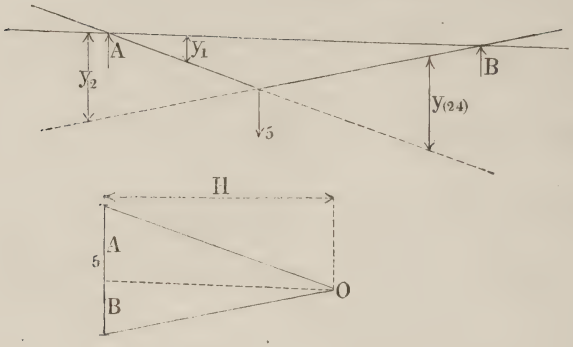
ist, d. h. wenn die Summe der ausserhalb des Querschnittes wirkenden Kräfte = 0 ist oder, wie wir uns vorhin ausdrückten, wenn sie sich auf ein Kräftepaar reducirt.

Wir glaubten diesen analytischen Ausdruck aus unsern Figuren herauslesen zu müssen, um den Zusammenhang derselben mit den üblichen Ableitungen zu zeigen (siehe z. B. Laisle und Schüblers vortreffliches Werkchen über den Bau der Brückenträger, deren ΣY und $\Sigma x Y$ unserm P und $\mathfrak{M}$ entspricht).

49. Aenderung der Summe und des Momentes (P und $\mathfrak{M}$) der ausserhalb eines festen Querschnittes auf einen Balken wirkenden parallelen Kräfte durch weitere dazu kommende Kräfte.

Da die parallelen Kräfte und ihre Momente sich einfach addiren, so können wir eine jede zu den 4 Kräften (Fig. 78 S. 78) kommende Kraft für sich behandeln, ihre Wirkungen auf einen gegebenen Querschnitt untersuchen, und diese Wirkungen addiren sich zu den der vorhandenen Kräfte. Führt man daher die Constructionen in Fig. 82 für eine hinzugekommene Kraft 5 genau Fig. 78 u. 79 (S. 124) entsprechend aus, so addiren sich z. B. die Pressungen auf die Widerlager A und B direct um die Drücke A und B von Fig. 82, die Momentenordinaten werden sich ebenfalls um die entsprechenden y_1 y_2 und y_{24} ändern, und die entsprechenden

Fig. 82.



Ordinaten in Fig. 78 würden um diese Ordinatendifferenzen grösser geworden sein, wenn 5 gleich in den Verband mit hereingenommen worden wäre. Es wird nun:

durch Aufbringen einer weitern Last zu vorhandenen Belastungen der Maximalmomentenpunkt dem Angriffspunkt dieser Last 5 genähert, und zwar desto mehr, je näher 5 bei dem Maximalmomentenpunkt liegt.

Denken wir uns z. B., es liege dieser Punkt zwischen 5 und *B*, so ändert sich jenseits desselben durchaus nichts als *B*, das grösser wird; es muss daher nach No. 48 S. 128 das Balkenstück zwischen ihm und *B* länger werden, damit sein Gewicht so gross als der Druck auf das Widerlager bei *B* werde. Der Maximalmomentenpunkt entfernt sich also von *B* und nähert sich 5, weil der Voraussetzung gemäss 5 auf der entgegengesetzten Seite liegt und zwar um so mehr, je grösser *B* ist, je näher also 5 an *B*, d. h. am Maximalmomentenpunkt angebracht wird, über den 5 der Voraussetzung gemäss nicht hinaus darf.

Ist die Belastung eines Balkens eine gleichmässige, so findet die grösste Annäherung des Maximalmomentenpunktes an ein Widerlager dann statt, wenn zwischen diesen der Balken total belastet ist. Kann man diese gleichförmige Belastung stellenweise, z. B. durch die Stellung einer Locomotive im Zug vergrössern, so wird die Annäherung des Maximalpunktes an das Widerlager desto grösser sein, je näher die Locomotive zu jenem gestellt wird. Da man jede Belastung jenseits dieses Punktes ihn wieder entfernt, so

muss die Locomotive jedenfalls vorn zu ihm hingestellt werden, damit er sich dem Widerlager am meisten nähere.

Fährt also ein Zug auf eine Brücke, mit der Locomotive vorn, herein, so nähert sich der Maximalmomentenpunkt beständig der heranrückenden Locomotive, bis er von ihrem vordersten Rad erreicht wird; bei weiterem Vorrücken des Zuges entfernt er sich wieder vom ersten Widerlager und nähert sich dem andern, bis das letzte Wagenrad über ihm wegfährt und dann tritt er wieder mit fortrollendem Zug in seine ursprüngliche Lage zurück.

Die Summe P der ausserhalb eines beliebigen Querschnitts y_1 (Fig. 78 und 82) wirkenden Kräfte wird vergrössert oder verkleinert, je nachdem eine Kraft jenseits oder diesseits dieses Querschnittes aufgebracht wird und zwar desto mehr, je mehr sich diese Kraft dem Querschnitt nähert.

Bei dieser Aussage denken wir uns die aufwärts wirkenden Kräfte positiv, und unter diesseits die Seite des Querschnittes y_1, auf der nun sämmtliche an der Construction wirkende Kräfte zu einer Mittelkraft vereinigt werden.

Denn durch Aufbringen der Kraft 5 (Fig. 82) jenseits des Querschnittes y_1 wird die Summe $A1$ (Fig. 78 S. 124) der ausserhalb dieses Querschnittes wirkenden Kräfte um das positive A von Fig. 82 vergrössert; wird dagegen 5 zwischen A und y_1 aufgebracht, so wird diese Summe um B vermindert, denn da die drei Kräfte A 5 B im Gleichgewicht sind, so ist das umgekehrte B also $-B$ die Mittelkraft der beiden diesseits des Querschnittes y_1 wirkenden Kräfte A und 5. Da ferner A und B desto grösser sind, je mehr sich 5 ihnen nähert, so folgt weiter noch, dass diese Vergrösserung und Verkleinerung der ausserhalb y_1 wirkenden Kräfte dann absolut am grössten ist, wenn sich die Last dem Querschnitt y_1 der immer zwischen der Last und dem maassgebenden Widerlagerdruck liegt, am meisten nähert.

Das obige Beispiel fortsetzend kann man daher sagen, dass für jeden Querschnitt die Summe der ausserhalb wirkenden Kräfte $(+P)$ ein Maximum sei, wenn das vorderste Locomotivenrad eines von B kommenden Zuges den Querschnitt y_1 erreicht; dagegen ein Minimum sei ($-P$ absolut ein Maximum), wenn das vorderste Locomotivenrad eines von A herkommenden Zuges diesen Querschnitt erreicht.

Das Moment der ausserhalb eines beliebigen Querschnittes y_1 (Fig. 78 und Fig. 82) wirkenden Kräfte wird durch jede innerhalb der Strecke AB zugefügte Kraft 5 vergrössert und zwar um desto mehr, je mehr sich diese Kraft dem Querschnitt nähert.

Da diese Momente laut Nr. 48 S. 127 den Ordinaten des Seilpolygons in Bezug auf dessen Schlusslinie proportional sind und diese Ordinaten sich bei jedem Querschnitt in Fig. 78 um die Ordinaten von Fig. 82 vergrössern, so gilt diese Vergrösserung nothwendig auch von den Momenten. Dass übrigens diese Vergrösserung überall innerhalb AB das gleiche Zeichen habe, welches auch die gegenseitige Lage des Querschnittes und der Last sei, geht daraus hervor, dass A (Fig. 82) als einzige Aenderung diesseits y_1, wenn 5 jenseits liegt und $-B$ als Mittelkraft von $A5$, wenn 5 diesseits liegt, in gleichem Sinne um y_1 drehen.

Ferner zeigt auch ein Blick auf dieselbe Figur, dass y_1 ein Maximum wird, wenn es mit 5 zusammenfällt.

Wenden wir das eben Bewiesene noch auf das oben angeführte Beispiel an, so folgt, dass das Moment der ausserhalb eines beliebigen Querschnittes wirkenden Kräfte dann ein Maximum sei, wenn die ganze Brücke belastet und die schwersten Lasten bei diesem Querschnitt concentrirt sind. Zwei mit ihren Kaminen gerade über dem in Frage stehenden Querschnitt zusammenstossende Locomotiven mit darauf folgenden Zügen bewirken daher das grösste Moment in demselben.

50. Mitteldruck der Räder eines Locomotivzuges.

Locomotivzüge bilden die bedeutendste, und man darf beinahe auch sagen die häufigste Belastung der neuzuerbauenden Brücken, und gar häufig hat man den Locomotivzug als grösste zufällige Belastung zu berücksichtigen. Da frägt es sich nun vor Allem: wo liegt der Angriffspunkt des Mitteldrucks oder die Verticallinie durch den Schwerpunkt einer gewissen Anzahl Räder, die vor oder hinter einem gewissen Brückenquerschnitt stehen.

Da die zur Bestimmung dieses Angriffspunktes nothwendigen Operationen bekannt sind, so haben wir nichts weiter zu thun als sie an einem Beispiel zu erläutern.

Taf. 7_I wurden die Verticalen des Mitteldrucks einer beliebigen Zahl aufeinanderfolgender Räder eines Engerth'schen Locomotivzuges bestimmt. Im Maassstab von 0,003 wurden die Radstände der mit Tender 10,6 Meter langen Locomotiven auf einer Horizontalen am obern Blattrand aufgetragen, und von 1 bis 35 numerirt; die Blattlänge reichte für 7 Locomotiven aus. Auf den hier nicht ausgezogenen Verticalen durch diese Radaxen liegen die Ecken des Polygons.

Die Belastungen pro Radaxe wurden auf der Verticalen am linken Blattrand im Maassstab von $0^m,003$ pro 10 Tonnen aufgetragen und zwar 13 Tn. für jedes der 3 ersten Locomotivräder und 8,5 Tn. für jedes der beiden letzten Tenderräder. Alle Belastungen tragen natürlich die Nummer des entsprechenden Rades.

Der horizontal gemessene Abstand des Poles von der Verticallinie der Kräfte wurde zu 0,06 Meter angenommen und bezeichnet daher eine Länge von 20 Meter oder ein Gewicht von 200 Tonnen, je nachdem man etwa die Momente als Gewichte oder als Hebelarme ablesen will.

Von den Strahlen des Seilpolygons, welche mit den Strahlen des Kräftepolygons parallel laufen, sind die 5 ersten nach rechts bis zum letzten 35. Strahl, die übrigen Strahlen dagegen nach links bis zum Schnitt mit diesen 5 ersten Strahlen verlängert. Es sind also die Schnittpunkte aller Strahlen mit irgend einem der ersten 5 Strahlen vorhanden und sie bestimmen den Mitteldruck der zwischen ihnen liegenden Räder.

Um die Entfernung dieser Schnitte von irgend einer der ersten 5 Radaxen unmittelbar abgreifen zu können, wurden die Verticalen durch die ersten 5 Radaxen eingezogen, die Kräfte sind auf der Verticalen durch den Anfang der ersten Locomotive aufgetragen.

Die Nummern zwischen je zwei Strahlen sind so eingeschrieben, dass sie der Radaxe entsprechen, auf deren Verticalen sich diese Strahlen schneiden; also ist auch der zwischen 25 und 26 durchgehende Strahl die Verlängerung der Polygonseite zwischen Nr. 25 und Nr. 26.

Wo nun jede einzelne Schwerpunktsdifferenz abgegriffen werden muss, bedarf keiner weitern Erklärung, und wir bemerken nur, dass wir die Entfernung des Mitteldrucks der 29 Axen, welche auf die 2. Axe folgen, von der 3. Axe einpunktirt haben. Sie ist

die horizontale Entfernung des Schnittes der Polygonseiten, welche die Strecken 3 bis 31 einschliessen von der Verticalen 3.

In diesem Abgreifen der Mitteldruckdistanzen besteht der hauptsächliche Nutzen dieses Polygons, und wir werden überall, wo es sich in der Folge darum handeln wird, irgend eine Construction mit einem Locomotivenzug zu belasten, diesen dem Nr. 49 S. 131 Gesagten entsprechend aufstellen und dann seinen Schwerpunkt und die Lage und Grösse seines Mitteldrucks am vorliegenden Polygon (Taf. 7_1) abgreifen.

Da in dieser Figur die Schnitte naher Polygonseiten etwas undeutlich sind, so wurde Taf. 7_2 dasselbe, aber nur 2 Locomotiven umfassende Polygon im doppelten Maassstab und mit einem Horizontalschub von nur 50tes = 5 Meter construirt.

Endlich wurde noch als Beispiel eines leichten Zuges dieselbe Operation mit Personenzug-Locomotiven Taf. 7_3 wiederholt.

Die Belastungen der Radaxen sind $4^1/_2$, 10,8, 2,7, 4, 4, 4 Tonnen, und die Totallänge der Locomotive mit Tender 12,6 Meter.

Es sind dies dieselben Locomotiven, die auch die Herren Laisle und Schübler ihren Tabellen (S. 70) zu Grunde gelegt haben.

51. Moment eines Locomotivenzuges in Bezug auf den Querschnitt eines belasteten Balkens.

Die Polygone (Taf. 7) eignen sich auch dazu, die Momente der zufälligen Belastung zur Anschauung zu bringen, und die für eine bestimmte Spannweite ungünstigste Belastungsart durch Verschieben des Zuges zu bestimmen.

So lange die Belastungen keine regelmässigen durch irgend ein Gesetz ausdrückbaren sind, lassen sich natürlich keine bestimmten Regeln über dieses Verschieben geben; man wird nicht im Stande sein von vornherein zu sagen: der und der Spannweite entspricht die und die ungünstigste Stellung des Zuges; man wird probiren müssen. Hierbei werden vielleicht aber die folgenden Betrachtungen, namentlich bei kleineren Spannweiten, von einigem Nutzen sein.

Werden auf irgend einem der Seilpolygone (Taf. 7) zwei Punkte durch eine Gerade mit einander verbunden, deren hori-

zontale parallel mit dem Horizontalschub gemessene Entfernung gleich einer gegebenen Spannweite ist, so sind die Ordinaten dieses Polygons in Bezug auf diese Linie laut Nr. 48 (S. 127) dem Moment der ausserhalb derselben wirkenden Kräfte proportional, sie müssen als Längen noch mit dem Horizontalschub als Kraft multiplicirt werden um das Moment zu geben; man kann diese Momente selbst direct abgreifen, wenn man den Maassstab selbst mit dem Horizontalschub multiplicirt. In Taf. 7_1 und 7_3 sind also 0,003 Metertonnen gleich 200 Meter, in Taf. 7_2 dagegen 0,006 gleich 50 Mtn.

Verschiebt man nun eine und dieselbe Spannweite $B\,B_,$ (Taf. 7_2) als Sehne auf dem Polygon, so dass ihre Endpunkte horizontal gemessen immer gleich weit abstehen: so werden diese Sehnen eine Parabel $T\,T_{,,}\,O\,T_,$ umhüllen, so lange sie sich auf dieselben zwei Polygonseiten stützen, weil ihre Endpunkte ähnliche Gebilde in diesen Leitseiten des Polygons beschreiben; und bestimmte feste Punkte $T_{,,}$ dieser Spannweiten oder Sehnen werden sich in Tangenten $B\,B_,$ an diese Parabeln bewegen, weil alle Tangenten sich gegenseitig in ähnliche Gebilde theilen. Die verticalen Entfernungen $E\,T_{,,}$ dieser Parabeln von den Polygonseiten und Ecken, stellen die Maximalmomente dar, welche unter einem Punkt E des Polygons hervorgebracht werden können, denn da die Parabel als Umhüllungscurve alle Sehnen ausschliesst, so kann keine die das Moment darstellende Ordinate $E\,T_{,,}$ jenseits $T_{,,}$ schneiden. Die Maximalordinate $E_,$ aber, über der Sehne $B\,B_,$ stellt das Maximalmoment dar, welchem derjenige feste Punkt $T_{,,}$ ausgesetzt sein kann, welcher die Tangente $B\,B_,$ beschreibt.

Endlich stellt der grösste verticale Abstand zwischen der Parabel und dem Polygon das Maximalmoment dar, dem überhaupt eine Spannweite $B\,B_,$ ausgesetzt sein kann. Es bedarf kaum der Erinnerung, dass die beiden letzten Maxima nur unter den Ecken des Polygons vorkommen können.

Die hier erwähnten Maxima zeigen sich sofort beim ersten Blick, sobald die Parabel $T\,T_{,,}\,O\,T$ construirt ist; da aber das Zeichnen derselben immerhin etwas umständlich ist, so müssen wir diese Maxima direct zu construiren suchen.

Bei gegebener Spannweite $B\,B_,$, horizontal gemessen, erhält man leicht den in einer bestimmten Verticalen E liegenden Punkt $T_{,,}$ der Parabel, und die dazu gehörige Sehnenlage $B\,B_,$ wenn man berücksichtigt, dass die Mitte $O_,$ der letztern, immer mitten

zwischen den durch den gegebenen und den durch den Schnittpunkt S der Leitpolygonseiten gehenden Verticalen, welche letztere die Richtung des Mitteldrucks der auf BB_1 ruhenden Lasten bezeichnet, liegt. Denn zieht man die Mitteltangente AA_1, deren Endpunkte gleichweit von O abstehen, so schneidet sie alle andern Tangenten, mithin auch BB_1 in der Mitte O_1. Als Schnitt von Tangenten liegt diese Mitte O_1 aber auch mitten zwischen den verticalen Durchmessern durch die Berührungspunkte T_1 und O.

Sind die horizontalen Abstände BT_1, B_1 gegeben, so dient das eben Entwickelte auch dazu, die Lage der Tangente BB_1 zu bestimmen, in der sich der feste Punkt T_1 bewegt, denn da O_1, BB_1 und OT_1 hälftet, so erhält man die Lage der Punkte B und B_1, wenn man die Horizontalabstände BO und OB_1 den Abständen T_1B_1 und BT_1 gleich macht.

Die grösste Ordinate einer Polygonecke E_1 bezeichnet nun das Maximalmoment, das im Querschnitt T_1 erzeugt werden kann, allein es ist klar, dass dies nicht in der Lage BB_1 stattfindet, sondern dann, wenn T_1 unter E_1 liegt.

Ist endlich die Lage des Endpunktes B_1 und E gegeben, was dann der Fall ist, wenn neue Räder in die Oeffnung eintreten, so erhält man die Lage des andern Endpunktes dadurch, dass man den Horizontalabstand SB_1 gleich BE macht.

Wir wären jetzt im Stande, die Maximalmomente direct zu construiren, wenn nur die Ecke E_1 bekannt wäre, bei der diese Maxima stattfinden. Diese lässt sich nun von vornherein nicht bestimmen, doch wird sie bei einer gleichartigen Belastung durch eine Reihe gleich schwerer aufeinander folgender Locomotiven oder Räder, meist eine dem Mitteldruck der Belastung S zunächst liegende Ecke sein. Eine Ausnahme hiervon wird nur dann stattfinden können, wenn die Belastung eine ungleichartige ist, wenn z. B. auf eine Reihe Locomotivräder eine Reihe weniger belasteter Wagenräder folgt: dann wäre es möglich, dass die schwereren Locomotivräder sich länger als die Verticale des Mitteldrucks über der Maximalmomenten-Ordinate erhielten. Denn so lange die Belastung eine gleichartige ist, wird das Polygon parabelartig in dem Sinn sein, wie wir es in Nr. 35 S. 100 auffassten; dann wird der der Mitte S zunächst liegende äussere Polygonwinkel E_1, immer die Richtungen (nicht die Lage) der Mitteltangenten also auch die der mit ihnen parallel laufenden Sehnen, auf welche die

Momente bezogen werden, enthalten, mithin die Maximalordinate bestimmen.

Ist dagegen die Belastung eine ungleichartige, so wird das sie darstellende Polygon einer Parabel gegenüber, die in denselben Winkel der äussersten Seiten einbeschrieben wäre, verschoben erscheinen. Die der leichteren Belastung entsprechende Hälfte wäre flacher, die der schwereren Belastung entsprechende hohler als die Parabel; diese und das Polygon schneiden sich also, erscheinen gegenseitig verschoben, bilden ein Herz und ihre Scheitel liegen weit auseinander. Der Scheitel der Parabel aber liegt in der Verticalen des Mitteldrucks, der des Polygons bezeichnet die Maximalordinate, mithin ist es möglich, dass dann die dem Maximalmoment entsprechende Ecke nicht mehr die der Verticalen des Mitteldrucks zunächst liegende ist.

Dieses Verhältniss findet übrigens bei keinem der Taf. 7 verzeichneten Polygone statt, trotzdem dass die Locomotivräder schwerer belastet und näher beisammen stehen als die darauffolgenden Tenderräder.

Sollte es aber bei einer gegebenen Belastung stattfinden, so kann die Ecke des Maximalmomentes nur durch Probiren bestimmt werden, was übrigens so leicht und schnell ausführbar ist, dass wir nicht weiter darauf einzugehen brauchen.

Uebersetzen wir das bisher graphisch Entwickelte in die Sprache der Wirklichkeit, so können wir uns zusammenfassend also ausdrücken:

Bei Belastung eines Balkens durch Räder (auf Punkte concentrirte Belastungen) liegt der Maximalmomenten-Querschnitt des Balkens immer unter einem Rad.

In der Regel ist es das dem Mitteldruck zunächst liegende Rad.

Bei ungünstigster Belastung stehen dieser Mitteldruck und dieses Rad gleichweit von der Balkenmitte ab.

Bei ungünstigster Belastung eines bestimmten Querschnitts steht auch über diesem ein Rad; das Rad kann dadurch bestimmt werden, dass man den Zug so auf den Balken stellt, dass der Querschnitt und die Richtung des Mitteldruckes gleich-

weit von der Balkenmitte abstehen, das Rad, unter dem nun das Moment ein Maximum ist, ist dasjenige, das über den gegebenen Querschnitt gerollt werden muss, damit auch in diesem das Moment ein Maximum sei. Hierbei darf natürlich kein Rad über die Oeffnung hinaustreten.

Das eben Ausgesprochene kann als Ergänzung des Nr. 49 S. 131 Gesagten betrachtet werden. Dem dort über das Maximum der ausserhalb eines bestimmten Querschnitts wirkenden Kräfte selbst Gesagten, haben wir hier noch nichts beizufügen.

52. Ungünstigste Stellung eines Locomotivzuges auf Balken verschiedener Spannweite.

Wir sind jetzt im Stande, die ungünstigste Lage des Zuges bei verschiedenen Spannweiten darzustellen. Es geschah dies Taf. 7_2 für kleine Oeffnungen.

Die das Maximalmoment darstellende Ordinate r, welche also das Rad bezeichnet unter dem dies stattfindet, ist je zwischen zwei Grenzöffnungen ausgezogen, die Lage der Balkenmitte ist —.—.— irt.

Nach Obigem liegt diese Mitte immer mitten zwischen dem Rad r und der Verticalen durch den Schnitt der äussersten zur Belastung gehörigen Polygonseiten, welche die Richtung des Mitteldruckes der Belastung bezeichnet. Da wo die Verticalen r und m zusammenfallen, ist r allein ausgezogen. m und mitunter auch r ändern ihre Lagen, wenn neue Räder auf den Balken rollen. Also kann dann eine und dieselbe Spannweite ebenfalls verschiedene Lagen haben, je nachdem man das weitere Rad dazu nimmt oder auslässt, weil in beiden Fällen die Balkenmitte in zwei verschiedenen m liegt. Zwei also verschiedene Lagen der Sehnen können als Grenzlagen betrachtet werden; sie wurden Taf. 7_2 auf verschiedene Weise eingezeichnet.

Mit den kleinsten Oeffnungen beginnend wurden bei dem Eintreten der Räder 3 und 4 als Ende der einen Spannweite diese Räder selbst angenommen, bei dem Eintreten des Rades 5 wurde ebenso verfahren, allein auch die Lage eingezeichnet, bei welcher mit dem Rad 5, r_2 ein Maximum wird; bei jedem Eintreten der Räder 1 und 4 der zweiten Locomotive wurden

die Enden der Oeffnungen so angenommen, dass sie vom eintretenden Rad gleich weit abstehen und zwar im Ganzen um die halbe Distanz der *m* vor und nach dem Eintritt des treffenden Rades. In allen diesen Fällen wurde das Maximalmoment für die beiden verschiedenen Lagen genau gleich gross gefunden, woraus hervorgeht, dass durch Aufbringen eines neuen Rades am Ende der Oeffnung eine im Maassstab der Zeichnung (er war der doppelte der Tafel) durchaus unmerkliche Aenderung des Maximalmomentes hervorgebracht wird. Es kommt daher gar nicht darauf an, die Grenzlagen der Sehnen bei dem Hinzukommen neuer Räder ganz genau zu bestimmen, und es genügt, wie es bei dem Eintreten des Rades 3 der zweiten Locomotive geschah, als Grenze eine einzige Sehne einzuzeichnen, welche durch die diesem Rad entsprechende Polygonseite geht, und deren Mitte *M* mitten zwischen den Mitten *m* der unmittelbar grössern und kleinern Spannweiten liegt. Diese Grenzspannweiten, bei denen je ein neues Rad um die halbe Distanz der *m* hineinrollend eintritt, wurden nicht überall eingezogen, weil die Figur ohnediess schon Linien genug enthält.

Beim Einzeichnen der Grenzlagen, für den Eintritt des ersten Rades der zweiten Locomotive, zeigte sich, dass gleichzeitig mit ihm auch das 2. Rad eintritt; es wurden die 3 Lagen der Spannweiten, die alle drei gleiche Momente geben, eingezeichnet.

Giebt man einem kürzern Brückenträger einen constanten Querschnitt, so kann man nun das Maximalmoment, dem derselbe unter der Belastung eines Engerth'schen Locomotivzuges zu widerstehen hat, unmittelbar aus Taf. 7_2 abgreifen, nachdem man für eine Spannweite von 8 Meter z. B. die also bezeichnete Linie eingezogen hat, deren Endpunkte 8 Meter weit von einander abstehen und deren Mitte in *m* liegt. Die durch *r* angedeutete Ordinate des Eckpunktes 2 misst (auf einer Zeichnung im doppelten Maassstab abgegriffen) 14,2 Tonnen oder 1,42 Meter. Da nun der Horizontalschub 5 Meter oder 50 Tonnen beträgt, so ist das Maximalmoment gleich 71 Metertonnen.

Zieht man durch den Pol des Kräftepolygons eine Parallele zur Sehne 8 Meter (der Schlusslinie des Seilpolygons) so theilt sie die Totalbelastung 1 2 3 4 in die Reactionen der beiden Widerlager $22^1/_4$ und $25^1/_4$ Tonnen.

Sehr häufig vergleicht man das Maximalmoment dem eines

gleichförmig belasteten Balkens; es geschieht dies hauptsächlich um leicht nach der Formel $^1/_2\ pl^2$ das Moment berechnen zu können. Bei graphischen Methoden bedarf man natürlich dessen nicht, weil man viel schneller zum Moment selbst gelangt, doch haben wir Taf. 7_2 den Vergleich noch durchgeführt. Da die Parabel Nr. 35 S. 99 die Curve der gleichförmigen Belastung ist und bei der Parabel die *subtg* gleich der doppelten Abscisse ist, so gelangt man leicht zur Richtung der Tangenten $p\ p$ einer über 8 Meter gespannten Parabel, deren Maximalordinate gleich der Ordinate der Polygonecke 2 ist, wenn man über der Mitte m der 8 Meter diese doppelte Ordinate aufträgt und ihren Endpunkt mit den Enden der Sehnen durch p und p verbindet. Zieht man nun durch den Pol des Kräftepolygons zwei Parallelen zu diesen Endtangenten, so schneiden sie auf der Verticalen der Kräfte die Belastung ab, welche gleichförmig über 8 Meter vertheilt, ein eben so grosses Maximalmoment als die Locomotive verursacht. Indem wir diese Last im Verhältniss von 8:10 oder 0,04 Meter: 0,05 Meter, wie es in der Figur angedeutet ist, vergrössern, so erhalten wir 88 Tonnen als ebenso intensive Belastung für 10 Meter. Die gleichförmige Belastung beträgt also, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, 8,8 Tonnen pro lfm. In der That giebt auch diese gleichförmig vertheilte Belastung laut Nr. 48 S. 128 ein Maximalmoment von $^1/_2 \cdot 8{,}8^1 \cdot 4^2 = 70{,}4$ Mtn., während wir weiter oben 71 Mtn. gefunden hatten.

Bei grössern Spannweiten genügt es nicht mehr, nur das Maximalmoment überhaupt zu kennen, sondern man muss es für verschiedene Querschnitte bestimmen. Wie dies geschieht, werden wir später auseinandersetzen, und haben uns hier damit begnügt, Taf. 7_1 die Momente für die 9 Knotenpunkte eines Balkens $\alpha\beta$ von 40 Meter Spannweite mit 10 Fächern darzustellen, indem wir ihn über das Seilpolygon gleiten liessen.

Links sind die gebrochnen Linien gezeichnet, welche von den 4 ersten, rechts die, welche von den 4 letzten Knotenpunkten beschrieben werden. Die innerste Linie wird von der Mitte beschrieben. Die Lage des Balkens selbst ist 3 Mal angedeutet.

Die verticalen Abstände dieser Linien von dem Seilpolygon geben die Momente in den verschiedenen Lagen des Zuges an. Es geht aus dieser Darstellung hervor, dass durch Verschiebung der Spannweite die Momente nicht bedeutend mehr geändert

werden; immerhin sind sie aber noch am grössten für einen beliebigen Knotenpunkt, wenn sich dieser unter einem der schwerbelasteten Locomotivräder befindet; da die Unregelmässigkeiten in der Krümmung der verschiedenen Curven gegen den Knotenpunkt der Mitte hin abnehmen, so können die Einsenkungen im Seilpolygon nie durch die der innern Polygone ausgeglichen werden. Die grössten Verticalabstände zwischen den verschiedenen Polygonen werden daher immer den Einsenkungen des Seilpolygons bei den am meisten belasteten Rädern entsprechen.

Um zu zeigen, wie sich diese Momente bei der Engerth'schen und bei einer leichten Personenzuglocomotive verhalten, wurde auch Taf. 7_3 die Spannweite von 40 Meter einmal eingetragen.

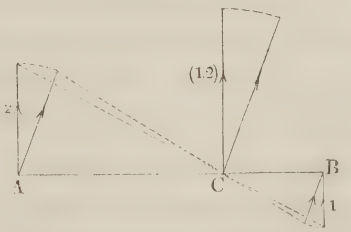
Sechstes Kapitel.

Der Schwerpunkt.

53. Der Mittelpunkt paralleler Kräfte.

Drehen sich zwei parallele Kräfte 1 und 2 um bestimmte Punkte *A* und *B* (Fig. 83) im Raum in der Art, dass sie immer parallel und gleich gross bleiben, so dreht sich auch ihre Mittelkraft (1 2) um einen bestimmten Punkt *C*, der nach Nr. 46 S. 123 auf der Verbindungslinie *A B* liegt und ihre Länge so theilt, dass sich die Segmente umgekehrt wie die Kräfte verhalten. Kommt noch eine dritte Kraft 3 hinzu, die sich ebenfalls um einen festen Punkt und stets um gleichviel wie die übrigen Kräfte dreht, so gilt dasselbe bezüglich der Kräfte (1 2) und 3 und so fort von einer beliebigen Anzahl Kräfte. Man kann daher allgemein sagen:

Fig. 83.



Wenn parallele Kräfte von beliebiger Intensität, also auch im entgegengesetzten Sinne wirkende, sich um feste Punkte im Raum so drehen, dass sie sich stets parallel bleiben, so dreht sich auch ihre Mittelkraft um einen festen Punkt im Raum, der der Mittelpunkt dieser Kräfte heisst. — Bestehen die Kräfte aus dem Gewichte starr mit einander verbundener Massen, so heisst er auch der Schwerpunkt der Kräfte.

Sind die einzelnen Punkte im Raum, z. B. die Angriffspunkte der Kräfte 1 2 3 4 in Fig. 84, durch ihre Projectionen auf zwei sich schneidenden Ebenen gegeben, so wird der Mittelpunkt dieser Kräfte jederzeit durch die Richtungslinie der Mittelkraft projicirt, die man erhält, wenn man an den Projectionen dieser Angriffspunkte in beliebigen, jedoch in der Projectionsebene enthaltenen Richtungen parallele Kräfte von der gegebenen Intensität wirken lässt.

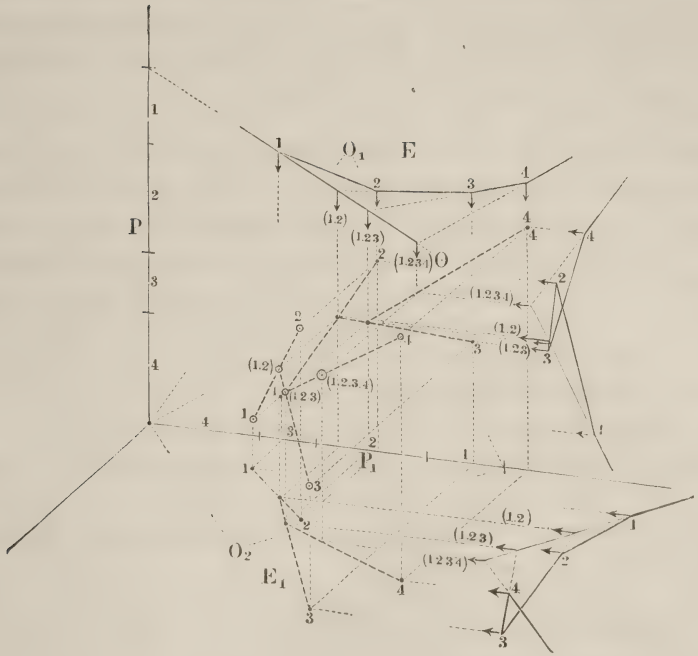
Denn zerlegt man jede der an den Punkten im Raum wirkenden Kräfte in der projicirenden Ebene in eine unendlich ferne Kraft und in eine parallele Seitenkraft gleicher Richtung und Grösse in der Projectionsebene, so können diese letztern Kräfte auf gewöhnliche Weise wie parallele Kräfte in der Ebene mittelst eines Seilpolygons zu einer Mittelkraft zusammengesetzt werden.

Die Richtungen der unendlich fernen Kräfte fallen alle in die unendlich ferne Gerade, welche die Stellung der projicirenden Ebenen bestimmt, sie liegt daher auch mit der in der Projectionsebene erhaltenen Mittelkraft in einer und derselben Ebene und kann mit dieser zur Mittelkraft der parallelen Kräfte zusammengesetzt werden. Die Ebene, in der dies geschieht, ist daher die die Mittelkraft projicirende Ebene, welche demnach auch durch die Mittelkraft geht, die man durch Zusammensetzung der in die Projectionsebene projicirten Kräfte erhalten hat.

Da keine Voraussetzungen bezüglich der verschiedenen gewählten Richtungen und Stellungen gemacht wurden, so gilt das eben Gesagte allgemein für jede Stellung und Lage der Projectionsebene und für jede Richtung der die Punkte im Raum auf die gewählte Ebene projicirenden Parallelstrahlen.

Wählt man nun noch in der Projectionsebene die Richtung der Parallelkräfte, so bestimmt diese Richtung und die Richtung der projicirenden Linien die Stellung der die Kräfte projicirenden

Fig. 84.



Ebenen. Aendert man die Richtung der Kräfte in der Projectionsebene, so werden sich die projicirenden Ebenen um die projicirenden Strahlen aller Angriffspunkte der Kräfte drehen. Durch diese Aenderung kann man daher die Projection des Mittelpunktes, jedoch nicht die Länge der Projectionsstrahlen erhalten. Zur Bestimmung dieser muss noch wenigstens einmal die Richtung der projicirenden Parallelstrahlen geändert werden. Es genügt dann, die an den neuen Projectionspunkten wirkenden Kräfte noch einmal in beliebiger Richtung zusammenzusetzen, um eine projicirende Ebene zu erhalten, welche den schon erhaltenen projicirenden Parallelstrahl nicht enthält, und daher auf ihm den Mittelpunkt der Kräfte abschneidet. Es sind daher 3 Bestimmungen der Mittelkraft paralleler Kräfte nothwendig, weil jede derselben eine Ebene giebt, die den Mittelpunkt enthält.

Nach Obigem könnten diese Operationen alle in einer und derselben Ebene vorgenommen werden, wenn in derselben die Projectionen aller Angriffspunkte durch zwei verschiedene Richtungen gegeben wären, allein es ist zweckmässiger, wenn alle

Punkte durch orthogonale Projectionen auf zwei zu einander senkrechten Ebenen gegeben sind, ganz nach den Regeln der darstellenden Geometrie zu verfahren und mit der Drehung des projicirenden Strahles um $\frac{\pi}{2}$ auch die Projectionsebene um so viel drehen.

In Fig. 84 ist dargestellt, wie solche Operationen ausgeführt werden können. Die Angriffspunkte 1 2 3 4 der Kräfte im Raum sind durch ihre Projectionen auf eine verticale und horizontale Ebene E und E_1 gegeben. Indem man nun annimmt, es wirken die Kräfte vertical an diesen Punkten, erhält man das Kräftepolygon PO; das Seilpolygon, welches ihm entspricht, giebt die Verticallinien (1 2) (1 2 3) (1 2 3 4), in welchen die Projectionspunkte der entsprechenden Mittelpunkte liegen. Nimmt man nun an, die Kräfte wirken horizontal, so erhält man das Kräftepolygon $P_1 O_1$, das entsprechende Seilpolygon giebt die Horizontallinien (1 2) (1 2 3) (1 2 3 4), welche durch ihren Schnitt mit den gleichnamigen Verticalen, die Projectionen der entsprechenden Mittelpunkte vollkommen bestimmen.

In der horizontalen Projectionsebene genügt es nun, ein einziges Polygon für Kräfte, welche parallel zur Grundlinie wirken und das Kräftepolygon $O_2 P_1$ geben, zu construiren; sie geben die Parallellinien (1 2) (1 2 3) (1 2 3 4) zur Grundlinie, auf denen die Projectionen der gleichnamigen Kräfte liegen, die nun vollständig bestimmt sind, weil die von diesen Projectionen auf die Grundlinie gefällten Perpendikel diese in einem und demselben Punkt treffen müssen. Es versteht sich von selbst, dass die Angriffspunkte 1 (1 2) 2; (1 2) (1 2 3) 3; (1 2 3) (1 2 3 4) 4 auf geraden Linien liegen müssen, wie es durch — — — Linien angedeutet ist.

Aus den bisherigen Constructionen geht ferner noch hervor, dass es auf die Form des Seilpolygons keinen Einfluss ausübt, wenn in der die Kräfte projicirenden Ebene diese der Projectionsebene genähert oder von ihr entfernt werden.

54. Das Moment paralleler Kräfte bezüglich einer Ebene.

Da die unendlich fernen Seitenkräfte, der auf verschiedene Punkte im Raume wirkenden parallelen Kräfte, zum Maass das Moment derselben bezüglich ihrer Projection haben, und dieses

dem Product der Kraft mit der Länge des den Angriffspunkt projicirenden Strahles proportional ist, da ferner alle diese unendlich fernen Seitenkräfte in einer und derselben unendlich fernen Linie liegen, sich daher dort einfach zu einer Mittelkraft addiren, welche das Maass des Momentes der Mittelkraft bezüglich ihrer Projection ist, so kann man, wenn man unter dem Moment paralleler Kräfte bezüglich einer gegebenen Ebene im allgemeinen Sinne das Product dieser Kräfte mit der Länge der Parallelstrahlen versteht, welche ihre Angriffspunkte in beliebiger Richtung auf die gegebenen Ebenen projiciren, sagen:

Das Moment paralleler Kräfte bezüglich einer gegebenen Ebene ist gleich dem Moment ihrer Mittelkraft bezüglich derselben Ebene.

Hieraus geht hervor, dass, wenn die Angriffspunkte verschiedener paralleler Kräfte in parallelen Ebenen beliebig verschoben werden, der Angriffspunkt der Mittelkraft sich in einer ebenfalls zu jenen parallelen Ebene verschiebe, was übrigens auch schon aus den Constructionen Fig. 84 (S. 143) direct hervorgeht.

Das Moment einer beliebigen Zahl aufeinanderfolgender und durch ein Seilpolygon in einer Projectionsebene mit einander verbundener paralleler Kräfte, in Bezug auf irgend eine projicirende Ebene: ist gleich dem Product des Segments, den die äussern Polygonseiten auf der Projection dieser Ebene abschneiden, mit der Höhe des Kräftepolygons.

Eine weitere Folge sowohl der Construction als auch des oben ausgesagten Momententheorems ist folgender Satz:

Können alle zusammenzusetzenden Kräfte zu zweien oder mehreren so gruppirt werden, dass die Mittelpunkte aller Gruppen:

in einen Punkt zusammenfallen, so ist dieser der Mittelpunkt aller Kräfte,

in eine gerade Linie oder in eine Ebene fallen, so liegt auch der Mittelpunkt aller Kräfte in dieser geraden Linie oder in dieser Ebene.

55. Vom Schwerpunkt im Allgemeinen.

Da in Obigem keine bestimmten Voraussetzungen bezüglich der Zahl und Entfernung der einzelnen Kräfte gemacht wurden,

so gilt Alles auch noch, wenn erstere unendlich gross und letztere unendlich klein wird. In diesem Fall sind dann z. B. alle Körper und Massen, welche unter dem Einfluss der Anziehung der Erde oder anderer *paralleler* Einwirkungen Druck ausüben, der Mittelpunkt dieser Drücke, Gewichte oder Kräfte ist dann der Schwerpunkt.

Zur Bestimmung des Schwerpunktes denkt man sich den Körper in endlich oder unendlich kleine Elemente zerlegt, deren Schwerpunkte bekannt sind und deren Gewichte dann nach irgend einer der bisher entwickelten Regeln zusammengesetzt werden können.

Häufig ist man im Stande die Elemente des Körpers so zu gruppiren, dass ihre Schwerpunkte in eine Ebene oder in eine gerade Linie fallen, dann beschränken sich die Operationen auf diese Ebene oder diese Linie. Handelte es sich z. B. darum, den Schwerpunkt einer geraden Eisenbahnschiene constanten Querschnittes zu bestimmen, so könnte man die ganze Schiene in prismatische Elemente zerlegt denken, deren Schwerpunkte alle in dem von den Endpunkten gleichweit abstehenden Querschnitt lägen, und deren Gewichte den Basen der Prismen, d. h. den entsprechenden Theilen der Querschnittsfläche proportional wären.

Hier würde also diese Querschnittsfläche als Trägerin der Schwerpunkte all der prismatischen Elemente und durch dieselben gleichförmig belastet erscheinen; man würde diesen Schwerpunkt erhalten, indem man den Querschnitt in Flächenelemente zerlegt und diesen Kräfte beimisst, die ihrer Ausdehnung proportional sind. Auf diese Weise kann also auch von der Bestimmung des Schwerpunktes von Flächen und auch von Linien die Rede sein, die man sich als Träger der Schwerpunkte von Körpern denkt. Durch solche Körper können Linien und Flächen gleichförmig und ungleichförmig belastet sein. Unter der Voraussetzung *gleichförmiger Belastung* werden wir hier die Schwerpunkte einiger Linien und Flächen bestimmen.

In diesem ganzen Abschnitt wird immer nur von parallelen Kräften die Rede sein.

56. Der Schwerpunkt von Linien.

a) Der Schwerpunkt der geraden Linie

liegt in ihrer Mitte, denn man kann dieselbe von der Mitte aus nach beiden Seiten hin in Elemente theilen, von denen je zwei gleich lang und schwer sind und von der Mitte gleichweit abstehen; es liegt daher der Schwerpunkt jeder einzelnen Gruppe mithin auch der aller Gruppen zusammen, d. h. der Schwerpunkt der Linie selbst in ihrer Mitte.

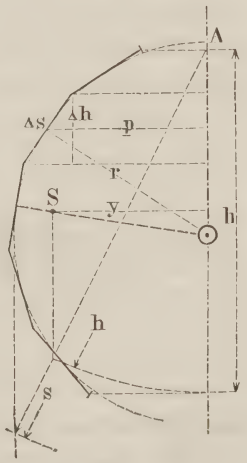
b) Den Schwerpunkt einer gebrochenen Linie

erhält man, wenn man alle Mitten der einzelnen Linien als Angriffspunkte von Kräften betrachtet, die diesen Linien proportional sind. Liegen alle Stücke in einer Ebene, so genügen zwei Kräftepolygone den Schwerpunkt zu bestimmen; ist diess jedoch nicht der Fall, so braucht man deren drei nach Fig. 84 (S. 143).

Besteht die gebrochene Linie aus einer Zahl von Seiten eines um einen Kreis beschriebenen Polygons gleicher Seitenlängen, bei dem also die Schwerpunkte aller Linien auf einem Kreisbogen liegen, so gelangt man, in Berücksichtigung, dass laut Fig. 85

$$\frac{\triangle s}{r} = \frac{\triangle h}{p}$$

Fig. 85.



ist, wo s die ganze Länge der gebrochenen Linie, $\triangle s$ aber die Länge einer Polygonseite und die übrigen Buchstaben die Linien bezeichnen, auf denen sie stehen, zum Momente der gebrochenen Linie

$$\mathfrak{M} = \Sigma p \triangle s = \Sigma r \triangle h = r h = y s$$

woraus sich

$$y = r \cdot \frac{h}{s}$$

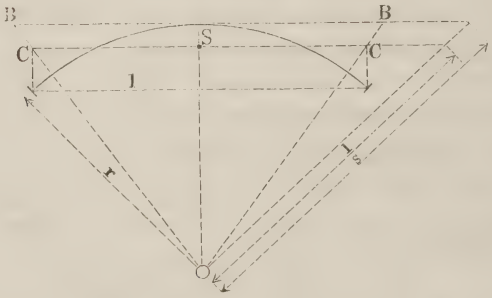
ergiebt.

In Fig. 85 wurde y construirt, indem man von A aus auf einer zu h parallelen Tangente die gestreckte Länge s des Polygons abschnitt, und auf demselben s auch h auftrug, dessen Endpunktsordinate gleich y sein muss. Eine Parallele durch ihn schneidet dann auf dem das Polygon halbirenden Radius den Schwerpunkt S ab; denn dieser liegt auf diesem Radius, weil der Schwerpunkt der mittelsten Seite und je zweier von diesen gleichweit abstehender Seiten, mithin auch der aller Seiten, auf ihm liegt (Nr. 54 S. 145).

c) Der Schwerpunkt eines Kreisbogens.

Den Kreisbogen kann man als regelmässiges Polygon von unendlich vielen Ecken betrachten, und bestimmt dann den Schwerpunkt desselben genau, wie wir eben den des regelmässigen Vielecks bestimmt haben; die Constructionen von Fig. 86 unterscheiden sich von denen in b nur durch andere Anordnung. Der Schwerpunkt S liegt auf dem den Bogen halbirenden Radius $\bigcirc S$, streckt man dann den Bogen auf die Mitteltangente nach $BB = s$, so schneiden Parallele

Fig. 86.



durch die Bogenenden zum Radius $\bigcirc S$ auf den Linien $\bigcirc B$ Punkte CC ab, die mit dem Schwerpunkt S auf einer Geraden liegen.

Denn man hat

$$\bigcirc S = r.\ \frac{CC}{BB} = r.\ \frac{l}{s}$$

wo l die Sehnen und s die Bogenlänge bezeichnet.

Ein anderer Punkt dieser Linie CSC wird erhalten, indem man von $\bigcirc$ aus auf der Mitteltangente BB die Bogenlänge s abschneidet, und auf derselben Linie die Sehnenlänge l aufträgt, deren Endpunkt in CSC liegt.

d) Den Schwerpunkt beliebiger krummen Linien

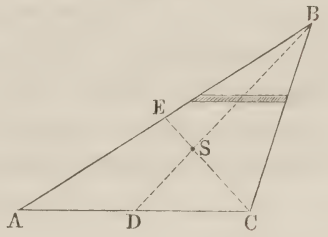
erhält man wohl am einfachsten, indem man diese Linien in gleichlange Stücke theilt, die so kurz sind, dass sie als gerade Linien betrachtet werden können, und dann Parallele durch ihre Mittelpunkte durch zwei oder drei Seilpolygone verbindet, die den Schwerpunkt geben.

57. Der Schwerpunkt von geradlinigen Figuren.

a) Der Schwerpunkt eines Dreiecks.

Denkt man sich die Fläche des Dreiecks (Fig. 87) durch Parallellinien zur Grundfläche AC in Elemente zerlegt, von denen eins schraffirt wurde, so liegen die Schwerpunkte aller dieser Elemente auf der geraden Linie BD, die sie alle und daher die Grundlinie AC halbirt; aus demselben Grunde liegt er auch auf der Linie CE, welche AB hälftet, und auf der Linie, welche A mit der Mitte von BC verbindet.

Fig. 87.



Zur genaueren Bestimmung des Schnitt- und Schwerpunktes S, der übrigens am leichtesten durch Ziehen der Linien BD und CE construirt wird, giebt das Dreieckschnittverhältniss des durch die Secante CSE geschnittenen Dreiecks ADB:

$$\frac{DC}{CA} \cdot \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BS}{SD} = -1$$

Nun ist aber mit Berücksichtigung des Sinnes

$$\frac{DC}{CA} = -\,{}^1/_2 \text{ und } \frac{AE}{EB} = +1$$

mithin $\frac{BS}{SD} = +2.$

Der Schwerpunkt des Dreiecks S liegt daher im Drittel der Linie DB von dem Mittelpunkt der Basis gegen die gegenüberliegende Spitze zu gerechnet. Da die Höhen der Punkte B und S über der Basis AD sich wie die Längen SD und BD verhalten, so

kann man auch sagen, der Schwerpunkt des Dreiecks liege im $^1/_3$ der Höhe über jeder Basis.

Liegt das Dreieck im Raum und bezeichnen $a\,b\,c\,s$ die Ordinaten der Eckpunkte und des Schwerpunktes in Bezug auf eine beliebige Ebene, so ist die Ordinate des Punktes

$$D = \frac{a + c}{2}$$

und die des Schwerpunktes

$$s = \frac{a + c}{2} + {}^1/_3 \left[b - \frac{a + c}{2} \right] \text{ oder}$$

$$s = {}^1/_3 \, (a + b + c)$$

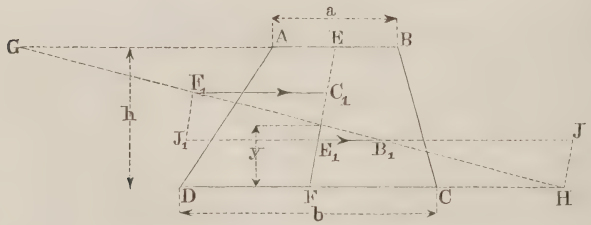
b) Schwerpunkt des Parallelogramms.

Der Schwerpunkt des Parallelogramms liegt in der Mitte jeder Diagonalen und jeder Linie welche die Mitten zweier gegenüberliegenden Seiten mit einander verbindet. Alle diese Linien schneiden sich aus selbstverständlichen Gründen im Schwerpunkt.

c) Schwerpunkt des Paralleltrapezes.

Der Schwerpunkt des Paralleltrapezes *ABCD* (Fig. 88) liegt vorerst in der Linie *EF*, welche die Mitten der beiden parallelen Seiten verbindet.

Fig. 88.



Denkt man sich dann das Trapez in zwei Dreiecke *ABD* und *BCD* zerlegt (die Diagonale *BD* ist in der Figur nicht gezogen), so sind ihre Inhalte gleich *EB* und *FC*, multiplicirt mit *h* und

ihre Schwerpunkte liegen im Drittel der Höhe jedes Dreiecks. Werden daher den Inhalten proportionale zu AB und DC parallele Kräfte, deren Richtungen durch die Schwerpunkte gehen, angenommen, dann nach Nr. 46 S. 122 deren Lage vertauscht und von der Linie EF aus so aufgetragen, dass das mittlere Drittel $C_1 E_1$ die dritte Seite des Vierecks (Fig. 77) bilde, so fällt FC nach $F_1 C_1$, EB nach $E_1 B_1$ und die Verbindungslinie $B_1 F_1$ schneidet auf EF den Schwerpunkt ab. Das Eintheilen der Linie EF oder der Höhe des Trapezes in drei gleiche Theile kann man sich ersparen, wenn man $B_1 F_1$ bis zu den Schnittpunkten G und H mit den Parallelseiten verlängert, und $J_1 F_1$ und HJ parallel zu EF zieht; dann ist

$$B_1 J = J_1 B_1 = F_1 C_1 + E_1 B_1$$

und $E_1 J = FH = F_1 C_1 + 2\ E_1 B_1 = FC + AB$

Es ist daher $CH = AB$.

Auf dieselbe Weise kann man beweisen, dass $AG = CD$ ist.

Trägt man daher von diagonalen Eckpunkten A und C die gegenüberliegenden Seiten, in der Verlängerung der Parallelseiten nach AG und CH auf, so schneidet die Linie GH den Schwerpunkt auf der Linie ab, welche die Mitten der Parallelseiten mit einander verbindet.

Die Entfernung y des Schwerpunktes von der einen Parallelseite b (Fig. 88) ist gleich

$$y = h \cdot \frac{FH}{FH + EG}$$

Nun ist aber, wenn die Längen der Parallelseiten mit a und b bezeichnet werden

$$FH = a + {}^1/_2\, b$$

$$EG = {}^1/_2\, a + b$$

$$FH + EG = {}^3/_2\, (a + b)$$

daher $y = h \cdot \dfrac{a + {}^1/_2\, b}{{}^3/_2\, (a + b)} = {}^1/_3\, h \cdot \dfrac{2a + b}{a + b}$

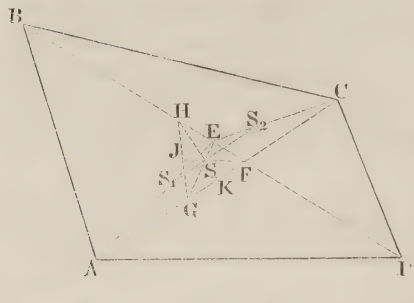
und die Entfernung von der andern Parallelseite

$$y_1 = {}^1/_3\, h \cdot \frac{a + 2b}{a + b}$$

d) Schwerpunkt eines unregelmässigen Vierecks.

Man theile das Viereck $ABCD$ (Fig. 89) durch die Diagonale BD in zwei Dreiecke ABD und CDB, deren Schwerpunkte S_1 und S_2 in dem $^1/_3$ der Linie EA und EC liegen, welche die Mitte E der Diagonale mit den gegenüberliegenden Ecken A und C verbindet. Der Schwerpunkt S des Vierecks theilt nun die Verbindungslinie $S_1 S_2$ der beiden Dreiecksschwerpunkte so, dass die Segmente $S_1 S$ und $S S_2$ sich umgekehrt, wie die Inhalte der beiden entsprechenden Dreiecke verhalten. Da sich nun diese wegen der gleichen Basis BD, wie die Segmente AF und FC der andern Diagonale AC verhalten, und diese Diagonale parallel zu $S_1 S_2$ liegt, so erhält man den Punkt S einfach dadurch, dass man die Segmente auf AC vertauscht, d. h. $AG = FC$ und $GC = AF$ macht, es liegt dann S auf der Linie EG, denn man hat

Fig. 89.



$$\frac{S_1 S}{S S_2} = \frac{AG}{GC} = \frac{FC}{AF} = \frac{\triangle CDB}{\triangle ABD}$$

Berücksichtigt man nun noch, dass S im Drittel von EG liegt, weil S_1 und S_2 in $^1/_3$ der Linien EA und EC liegen, so kann man sagen:

Der Schwerpunkt S eines Vierecks $ABCD$ liegt in dem $^1/_3$ der Strecke EG, von der Mitte E einer Diagonale gegen den Punkt G, den man durch Vertauschen der Segmente auf der andern Diagonale erhält.

Wiederholt man diese Construction mit Vertauschung der Diagonalen des Vierecks. So liegt auch der Schwerpunkt S im Drittel der Linie KH, welche die Mitte K von CA mit dem Punkt H verbindet, der durch Vertauschen der Strecken der FD und BF entstanden ist. Bemerkt man nun, dass die Mitten E und K auch in der Mitte von GF und HF liegen, so kann man auch sagen: der Schwerpunkt eines Vierecks fällt mit dem des Dreiecks zusammen, dessen Eckpunkte der Schnitt

F der Diagonalen und die durch Vertauschen der Diagonalsegmente entstandenen Punkte H und G sind.

Es liegen also auch die Punkte F, S und die Mitte J von HG in einer geraden Linie. Werden nun CD und AB parallel, so wird auch HG parallel zu diesen Linien, und ihre drei Mitten liegen mit F und dem Schwerpunkt S auf einer geraden Linie, was mit dem oben in c) Gesagten übereinstimmt. Auch hieraus lässt sich leicht der dort schon gegebene Abstand des Schwerpunktes von einer der Parallelseiten des Vierecks ableiten.

e) Der Schwerpunkt mehr als vierseitiger Polygone.

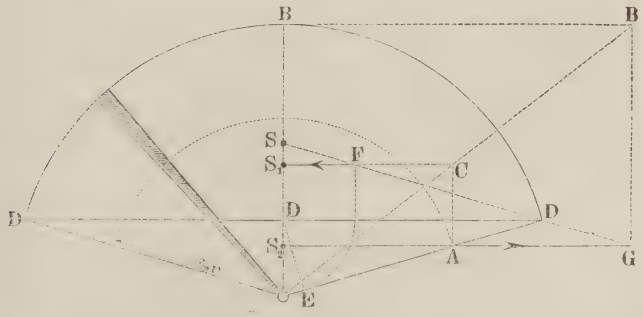
Den Schwerpunkt von Vielecken mit mehr als vier Seiten bestimmt man am leichtesten durch Zerlegen derselben in Vierecke, und Verbindung der Schwerpunkte dieser durch Seilpolygone nach: Nr. 53 S. 143.

58. Der Schwerpunkt krummliniger Figuren.

a) Der Schwerpunkt eines Kreissectors.

Denkt man sich den Kreissector (Fig. 90) in concentrische Sectorenelemente zerlegt, so liegen die Schwerpunkte aller dieser Elemente, die man als Dreiecke betrachten kann, von denen eins

Fig. 90.



schraffirt ist, in dem Kreisbogen ....., der mit $^2/_3\ r$ beschrieben wurde.

Da ferner dieser Kreisbogen als Träger aller dieser Schwer-

punkte durch diese gleichmässig belastet erscheint, so fällt der Schwerpunkt S_1 des Kreissectors mit dem des concentrischen Kreises ..... von $^2/_3 r$ Halbmesser zusammen.

Nach c) (Fig. 86 S. 148) erhält man aber den Schwerpunkt dieses Kreisbogens, wenn man Fig. 90 die halbe Länge seines Umfangs auf die Mitteltangente nach BB streckt, $\bigcirc$ mit B verbindet und den Endpunkt A des Schwerpunktbogens parallel zum Mittelradius nach C auf $\bigcirc B$ projicirt. Der Schwerpunkt S_1 ist dann der Fusspunkt des Perpendikels von C auf den Mittelradius.

b) Schwerpunkt eines Kreissegments.

Das Segment DBD (Fig. 90) betrachte man als Differenz des Sectors und des Dreiecks $\bigcirc DD$, dessen Schwerpunkt S_2 mit dem Fusspunkt des Perpendikels von A auf den Mittelradius zusammenfällt. Dann wird der Schwerpunkt S der Mittelpunkt zweier paralleler Kräfte sein, wovon die eine BB dem Flächeninhalt des Sectors proportionale im Schwerpunkt dieses S_1 und die andere ED dem negativen Inhalt des Dreiecks proportionale im Schwerpunkt dieses S_2 wirkt. Trägt man daher auf zwei Parallelen durch S_1 und S_2 nach Vertauschung der Lagen mit Berücksichtigung des Sinnes BB nach $S_2 G$ und DE nach FS_1 auf, so giebt nach Nr. 46 S. 122 der Durchschnitt der gegenüberstehenden Seiten $S_1 S_2$ und FG des mit den Inhalten gebildeten Vierecks den Schwerpunkt des Segmentes.

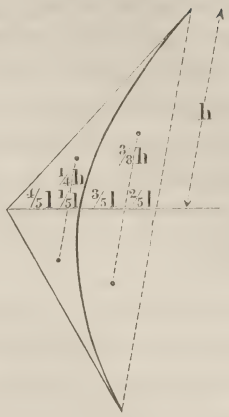
Diese Construction ist nur genau, wenn der Inhalt des Dreiecks $D\bigcirc D$ klein im Verhältniss zu dem des Sectors ist, also wenn der Winkel $D\bigcirc D$ gross ist. Ist der Winkel $D\bigcirc D$ klein, so ist es besser das Kreissegment als Parabelsegment zu betrachten oder in mehrere Parabelsegmente und Dreiecke zu theilen, die man dann mittelst eines Seilpolygons zusammensetzt.

c) Schwerpunkte der Parabelsegmente.

Nach d), siehe unten, verfahrend, können wir zwar mit grosser Genauigkeit den Schwerpunkt eines Parabelsegments im Verhältniss so wie jeder andern unregelmässigen Fläche bestimmen. Wir können jedoch nicht zu den Zahlenverhältnissen gelangen, welche

die Lage des Schwerpunktes eines Parabelsegments zu seinen zwei Hauptabmessungen geben. Wir entlehnen daher diese der Analysis, wie sie in Figur 91 eingeschrieben sind. Diese Zahlen sind sehr nützlich, um alle kleinern Bogen und Anschneigungen bei unregelmässigen Profilen zu berücksichtigen, und es können nach denselben, ohne merkliche Fehler zu begehen, noch ziemlich grosse Kreissegmente behandelt werden.

Fig. 91.



d) Schwerpunkt unregelmässiger Figuren.

Um den Schwerpunkt unregelmässiger Figuren zu bestimmen, theile man dieselben durch Parallellinien in trapezförmige Lamellen, die so schmal sind, dass ihr Schwerpunkt in der halben Breite angenommen werden darf. Bestimme man den Inhalt derselben, der laut Nr. 13 S. 42 der mittlern Höhe einfach proportional ist, wenn die Breite der Lamellen constant ist, dagegen durch Reduction auf die gemeinschaftliche Basis bestimmt wird, wenn z. B. bei den Endlamellen, oder bei sonstigen Unregelmässigkeiten des Querschnitts eine abweichende Lamellenbreite angenommen werden müsste. Endlich betrachte man diese Inhalte als parallele Kräfte, die in dem Schwerpunkt jeder Lamelle wirken, setze sie zu einem Kräftepolygon zusammen, und construire mittelst desselben ein Seilpolygon, dessen Ecken auf Parallellinien zur Richtung der Kräfte durch die Schwerpunkte der einzelnen Lamellen liegen: so giebt der Schnitt der äussersten Polygonseiten die Parallele an, auf der der Schwerpunkt liegt.

Diese Operationen sind auf Taf. 8_1 an einem Schienenprofil durchgeführt worden.

Der Querschnitt der Schiene ist symmetrisch bezüglich der Verticallinie, welche alle Horizontallinien in derselben halbirt. Der Schwerpunkt des Querschnittes liegt daher laut Nr. 55 S. 146 in dieser Verticalen, und es ist nur noch seine Höhenlage in ihr zu bestimmen. Wir theilen den Querschnitt durch Horizontallinien in

16 Lamellen, von diesen haben die Lamellen 4 8 9 10 11 12 die normale Breite von 1 Ctm. Um sie auf die zu $a = 3$ Ctm. angenommene Basis zu reduciren, hat man daher nur die Höhe derselben in 3 Theile zu theilen. Der Inhalt der übrigen Lamellen, die schmäler angenommen wurden, damit in ihren seitlichen Begrenzungen keine allzu auffallenden Ecken entstehen, wurde durch directe Verwandlung auf die Basis a bestimmt, wie der der übrigen auf der Mittellinie jeder Lamelle aufgetragen, stark punktirt, und mit der Lamellen Nummer versehen.

Indem wir den Ort des Profils auf der Längenaxe der Schiene, welche durch den Schwerpunkt geht mit x, die Höhe der Mitte der 1ten, 2ten, 3ten etc. Lamelle über dem Schwerpunkt mit $y_1\ y_2\ y_3$ etc. die Breite derselben Lamellen mit $z_1\ z_2\ z_3$ und den Inhalt der ersten, der zwei ersten, der drei ersten Lamellen mit $F_1\ F_2 F_3$ .. bezeichnen, kann man den Inhalt der $i$ten Lamelle mit $\triangle F_i$ bezeichnen. Dieser Inhalt wird nun durch die reducirte Höhe, die wir mit $\triangle z'_i$ bezeichnen können, in der Art dargestellt, dass

$$\triangle F_i = a \triangle z'_i$$

ist. Die Inhalte dieser einzelnen Lamellen denken wir uns horizontal wirkend, und summiren sie auf der horizontalen Linie der z', welche dem Kräftepolygon entspricht. Die einzelnen Segmente derselben sind dem $\triangle z'$ in jeder Lamelle gleich; wie es bei der sechsten Lamelle angedeutet ist. Der Inhalt der ersten fünf Lamellen z. B. F_5 wird daher durch z'_5 in der Art dargestellt, dass

$$F_5 = a z'_5 \text{ ist.}$$

Der Inhalt des ganzen Schienenquerschnitts ist gleich

$$F_{16} = a z'_{16}$$

Die verticale Entfernung b des Kräftepols von dieser Richtungslinie der Kräfte wurde gleich $^{20}/_{3} = 6{,}66$ Ctm. angenommen. Mit den Strahlen dieses Büschels laufen die Seilpolygonseiten des dem Schienenprofil nächsten parabelförmig gekrümmten Polygons parallel, und zwar so, dass die Seite zwischen der fünften und sechsten Lamellenmitte z. B. mit dem Strahl parallel läuft, welcher den Punkt, in welchem die fünfte und sechste Lamelle zusammenstossen, projicirt.

Die äussersten Polygonseiten schneiden sich auf der Horizontalen durch den Schwerpunkt.

Werden alle Seilpolygonseiten bis zu dieser Horizontalen z'' verlängert, so schneiden sie auf derselben Segmente $\triangle z''$ ab, welche nach Nr. 48 S. 127 dem Moment der Kräfte, d. h. dem Product des Inhalts einer Lamelle mit ihrem Abstand y vom Schwerpunkt in der Art proportional sind, dass sie mit b multiplicirt werden müssen, um dieses Moment zu geben. Es ist also z. B.

$$y_6 \triangle F_6 = y_6 \, a \triangle z'_6 = ab \triangle z''_6$$

und $ab \, z''_5 = \sum_{o}^{5} y \triangle F.$

Da $ab = 20$ Quadratctm. ist, so bedeutet diess, dass das Moment der obersten fünf Lamellen gerade so gross ist, als das einer Fläche von 20 Quadratctm., welche am Hebelarm z''_5 wirkten.

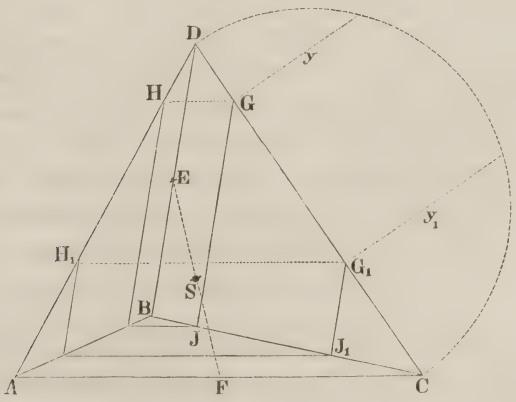
Mit der Schwerpunktslamelle ändern die $\triangle z''$ ihr Zeichen, die z'' nehmen ab, und werden für das ganze Profil $= 0$, wie es für jede durch den Schwerpunkt gehende Axe sein soll.

59. Der Schwerpunkt von Körpern.

a) Der Schwerpunkt eines Tetraeders.

Theilt man ein Tetraeder durch Ebenen, die zu zwei gegenüberliegenden Kanten AC und BD (Fig. 92) desselben parallel

Fig. 92.



laufen, so sind die Schnitte Parallelogramme, deren aufeinanderfolgende Seiten gleiche Winkel mit einander bilden und deren

Schwerpunkte alle auf der Linie liegen, welche die Mitten E und F dieser beiden Kanten mit einander verbindet; denn die Ebene AEC hälftet alle zu BD parallelen Parallelogrammseiten und EF halbirt alle Linien, welche diese Schnitte mit einander verbinden. Da sich ferner die Inhalte der Parallelogramme wie die Producte ihrer Seiten HG und GJ, diese sich aber wie die entsprechenden Segmente DG und GC der Linie CD verhalten, indem

$$\frac{HG}{H_1G_1} = \frac{DG}{DG_1} \text{ und } \frac{GJ}{G_1J_1} = \frac{GC}{G_1C} \text{ ist,}$$

so verhalten sich auch die Producte dieser Seiten, d. h. die Parallelogramme HJ und H_1J_1, wie die entsprechenden Producte der Segmente von DC, nämlich

$$\frac{(HJ)}{(H_1J_1)} = \frac{\overline{HG} \,.\, \overline{GJ}}{\overline{H_1G_1} \,.\, \overline{G_1J_1}} = \frac{\overline{DG} \,.\, \overline{GC}}{\overline{DG_1} \,.\, \overline{G_1C}} = \frac{y^2}{y_1{}^2}$$

wenn man mit y und y_1 die auf G und G_1 errichteten Ordinaten des über DC als Durchmesser beschriebenen Kreises bezeichnet. Da nun je zwei von der Mitte DC gleich weit entfernte Ordinaten gleich lang sind, so sind auch die Flächeninhalte je zweier von der Mitte S der Linie EF gleichweit abstehende Parallelogramme gleich gross.

Man kann daher die Elemente des Tetraeders zu je zweien von der Mitte S von EF gleich weit abstehenden so gruppiren, dass alle Gruppen ihren Schwerpunkt in S haben. S ist daher der Schwerpunkt des Tetraeders. Betrachtet man ABC als Basis des Tetraeders, so liegt E in der halben Höhe desselben, und S in der Hälfte dieser halben Höhe demnach im $^1/_4$ der ganzen Höhe.

Bezeichnen $a\,b\,c\,d\,s$ die Ordinaten der Ecken des Tetraeders und seines Schwerpunktes in Bezug auf irgend eine Ebene, so ist die Ordinate von $F = {}^1/_2\,(a + c)$ und die von $E = {}^1/_2\,(b + d)$ daher die von S das in der Mitte von E und F liegt

$$s = {}^1/_4\,(a + b + c + d)$$

Wenn man durch den Schwerpunkt S eines solchen Tetraeders eine Ebene parallel zu den gegenüberstehenden Kanten AC und BD legt, und diese Ebene als Diametralebene eines Ellipsoides betrachtet, in der die parallel liegenden Längen AC und BD conjugirte Durchmesser, und die Verbindungslinie EF der Mitten

dieser Kanten der dritte conjugirte Durchmesser wären, so würden sich in allen Parallelschnitten zu AC und BD die Querschnittsflächen des Tetraeders zu denen des Ellipsoides wie $1 : \pi$ verhalten, denn da die Schnitte durch die Mitte S sich so verhalten, und sich alle Schnitte des Ellipsoides gegenseitig wie die Quadrate der Ordinaten einer Ellipse oder auch eines über CD beschriebenen Halbkreises, also gerade so wie die einzelnen Schnitte des Tetraeders verhalten, so folgt das eben Gesagte.

Da alle Parallelschnitte in diesem Verhältniss $1 : \pi$ stehen, so verhalten sich auch die Cubikinhalte beider Körper zwischen zwei beliebigen Parallelebenen, und auch die ganzen Körper so. Endlich fallen in Folge dessen die Schwerpunkte der Körper zwischen zwei gleichen Parallelebenen zusammen.

b) Schwerpunkt unregelmässiger Körper.

Ist der Körper von ebenen Flächen begrenzt, so zerlege man ihn in Tetraeder und denke sich im Schwerpunkt derselben eine ihren Inhalten proportionale Parallelkraft wirksam, so kann man den Mittelpunkt dieser nach Nr. 53 S. 143 bestimmen.

Ist dagegen der Körper von krummen Flächen begrenzt, so theile man ihn durch parallele Ebenen in Prismatoide, deren Höhen so klein angenommen werden müssen, dass man annehmen darf, es liege ihr Schwerpunkt im Schwerpunkt des Schnittes, der sie halbirt, und es sei ihr Inhalt diesem Schnitt proportional. Dann kann man an diesen Schwerpunkten parallele Kräfte, die diesen Schnitten proportional sind, wirken lassen, und ihren Mittelpunkt ebenfalls nach 53 S. 143 bestimmen.

Am äussersten Ende solcher Körper erhält man häufig eine Haube. Nimmt man an, die Schnitte derselben senkrecht zu den Schnittebenen seien Parabeln, so darf man den Schwerpunkt dieser Haube im Querschnitt des Schnittes annehmen, der durch das Drittel ihrer Höhe geführt wird. Der Inhalt der Haube kann, wie wir schon N. 19 S. 63 bemerkten, ihrer Grundfläche mal ihrer halben Höhe gleich gesetzt werden.

Siebentes Kapitel.

Das Trägheitsmoment.

60. Höhere Momente im Allgemeinen.

In der Mechanik braucht man häufig Summen wie $\Sigma x^m y^n z^k .. P$, wo P parallele Kräfte und x, y, z die in beliebiger Richtung gemessenen Entfernungen ihres Angriffspunktes von drei beliebigen Ordinaten-Ebenen bezeichnet.

Wir werden nie Kräfte zu summiren haben, die mit mehr als zwei Längen multiplicirt sind, doch wollen wir hier noch andeuten, wie solche Summen ganz allgemein construirt werden können.

Man erhält das einfache statische Moment paralleler Kräfte nach Nr. 54 S. 145, in Bezug auf irgend eine die angenommene Richtung der Kräfte projicirende Ebene, als Segmente ihres Schnittes mit der Projectionsebene, in der das Seilpolygon construirt wird, zwischen den entsprechenden Strahlen des Seilpolygons; und es sind diese Momente gleich der Basis des Kräftepolygons H multiplicirt mit diesen Segmenten.

Man erhält nun ein Moment zweiten Grades dieser Kräfte, indem man mit den obigen Segmenten gerade so als ob sie selbst die Kräfte wären ein neues Polygon mit einer neuen Basis h construirt. Die neuen zweiten Segmente sind dann offenbar den Momenten der ersten als Kräfte betrachteten Segmente, d. h. in der Art den Producten der ersten Segmente mit ihrer Entfernung von der angenommenen projicirenden Ebene proportional, dass sie mit h multiplicirt werden müssen, um diese Producte zu geben. Da nun die ersten Segmente dem Product der Kräfte mit ihrer Entfernung von der angenommenen projicirenden Ebene proportional waren, so sind die zweiten den Producten der Kräfte mit dem Quadrat dieser Entfernungen proportional; da sich ferner diese Segmente ebenso wie die ersten mit Berücksichtigung des Sinnes aneinander reihen, so ist ihre Summe proportional der Summe der Producte jeder einzelnen Kraft mit dem Quadrat ihrer Entfernung

von der angenommenen projicirenden Ebene, und zwar muss diese Segmenten-Summe mit Hh multiplicirt werden, um $\Sigma x^2 P$ zu erhalten.

Wir wiederholen kurz die vorzunehmenden Operationen mit Zuhülfenahme algebraischer Zeichen, um die Gedanken zu fixiren. Es seien die Ebene E, in Bezug auf welche das Moment zweiten Grades bestimmt, und die Richtung der Ordinaten y, mit deren Quadrat die Kräfte P multiplicirt werden sollen, gegeben. Nimmt man die Richtung, in der man sich die parallelen Kräfte P wirkend denkt, willkürlich an, so ist dadurch auch die Stellung der Projectionsebene S, in der man das Seilpolygon construiren will, gegeben, weil diese Stellung die Richtungen von P und y enthalten muss. Man kann auch umgekehrt die Projectionsebene S zuerst willkürlich annehmen, dann hat man sich aber die Kräfte P parallel mit dem Schnitt der Ebenen E und S wirkend zu denken. Construirt man nun in der Ebene S ein Kräftepolygon, in dem die Entfernung des Poles O von der Linie der P parallel zu y gemessen $= H$ ist, und mit diesem ein Seilpolygon, so schneiden die Polygonseiten desselben auf dem Schnitt (ES) Segmente ab, welche mit H multiplicirt, dem Product Py gleich sind. Bezeichnet man ihre Summe oder die Länge des Abschnittes der Linie (ES) zwischen den äussersten Polygonseiten mit p, so ist

$$\Sigma Py = p \,.\, H.$$

Es ist das eben Gesagte nichts anderes als die wiederholte Beschreibung des Verfahrens von Nr. 53 S. 142. Wir fahren nun in derselben Weise fort.

Betrachtet man die Längen p als zweites Kräftepolygon, dessen Pol O_1 in einer parallel zu y gemessenen Entfernung h angenommen wird, und construirt man mit Hülfe desselben ein zweites Seilpolygon, so werden die einzelnen Segmente des ersten Polygons auf der Linie (ES) ganz an die Stelle der P in obiger Gleichung treten; die Segmente des zweiten Polygons werden mit h multiplicirt, dem Product der Segmente des ersten mit y, also $\frac{Py^2}{H}$ gleich sein. Bezeichnet man ihre Summe, d. h. wieder die Länge des Abschnittes der Linie ES zwischen den äussersten Polygonseiten mit p_1, so wird man allgemein haben

$$p_1 \, h \, H = \Sigma y^2 P$$

Es besteht dasselbe aus dem Product einer Kraft mit zwei lineären Dimensionen; man hat daher eine der drei Längen p_1, h, H, allein nach Nr. 37 S. 106 ganz einerlei welche, auf demselben Maassstab der Kräfte, in welchem zuerst die P aufgetragen wurden, und die beiden andern auf dem Maassstab der Längen abzugreifen.

Häufig drückt man $\Sigma y^2 P$ durch das Product des Quadrats einer Linie r mit ΣP aus. Um zu dieser r zu gelangen, hat man nur eine der beiden Längen hH z. B. $H = \Sigma P$ anzunehmen, dann ist offenbar $r = \sqrt{p_1 h}$, denn man hat

$$p_1 h H = r^2 \Sigma P = \Sigma y^2 P.$$

Wenn man die eben beschriebene zweite Operation, in welcher die yP gerade so wie in der ersten die P behandelt wurden, statt in der Ebene E mit den Richtungen y zu wiederholen, in einer andern Ebene E_1 mit den Richtungen z wiederholt, so erhält man statt $\Sigma y^2 P$

$$p_1 h H = \Sigma y z P$$

und auf diese Weise im Raum diese Operation mit dem Seilpolygon wiederholend, wie wir es schon Nr. 53 S. 142 gezeigt haben, kann man ganz allgemein

$$p_1 h^{n+m \ldots -1} H = \Sigma y^n z^m \ldots P$$

bilden.

Bisher ist immer vorausgesetzt worden, dass die Richtungen von P constant seien, und dass die verschiedenen Ebenen $E E_1 \ldots$ von welchen aus die $y z \ldots$ gemessen werden, constant seien; allein diess ist keine die Construction beschränkende Bedingung, und man kann, sobald es die Aufgabe verlangt, z. B. wenn P kleinere oder grössere Massen darstellen, welche in allen Richtungen den auf sie wirkenden Kräften zu folgen trachten, die Richtung der P mit der Stellung von E, die jedoch jene Richtung jeweilen enthalten muss, ändern.

61. Das Trägheitsellipsoid.

Sehr wichtig sind die Momente zweiten Grades, die wir mit dem Namen Trägheitsmomente auch dann bezeichnen wollen, wenn die Entfernungen der Angriffspunkte der Kräfte nicht von einer Axe, sondern von einer Ebene parallel zu irgend einer Richtung

gemessen werden; und wir wollen daher hier einige Eigenschaften derselben entwickeln.

Wenn man in Bezug auf irgend eine Ebene E das Moment zweiten Grades $\Sigma q^2 P = k^2 \Sigma P$ bestimmt, wo q und k die in derselben beliebigen Richtung gemessenen Entfernungen des Angriffspunktes der Kräfte von der Ebene E sind, und man führt in der Entfernung $+k$ und $-k$ zwei parallele Ebenen zu E, so umhüllen alle Ebenen, die man auf diese Weise erhält, wenn E sich um einen festen Punkt O dreht (einen Ebenenbündel erster Ordnung beschreibt) ein Ellipsoid (sie bilden einen Ebenenbündel zweiter Ordnung), das den festen Punkt O zum Mittelpunkt hat.

Für drei conjugirte Axen des Ellipsoides sind die Momente $\Sigma y z P$, $\Sigma x z P$, $\Sigma x y P$ gleich 0.

Beweis. Wir beziehen alle Angriffspunkte der Kräfte auf drei beliebige durch O gehende Axen der $x y z$, projiciren den Linienzug $x y z$, mittelst dessen man von O nach dem Endpunkt von q oder dem Angriffspunkt von P gelangt parallel zu E auf q, und bezeichnen das Verhältniss der $x y z$ zu diesen Projectionen mit $\alpha\ \beta\ \gamma$, dann hat man

$$q = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

und weil $\alpha \beta \gamma$ sich bei derselben Stellung von E nicht verändern

$$\Sigma q^2 P = k^2 \Sigma P = \alpha^2 \Sigma x^2 P + \beta^2 \Sigma y^2 P + \gamma^2 \Sigma z^2 P + 2 \beta\gamma \Sigma y z P + 2 \alpha\gamma \Sigma x z P + 2 \alpha\beta \Sigma x y P$$

Aendert man die Stellung der Ebene E und die Richtungen von q und k, ohne jedoch die Richtungen der Coordinaten-Axen $x y z$ zu ändern, so werden sich wohl in Folge dessen $\alpha \beta \gamma$, nicht aber $\Sigma x^2 P$ ..... ändern.

Bezeichnen wir nun die Abschnitte der Coordinaten-Axen zwischen dem Ursprung O und der Ebene, welche in der Entfernung $\pm k$ von E und parallel zu E geführt wird, mit $x_1 y_1 z_1$, so ist offenbar $k = \alpha x_1 = \beta y_1 = \gamma z_1$, weil k die Projection eines jeden der drei Abschnitte $x_1 y_1 z_1$ parallel zu E auf sich selbst ist, man hat demnach

$$\alpha = \frac{k}{x_1},\ \beta = \frac{k}{y_1} \text{ und } \gamma = \frac{k}{z_1}$$

Substituirt man diese Werthe in obige Gleichung, dividirt man dann noch durch $k^2 \Sigma P$ und setzt man endlich noch die für jede

Stellung von E, und demnach auch für jeden Werth von $\alpha\beta\gamma$ $x_1 y_1 z_1$ constanten Grössen

$$\frac{\Sigma x^2 P}{\Sigma P} = a^2, \quad \frac{\Sigma y^2 P}{\Sigma P} = b^2, \quad \frac{\Sigma z^2 P}{\Sigma P} = c^2$$

$$\frac{\Sigma y z P}{\Sigma P} = A, \quad \frac{\Sigma x z P}{\Sigma P} = B, \quad \frac{\Sigma x y P}{\Sigma P} = C$$

so verwandelt sich obige Gleichung in

$$\frac{a^2}{x_1^2} + \frac{b^2}{y_1^2} + \frac{c^2}{z_1^2} + \frac{2A}{y_1 z_1} + \frac{2B}{x_1 z_1} + \frac{2C}{x_1 y_1} - 1 = 0 \ldots \qquad (\varphi$$

in die Gleichung eines Ebenenbündels zweiter Ordnung, welcher eine Fläche zweiter Ordnung umhüllt, deren Mittelpunkt mit dem Ursprung der Coordinaten zusammenfällt, weil die ersten Potenzen von $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{y_1}, \frac{1}{z_1}$ fehlen.

Hätte man für die Axen der $x\,y$ und z drei Durchmesser gewählt, wovon jeder der Ebene der beiden andern conjugirt wäre, so müsste sich die Gleichung φ auf

$$\frac{a^2}{x_1^2} + \frac{b^2}{y_1^2} + \frac{c^2}{z_1^2} - 1 = 0 \ldots\ldots \qquad (\varphi_1$$

reduciren, es müssen also in diesem Fall A, B, C, oder die $\Sigma y z P$, $\Sigma x z P$ und $\Sigma x y P$ gleich 0 sein.

Sind nur zwei dieser Σ gleich 0, so ist die Richtung der beiden gemeinschaftlichen Coordinaten der Stellung der Ebene conjugirt, welche die Richtung der Coordinaten enthält, aus der das dritte Product gebildet ist.

Das Gebilde φ besitzt alle Eigenschaften eines Ebenenbündels zweiter Ordnung. Es umhüllt ein Ellipsoid, wenn die Coordinaten keines der Angriffspunkte von P unendlich gross sind, denn ein Hyperboloid kann die Umhüllungsfläche nicht sein, weil die Parallelebenen zu E niemals mit E zusammenfallen können, und ein Paraboloid kann sie nicht sein, weil keine dieser Ebenen mit der unendlich fernen Ebene zusammenfallen kann, wenn alle Angriffspunkte von P in der Endlichkeit liegen.

Dieses Trägheitsellipsoid heisst insbesondere das Centralellipsoid, wenn zum Ursprung O der Coordinaten der Schwerpunkt des Kräftesystems P gewählt wurde.

Da in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Analysis die Flächen meistens nur als Punkt-Gebilde aufgefasst werden, und die reciproke Auffassung als Ebenenbündel beinahe nicht entwickelt ist, so kann es wünschenswerth sein, um die vorhandenen Formeln benutzen zu können, das Ellipsoid durch Punktcoordinaten darzustellen.

Die Punktgleichung eines der Elemente des Ebenenbündels ist

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} - 1 = 0 \ldots\ldots \qquad (F$$

Man hat daher nur die Umhüllungsfläche dieser Ebenen unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass $x_1\, y_1\, z_1$ sich ändern, jedoch stets der Bedingungsgleichung φ genügen.

Bekanntlich erhält man die Gleichung dieser Umhüllungsfläche, indem man $x_1\, y_1\, z_1$ aus den Gleichungen φ F und den zwei Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{d\frac{1}{x_1}} : \frac{dF}{d\frac{1}{x_1}} = \frac{d\varphi}{d\frac{1}{y_1}} : \frac{dF}{d\frac{1}{y_1}} = \frac{d\varphi}{d\frac{1}{z_1}} : \frac{dF}{d\frac{1}{z_1}} \qquad (v$$

eliminirt. Wird jeder Theil v der letzten Doppelgleichung mit

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{dF}{d\frac{1}{x_1}} = \frac{x}{x_1}, \frac{1}{y_1} \cdot \frac{dF}{d\frac{1}{y_1}} = \frac{y}{y_1}, \frac{1}{z_1} \cdot \frac{dF}{d\frac{1}{z_1}} = \frac{z}{z_1}$$

multiplicirt, so erhält man:

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{d\varphi}{d\frac{1}{x_1}} + \frac{1}{y_1} \cdot \frac{d\varphi}{d\frac{1}{y_1}} + \frac{1}{z_1} \cdot \frac{d\varphi}{d\frac{1}{z_1}} = v\left(\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1}\right)$$

Nun ist aber, wie man sich mit Zuziehung der Gleichung φ überzeugt, der erste Theil der Gleichung gleich $+2$, wie aus F hervorgeht der unter der Klammer befindliche Ausdruck gleich $+1$, es ist also auch $v = 2$ oder

$$\frac{d\varphi}{d\frac{1}{x_1}} : \frac{dF}{d\frac{1}{x_1}} = 2 \text{ und } \frac{d\varphi}{d\frac{1}{x_1}} - 2x = 0 \text{ u. s. f.}$$

Man kann daher an die Stelle von $\varphi, F,$ und den zwei Gleichungen v die 4 lineären Gleichungen

$$F = 0$$

$$\frac{d\varphi}{d\frac{1}{x_1}} - 2x = 0$$

$$\frac{d\varphi}{d\frac{1}{y_1}} - 2y = 0$$

$$\frac{d\varphi}{d\frac{1}{z_1}} - 2z = 0$$

setzen, und aus ihnen $x\ y\ z$ eliminiren. Diese Elimination führt sofort zur Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ B & A & c^2 & z \\ C & b^2 & A & y \\ a^2 & C & B & x \end{vmatrix} = 0$$

deren Ausführung

$x^2\,(A^2 - b^2\,c^2) + y^2\,(B^2 - a^2\,c^2) + z^2\,(C^2 - a^2\,b^2) + 2\,y\,z(a^2\,A - B\,C) + 2\,x\,z\,(b^2\,B - A\,C) + 2\,x\,y\,(c^2\,C - A\,B) + (a^2\,b^2\,c^2 - a^2\,A^2 - b^2\,B^2 - c^2\,C^2 + 2\,A\,B\,C) = 0 \ldots\ldots (\psi$

giebt.

Auch diese Gleichung zeigt wieder, dass die Coefficienten von $y\,z$, $x\,z$, $x\,y$, nur dann gleich 0, also die Coordinatenaxen zu conjugirten Durchmessern werden, wenn gleichzeitig $A\,B\,C$, d. h. $\Sigma y\,z\,P$, $\Sigma x\,z\,P$ und $\Sigma x\,y\,P$ gleich 0 werden, wie wir schon weiter oben fanden.

Ist diess der Fall, so verwandelt sich obige Gleichung durch Division mit $a^2\,b^2\,c^2$ in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ldots\ldots \qquad (\psi_1$$

die Gleichung des auf drei conjugirte Durchmesser bezogenen Ellipsoids, deren Längen $= a\ b$ und c sind.

Wir können nun das Ellipsoid als vollständig bestimmt betrachten. Und man erhält das Trägheitsmoment aller P oder $\Sigma\,q^2\,P$ in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt des Ellipsoids geführte Ebene E, deren Stellung ebenso wie die Richtung von q

ganz willkürlich sein können, indem man eine zu E parallel laufende Tangential-Ebene des Ellipsoids bestimmt, und das Quadrat des Segments k irgend eines q zwischen den zwei Parallelebenen mit der Summe aller P multiplicirt, oder es ist $\Sigma q^2 P = k^2 \Sigma P$.

62. Beziehungen eines beliebigen Trägheitsellipsoids zum Centralellipsoid.

Hat man das Centralellipsoid bestimmt, so kann aus demselben leicht auch $\Sigma q^2 P$ für jede, also auch für nicht durch den Schwerpunkt gehende Ebenen E bestimmt werden. Man führe parallel zu E die Ebene E_1 durch den Schwerpunkt O_1 das Centrum des Centralellipsoids und eine Tangentialebene an letzteres: bezeichnen wir wie früher die Entfernung der Tangentialebene von E_1 mit k, die Entfernung der Ebenen E und E_1 mit i, endlich die des Angriffspunktes eines P von E_1 mit q_1, alle drei Längen natürlich in der Richtung von q gemessen, so hat man $q = q_1 + i$ und weil i für alle P constant ist

$$\Sigma q^2 P = \Sigma q_1{}^2 P + 2 i \Sigma q_1 P + i^2 \Sigma P$$

Nun ist aber $\Sigma q_1{}^2 P = k^2 \Sigma P$ und $\Sigma q_1 P = 0$, weil sich die q_1 auf eine durch den Schwerpunkt der P gehende Ebene beziehen, mithin

$$\Sigma q^2 P = (i^2 + k^2)\ \Sigma P$$

Mittelst dieser wichtigen Formel, von der wir noch öfters Gebrauch machen werden, und die allgemein gilt, welchen Winkel auch E und q mit einander bilden, kann man für jeden Punkt O die das Trägheitsellipsoid umhüllenden Ebenen bestimmen. Wird dabei berücksichtigt, dass i für alle durch die beiden Mittelpunkte O und O_1 des Trägheits- und des Centralellipsoids gehende Ebenen gleich 0 ist, mithin die Entfernungen k der diesen Ebenen parallelen Tangentialebenen gleich gross für beide Ellipsoide sind, so folgt, dass beide den Ebenenbüschel zweiter Ordnung gemein haben, dessen Scheitel im unendlich fernen Punkt der Linie $O O_1$ liegt; oder mit andern Worten, dass beide Ellipsoide von einer und derselben Cylinderfläche zweiter Ordnung umhüllt werden, deren Erzeugungslinien parallel zu $O O_1$ laufen. Die beiden Berührungscurven sind gleich grosse Ellipsen, deren Ebenen parallel laufen

und in beiden Ellipsoiden der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte $O O_1$ conjugirt sind.

Denkt man sich, der Mittelpunkt O falle zuerst mit dem Schwerpunkt O_1 zusammen und entferne sich dann in irgend einer constanten Richtung O von demselben, so bewegt sich mit ihm die dieser Richtung conjugirte Ellipse, je zwei conjugirte Durchmesser derselben bleiben parallel, conjugirt und gleich gross, und nur der Durchmesser in der Richtung $O O_1$ der Bewegung vergrössert sich so, dass seine Länge $\sqrt{i^2 + k^2}$ ist, wo k den Durchmesser des Centralellipsoids in der Linie $O O_1$ gemessen und i die Entfernung $O O_1$ der Mittelpunkte bezeichnet.

Da $\sqrt{i^2 + k^2}$ grösser als i ist, so folgt hieraus, dass der Schwerpunkt in allen Trägheitsellipsoiden liegt.

Die Tangentialebenen an den Endpunkten dieses wachsenden Durchmessers schneiden den Cylinder, der alle Trägheitsellipsoide umhüllt, die bei dieser Bewegung erzeugt werden, in einer Ellipse, die ebenfalls der Reihe der sich gleichgross bleibenden und bewegenden Ellipsen angehört. Projicirt man diese Ellipse aus dem Mittelpunkt des Ellipsoids, so enthält der entstehende Winkelraum jederzeit einen von allen möglichen Gruppen conjugirten Durchmesser, es können sogar deren zwei in der den Winkelraum umhüllenden Winkelfläche liegen; da ferner diese Winkelfläche das Centralellipsoid in zwei ähnlichen Ellipsen schneidet, also ganz durchdringt, so folgt noch, dass von je drei conjugirten Durchmessern eines Trägheitsellipsoids immer mindestens einer durch das Centralellipsoid durchgeht.

Sollen drei conjugirte Durchmesser so bestimmt werden, dass einer durch den Schwerpunkt, den Mittelpunkt des Centralellipsoids gehe, und die zwei andern in einer gegebenen Ebene liegen, so ist der erste der der Stellung der gegebenen Ebene conjugirte Durchmesser des Centralellipsoids, und die zwei andern laufen parallel zu zwei conjugirten Durchmessern desselben.

Können alle Kräfte zu je zweien so gruppirt werden, dass alle Verbindungslinien der Angriffspunkte parallel laufen, und dass alle Angriffspunkte der Mittelkräfte der Gruppen in einer Ebene liegen, so sind die Richtung der Parallellinien und die Stellung der Ebene in allen Trägheitsellipsoiden conjugirt, deren Mittelpunkte in der durch den Schwerpunkt des ganzen Systems gehenden

Parallelen zu obigen Verbindungslinien liegen. — Es genügt diess für das Centralellipsoid nachzuweisen, denn dann gilt es auch, laut dem eben Bewiesenen, für jedes Ellipsoid, dessen Mittelpunkt in der eben erwähnten Parallele liegt.

Wird die Ebene, in der die Angriffspunkte der Mittelkräfte jeder Gruppe wirken, zur Ebene der xy und die durch den Schwerpunkt gehende Parallele zu der Verbindungslinie zweier eine Gruppe bildender Kräfte zur Axe der z gewählt, so ist für je zwei Kräfte P und P_1 einer Gruppe x und y constant, $zP + z_1 P_1$ aber gleich 0, weil der Voraussetzung gemäss der Angriffspunkt der Mittelkraft in der Ebene der xy liegt, mithin ist für jede Gruppe $xzP + xz_1 P_1$ und $yzP + yz_1 P_1$ gleich 0, also auch ΣxzP und ΣyzP für das ganze System gleich 0, woraus laut Nr. 61 S. 164 folgt, dass die diesen beiden Summen gemeinschaftliche Ordinate z der Ebene der xy conjugirt ist, aus denen das dritte Product ΣxyP gebildet ist.

Können alle Kräfte so gruppirt werden, dass die Angriffspunkte aller zu einer Gruppe gehöriger Kräfte in Parallelebenen und die Angriffspunkte der Mittelkräfte einer jeden Gruppe in einer geraden Linie liegen, so ist diese Gerade der der Stellung der Parallelebene conjugirte Durchmesser des Centralellipsoids. Denn wählt man diese Linie zur Axe der z und nimmt man die Ebene der xy parallel zur Stellung der übrigen Parallelebenen an, so ist der Voraussetzung gemäss für jede Gruppe ΣxP und ΣyP gleich 0; da aber z für jede Gruppe constant ist, so ist auch ΣxzP und ΣyzP im Ganzen gleich 0, mithin die Axe der z, die auch durch den Schwerpunkt geht (Nr. 54 S. 145) der der Stellung der Ebene der xy conjugirte Durchmesser des Centralellipsoids.

Können endlich die Kräfte so gruppirt werden, dass die Mittelpunkte der Centralellipsoide aller Gruppen auf einer Geraden liegen, und dass irgend zwei dieser Geraden conjugirte Durchmesser in allen Gruppen parallel laufen, so sind auch im Centralellipsoid des ganzen Systems die Paralleldurchmesser der Verbindungslinie aller Mittelpunkte conjugirt; dieses wird ebenso wie oben bewiesen.

Alles bisher Gesagte gilt allgemein, welches auch die Stellung und Richtung der vorkommenden Ebenen und Linien sei; es gilt also auch dann, wenn sie rechtwinkelig auf einander stehen. Die drei rechtwinkelig auf einander stehenden Durchmesser des Trägheits-

ellipsoids heissen die Hauptaxen. Die Richtungen der Hauptaxen des Centralellipsoids sind in jedem Ellipsoid, dessen Mittelpunkt auf einer dieser Hauptaxen liegt, conjugirt (sind Hauptaxenrichtungen).

Können die Kräfte zu je zweien so gruppirt werden, dass die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte senkrecht auf einer gegebenen Ebene steht, und dass der Angriffspunkt ihrer Mittelkraft in dieser Ebene liegt, so ist die durch den Schwerpunkt gehende Parallele zur Verbindungslinie der Kräfte eine Hauptaxe des Systemes.

Können die Kräfte so gruppirt werden, dass die Angriffspunkte aller zu einer Gruppe gehörigen Kräfte in Ebenen liegen, die senkrecht auf einer geraden Linie stehen, welche gleichzeitig auch die Angriffspunkte der Mittelkraft einer jeden Gruppe enthält, so ist diese Gerade eine Hauptaxe des Centralellipsoids.

Wenn endlich die Kräfte so gruppirt werden, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte in den Centralellipsoiden aller Gruppen Hauptaxe ist, so ist sie es auch im Centralellipsoid des ganzen Systems; laufen zudem noch die beiden übrigen Hauptaxen in allen Partialellipsoiden parallel, so laufen auch die des Centralellipsoides mit ihnen parallel.

63. System von parallelen Kräften, deren Intensität der Entfernung ihres Angriffspunktes von einer Ebene proportional ist.

Das bisher Entwickelte wollen wir an dem hier in der Ueberschrift gegebenen System von Kräften erläutern, indem wir den Angriffspunkt dieser Kräfte bestimmen.

Es seien $P_1\, P_2$ Constanten, die erst noch der Multiplication mit dem in irgend einer Richtung von einer Ebene gemessenen Abstand bedürfen, um zu Kräften zu werden. Behandeln wir diese Constanten schon wie Kräfte, so müssen wir sagen: die Mittelkraft des ganzen Systemes ist gleich dem Moment jener Constanten in Bezug auf die gegebene Ebene. Bestimmt man daher den Schwerpunkt derselben nach Nr. 59b S. 159, so ist die Intensität der Mittelkraft gleich $i \Sigma P$, wo i die in der gegebenen Richtung gemessene Entfernung dieses Schwerpunktes von der gegebenen Ebene E ist; dabei ist die Richtung der Kräfte ganz will-

kürlich, nur muss dieselbe für alle einzelnen Kräfte die gleiche bleiben.

Zur Bestimmung des Angriffspunktes der Mittelkraft denken wir uns diesen mit dem schon bestimmten Schwerpunkt des Systemes verbunden, und nehmen diese Verbindungslinie als Axe der z und die gegebene Ebene E als die der xy an. Dann ist die Intensität jeder einzelnen Kraft dem Product zP auch dann proportional, wenn z mit der die Intensität der Kräfte bestimmenden Entfernung nicht parallel läuft. Da nun der Angriffspunkt der Mittelkraft der Voraussetzung gemäss in der Axe der z, also gleichzeitig in der Ebene der xz und der yz liegt, so müssen $\Sigma y \,.\, z\,P$ und $\Sigma x \,.\, z\,P$ gleich 0 sein. Laut Nr. 61 S. 164 ist also die Richtung der z im Trägheitsellipsoid des Ursprungs der Coordinaten, und weil z durch den Schwerpunkt geht, auch im Centralellipsoid der Stellung der Ebene E conjugirt, und dadurch vollständig bestimmt.

Wir haben jetzt noch die Lage des Angriffspunktes in diesem der Stellung der Ebene E conjugirten Durchmesser des Centralellipsoids zu bestimmen. Da das Moment der Mittelkraft gleich der Summe der Momente aller Einzelkräfte bezüglich der Ebene E ist, so gelangen wir zu dieser Entfernung, indem wir diese Momenten-Summe durch die Mittelkraft dividiren.

Die Momentensumme ist:

$$\Sigma\, z^2\, P = (i^2 + k^2)\ \Sigma\, P$$

proportional, wenn Nr. 62 S. 167 entsprechend mit i die Entfernung des Schwerpunktes von der Ebene E und mit $2k$ die Entfernung der beiden zu E parallelen Tangentialebenen des Centralellipsoids bezeichnet wird.

Wir denken uns dabei i und k in der Richtung der z gemessen, ohne dadurch die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, weil diese Entfernungen den in jeder andern Richtung gemessenen Entfernungen proportional bleiben. In diesem Fall bezeichnet auch $2k$ die Länge des Durchmessers z, denn die zu E parallelen Tangentialebenen berühren das Centralellipsoid an den Endpunkten dieses der Stellung von E conjugirten Durchmessers.

Die Intensität der Mittelkraft ist der Grösse

$$\Sigma\, z\, P = i\, \Sigma\, P$$

proportional; die Entfernung ihres Angriffspunktes vom Ursprung in der Ebene E ist also gleich

$$\frac{\Sigma z \,.\, z\,P}{\Sigma z\,P} = i + \frac{k^2}{i}$$

Bemerkt man nun, dass dieser Angriffspunkt von der Parallelebene zu E, welche den Durchmesser z in der Entfernung $2i$ von E schneidet und daher bezüglich des Schwerpunktes symmetrisch zu ihr gelegen ist, harmonisch durch die beiden zu E parallelen Tangentialebenen an das Centralellipsoid, welche den Durchmesser z in den Punkten $i-k$ und $i+k$ schneiden, und daher auch durch dieses selbst getrennt ist, weil

$$\frac{2i-(i+k)}{i+k-\left(i+\frac{k^2}{i}\right)} : \frac{2i-(i-k)}{i-k-\left(i+\frac{k^2}{i}\right)} = -1$$

ist, so folgt, dass dieser Angriffspunkt der Pol der in Bezug auf den Schwerpunkt symmetrisch zu E gelegenen Ebene im Polarsystem sei, dessen Ordnungsfläche das Centralellipsoid ist.

Wir wiederholen:

Wenn in einem System von parallelen, sonst aber in jeder beliebigen Richtung wirkenden Kräften, jede einzelne Kraft ihrer in beliebiger Richtung gemessenen Entfernung von einer Ebene E multiplicirt mit einer Constanten P (die auch negativ sein kann) gleich ist, und man die Constanten wie Kräfte behandelt, ihren Schwerpunkt und ihr Centralellipsoid bestimmt: so ist die Intensität der Mittelkraft dieses Systemes gleich der Summe aller Constanten P, multiplicirt mit der Entfernung ihres Schwerpunktes von der Ebene E, und ihr Angriffspunkt ist im Polarsystem, dessen Ordnungsfläche das Centralellipsoid ist, der Pol der bezüglich des Schwerpunktes symmetrisch zu E gelegenen Ebene.

64. Gruppenweise Zusammensetzung der Kräfte der vorigen Nummer.

Hat man auf obige Weise die Mittelkraft von zwei oder mehreren Gruppen von Kräften bestimmt, indem man für irgend eine angenommene Ebene E die Pole ihrer Symmetralebene bezüglich der Centralellipsoide der einzelnen Gruppen bestimmte, die z. B. der einfachen Zusammensetzung der Gruppen wegen, a priori bekannt sein könnten: so lässt sich der Angriffspunkt der Mittelkraft des ganzen Systems erhalten, indem man die Mittelkräfte der einzelnen Gruppen, welche dem Moment der Constanten P proportional sind und an den oben bezeichneten Polen wirken, nach Nr. 53 S. 142 zusammensetzt.

Es versteht sich von selbst, dass dieser Angriffspunkt der Pol der Ebene E bezüglich des Centralellipsoids des ganzen, alle Gruppen umfassenden Systemes ist.

Auf diese Weise wird man mitunter sehr rasch zum Ziel gelangen, wenn der Zweck einzig und allein darin bestand, zu einem System verschiedener Gruppen die Mittelkraft und ihren Angriffspunkt zu erhalten; soll jedoch auch das Centralellipsoid aller Gruppen selbst construirt werden, so kann man aus einer Ebene E, dem zugehörigen Pol und dem Mittelpunkt des Ellipsoids die beiden zu E parallelen Tangentialebenen construiren, welche dadurch vollständig bestimmt sind, dass sie gleichweit vom Mittelpunkt abstehen und die Ebene E von ihrem Pol harmonisch trennen; bemerkt man nun, dass das Segment der Verbindungslinie des Mittelpunkts mit dem Pol von E zwischen den beiden Tangentialebenen in Lage und Länge ein Durchmesser des Ellipsoids ist, so folgt, dass man dasselbe Verfahren nur noch zwei Mal, zuerst für eine Ebene, die durch den bestimmten Durchmesser geht, wodurch man einen zweiten, dem ersten conjugirten Durchmesser in der ersten Ebene E, und dann noch für die Ebene der nun bestimmten zwei Durchmesser zu wiederholen braucht, um in Lage und Länge drei conjugirte Durchmesser zu erhalten, wodurch das Ellipsoid vollständig bestimmt ist.

Hat man nur die Kräfte zweier Gruppen zusammenzusetzen, so liegt der Mittelpunkt aller Kräfte so auf der Verbindungslinie

der Gruppenmittelpunkte, dass er sie in Segmente theilt, die sich umgekehrt wie die Intensität der Kräfte Nr. 46 S. 123, also umgekehrt wie die Summe der Momente der Constanten P jeder der beiden Gruppen verhalten.

Lässt man an entsprechenden Punkten zweier affiner Systeme (Staudt Nr. 138 collineär verwandten Systemen, in denen die unendlich ferne Ebene des einen der unendlich fernen Ebene des andern entspricht) Kräfte wirken, welche mit gleichen oder proportionalen Constanten zu multipliciren sind: so kann man bei gehöriger Annahme des Horizontalschubs der Seilpolygone es so einrichten, dass alle Constructionen, die zur Bestimmung der Schwerpunkte und Centralellipsoide nothwendig sind, ebenfalls in beiden Systemen affin liegen; also werden sich auch die Mittelpunkte entsprechender Kräfte in beiden Systemen entsprechen.

Besondere Fälle sind es, wenn die beiden Systeme eine wirkliche Ebene und einen Parallelstrahlenbündel, oder auch die unendlich ferne Ebene und einen wirklichen Strahlenbündel entsprechend gemein haben. In diesem letztern Fall sind die Systeme nicht nur affin verwandt, sondern sie sind und liegen auch ähnlich. Die Beschränkung der collineären Verwandtschaft auf affine ist nothwendig, weil die Kräfte der Voraussetzung gemäss in beiden Systemen immer parallel bleiben sollen; also muss einem Parallelstrahlenbündel im einen System, ein solcher im andern entsprechen.

In allen diesen Fällen wird man also unmittelbar die Resultate der Constructionen im einen Systeme nach den Gesetzen der affinen Verwandtschaft in das andere System übertragen können.

65. Der Kern eines Körpers.

Denkt man sich die Ebene E der beiden vorigen Nummern nicht mehr fest, sondern veränderlich, so wird sich auch der Angriffspunkt der Mittelkraft der Kräfte nach den Gesetzen der reciproken Verwandtschaft im Polarsystem verändern, dessen Ordnungsfläche das Centralellipsoid der Constanten P ist, indem der Angriffspunkt immer der Pol der zu E symmetrischen Ebene bleibt.

Beschreibt also die Ebene E:	so beschreibt der Angriffspunkt der Mittelkraft:
Einen Ebenenbüschel 1. Ordnung, indem sie sich um eine gerade Linie dreht.	Eine gerade Linie.
Einen Ebenenbüschel 2. Ordnung, indem sie eine Kegelfläche umhüllt.	Eine ebene Curve 2. Ordnung.
Einen Ebenenbündel 1. Ordnung, indem sie immer durch einen festen Punkt geht.	Eine Ebene in der er immer bleibt.
Einen Ebenenbündel 2. Ordnung, indem sie eine Fläche 2. Grades umhüllt.	Eine Fläche 2. Ordnung aus der er nicht heraustritt.
Irgend einen Körper, von dem sie ausgeschlossen ist.	Irgend einen K e r n in dem er bleibt.

Wir wollen die Bedeutung dieses Kernes durch ein Beispiel klar zu machen suchen.

Gesetzt, es seien die einzelnen Theilchen eines Körpers Anziehungskräften ausgesetzt, die von einer Ebene ausgehen, deren Intensität der Entfernung von dieser Ebene proportional ist, und es können die anziehenden Ebenen nie in das Innere des Körpers dringen, sondern ihn höchstens berühren, seien also von ihm ausgeschlossen, so ist der Kern dieses Körpers der Ort aller Lagen des Mittelpunktes der Anziehung, über den dieser nie heraustreten wird.

In der Folge werden wir es zwar nie mit einem System von Kräften zu thun haben, bei welchem deren Angriffspunkte im Raum zerstreut sind, dagegen sehr häufig mit solchen, deren Angriffspunkte alle in eine Ebene fallen. Dahin gehören z. B. die Spannungen der Fibern in dem eben vorausgesetzten Querschnitt eines gebogenen Balkens, indem diese Spannungen jederzeit den Entfernungen von der neutralen Faser proportional angenommen werden. Wir schliessen daher mit Anwendung des Entwickelten auf die Ebene und insbesondere auf das eben berührte Beispiel.

66. Das Trägheitsmoment, die Trägheitsellipse und der Kern eines Körpers in der Ebene.

Wenn die Angriffspunkte der parallelen Kräfte alle in einer Ebene liegen, so liegt auch der Angriffspunkt ihrer Mittelkraft in derselben, und bildet man dann die $\Sigma y^2 P$, $\Sigma y z P$, $\Sigma z^2 P$ etc., so behalten diese reelle Werthe, insofern die Angriffspunkte in der Ebene der $y z$ liegen, während alle andern Productensummen welche x enthalten, verschwinden. Es reduciren sich also dann das Trägheits- und das Centralellipsoid auf Ellipsen; im Uebrigen gilt aber wörtlich das bisher Entwickelte; die einzige Aenderung besteht eben darin, das eine dritte Axe Betreffende wegzulassen. Indem wir diess thun, wiederholen wir das Bisherige kurz in der folgenden Zusammenstellung.

Bildet man für die Kräfte P, deren Angriffspunkte alle in einer Ebene liegen, das Trägheitsmoment $\Sigma q^2 P = k^2 \Sigma P$ wo q die in beliebiger Richtung gemessene Entfernung dieser Angriffspunkte von einer in derselben Ebene gelegenen Linie E bezeichnet, und man führt in der Entfernung $+k$ und $-k$ natürlich parallel zu q gemessen, zwei Parallellinien zu E, so umhüllen alle Parallellinien, welche man auf diese Weise erhält, wenn E sich um einen festen Punkt O dreht (einen Strahlenbüschel 1. Ordnung beschreibt) eine Ellipse (sie bilden einen Strahlenbüschel 2. Ordnung), die den Punkt O zum Mittelpunkt hat.

Für zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse ist $\Sigma y z P = 0$.

Hat man zum Punkt O den Mittelpunkt der Kräfte (den Schwerpunkt des Systems) gewählt, so heisst die Ellipse die Centralellipse.

Um also in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Linie oder Axe das Trägheitsmoment zu erhalten, hat man die Summe aller Kräfte ΣP mit dem Quadrat der Entfernung der Paralleltangente, also mit k^2 zu multipliciren.

Geht die Axe nicht durch den Schwerpunkt, so ist k^2 um i^2 zu vergrössern, wo i die Entfernung des Schwerpunktes von der gegebenen Axe bezeichnet, d. h. es ist das Trägheitsmoment für eine beliebige Axe

$$\Sigma q^2 P = (i^2 + k^2) \Sigma P.$$

Entfernt sich der Mittelpunkt der Trägheitsellipse in irgend einer Richtung vom Schwerpunkt, dem Mittelpunkt der Centralellipse, so bleibt der dieser Richtung conjugirte Durchmesser constant, während der in dieser Richtung selbst liegende Durchmesser stets gleich $\sqrt{i^2 + k^2}$ ist, wo i jetzt die Entfernung des neuen Mittelpunktes vom Schwerpunkt, und k die Länge des in der Richtung von i liegenden Halbdurchmessers der Centralellipse bezeichnet.

Jede Trägheitsellipse enthält den Schwerpunkt, von je zwei conjugirten Durchmessern geht einer durch die Centralellipse.

Wird irgend eine gegebene Linie als Axe der y angenommen, und soll die andere Axe der z durch den Schwerpunkt gehen und so liegen, dass $\Sigma y z P$ gleich 0 ist, so ist die letztere der der Richtung der y conjugirte Durchmesser der Centralellipse.

Können alle Kräfte so gruppirt werden, dass die Verbindungslinien aller Angriffspunkte einer Gruppe parallel laufen und dass die Angriffspunkte der Mittelkraft einer jeden Gruppe in einer geraden Linie liegen, so sind die mit diesen beiden Linien parallel laufenden Durchmesser der Centralellipse conjugirt, ebenso die parallelen Durchmesser aller Trägheitsellipsen, deren Mittelpunkt auf einem jener Durchmesser der Centralellipse liegen.

Können alle Kräfte so gruppirt werden, dass die Mittelpunkte der Centralellipsen jeder einzelnen Gruppe auf einer Geraden liegen, und dass die dieser Geraden conjugirten Durchmesser in allen Ellipsen parallel laufen, so ist auch der Paralleldurchmesser der Centralellipse des ganzen Systems der Centrumlinie conjugirt.

Alles eben Gesagte gilt natürlich auch, wenn die conjugirten Durchmesser senkrecht auf einander stehen, Hauptaxen des Systemes sind.

67. System paralleler an einem ebenen Querschnitt wirkender Kräfte, deren Intensität ihrer Entfernung von einer neutralen Axe proportional ist. Der Kern des Querschnitts.

In dem speciellen Fall von Nr. 63 S. 170 den wir jetzt vor Augen haben, nehmen wir an, die Constanten P seien den Flächenelementen $\triangle F$ proportional, deren Querschnitt sie entsprechen,

indem wir den Inhalt des ganzen Querschnitts mit F bezeichnen. Wir construiren nun den Schwerpunkt und die Centralellipse von F und bezeichnen die parallel aber sonst beliebig gemessenen Entfernungen des Schwerpunktes von der neutralen Axe mit i und von den mit ihr parallel laufenden Tangenten der Centralellipse mit $\pm k$, dann ist die Summe aller Spannungen dem Product der Querschnittsfläche mit der Entfernung des Schwerpunktes von der Axe also iF proportional.

Der Angriffspunkt der Mittelkraft aller Spannungen ist der Pol der Linie, welche mit der Axe symmetrisch zum Schwerpunkt liegt; seine Entfernung von der Axe ist nach Nr. 63 S. 172 gleich

$$i + \frac{k^2}{i}$$

Das Moment aller Spannungen bezüglich der Axe ist also dem Product

$$\left(i + \frac{k^2}{i}\right) i F$$

also $(i^2 + k^2)\, F$ proportional.

Kann man den Querschnitt F in Partialquerschnitte $F, F_{,,}$ etc. zerlegen, deren Centralellipsen von vornherein, entweder durch Construction, oder dadurch, dass es einfache geometrische Figuren sind, bekannt sind, so kann man alle dadurch zu einem Ganzen durch ein Seilpolygon zusammensetzen, dass man die Flächenmomente iF an ihren Angriffspunkten

$$i + \frac{k^2}{i}$$

wirken lässt.

Diese letztere Zusammensetzung kann, wenn der Schwerpunkt des ganzen Systems schon bekannt ist, dadurch vereinfacht werden, dass man nicht die Momente iF, sondern die Momente $\sqrt{i^2 + k^2} \cdot F$ bildet, und sie am Hebelarm $\sqrt{i^2 + k^2}$ wirken lässt; die Kräfte behalten dann in den zwei Polygonen dieselben Angriffspunkte und man hat viel weniger Parallellinien zu ziehen; dass man aber in jedem Fall genau zu demselben Resultat gelangt geht daraus hervor, dass

$$i\left(i + \frac{k^2}{i}\right) = \left(\sqrt{i^2 + k^2}\right)^2$$

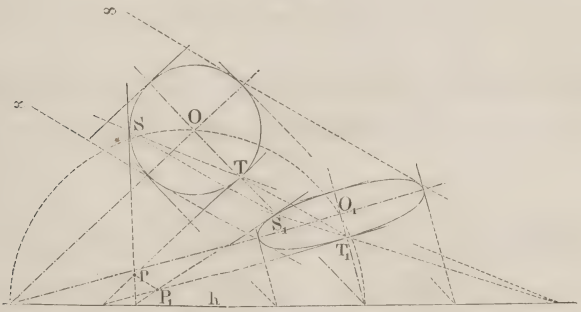
ist.

Sind zwei Querschnitte affin verwandt, so sind es auch alle Constructionslinien, welche zur Bestimmung der Centralellipse dienten. Verwandten Axen werden daher auch verwandte Pole entsprechen und umgekehrt.

Fig. 93 ist der besondere Fall der affinen Verwandtschaft dargestellt, wo die beiden Systeme einen unendlich fernen Punkt ∞ und die gerade Linie h entsprechend gemein haben.

Alle entsprechenden Punkte $O\ P\ S\ T$ und $O,\ P,\ S,\ T,$ liegen auf den Parallelen, die durch den Punkt ∞ gehen, und alle entsprechenden Linien, wie die Tangenten $S\ P$ und $S,\ P,$, $T\ P$ und $T,\ P,$ so wie die Verbindungslinien irgend zweier entsprechenden Punkte schneiden sich auf h.

Fig. 93.



Da Aehnlichkeit nur ein besonderer Fall von Affinität ist, so gilt das eben Gesagte natürlich auch von ähnlichen Systemen.

Denkt man sich die neutrale Axe nicht mehr fest, so verändert sich auch die Lage des Angriffspunktes der Mittelkraft.

Beschreibt die neutrale Axe:	so beschreibt der Angriffspunkt der Mittelkraft:
Einen Strahlenbüschel 1. Ordnung, indem sie sich um einen Punkt dreht.	Eine gerade Linie.
Einen Strahlenbüschel 2. Ordnung, indem sie immer eine Curve 2. Ordnung umhüllt.	Eine Curve zweiter Ordnung.
Den Umfang des Querschnitts, indem sie von ihm ausgeschlossen ist.	Den Kern des Querschnitts, in dem er eingeschlossen bleibt.

Die Bedeutung dieses Kerns erläutern wir an folgendem Beispiel. Es giebt Constructionstheile wie z. B. Mauern, die nur in einer Richtung widerstehen sollen und können. Mauern sollen z. B. keinen Spannungen, sondern nur Pressungen ausgesetzt sein; damit nun die einzelnen Mauerschichten nur solchen auch wirklich ausgesetzt seien, darf der Mitteldruck der Belastung nicht aus dem Kern heraustreten; findet diess aber dennoch statt, indem die Mauer z. B. zu nahe am Rand belastet wird, so kann sie auf der andern Seite Risse bekommen.

Achtes Kapitel.

Construction der Centralellipse, des Centralellipsoids und des Kerns.

68. Construction der Centralellipse und des Centralellipsoids im Allgemeinen.

Da durch die Centralellipse und das Centralellipsoid alle Momentenverhältnisse eines Querschnitts oder eines Körpers gegeben sind, so wollen wir sie hier für die einfachsten Querschnitte und Körper bestimmen und dann zeigen, wie sie für unregelmässige Querschnitte und Körper construirt werden können.

Unter einfachen Körpern und Querschnitten (Linien betrachten wir hier nicht) verstehen wir solche, an denen von vornherein die Lage zweier conjugirter Elemente, welche durch den Schwerpunkt gehen, angegeben, und die Länge oder der Flächeninhalt der Parallelelemente durch eine einfache Funktion ihrer senkrechten Entfernungen von einander ausgedrückt werden kann. In diesem Fall ist die Rechnung oder vielmehr das Auftragen der ein für allemal berechneten Resultate einfacher als die graphische Methode.

Wählt man daher den auf den Parallelelementen senkrechten Durchmesser als Axe der z und bezeichnet man das Parallelelement

mit y, durch das hier eine Länge oder eine Fläche dargestellt wird, so ist innerhalb der Grenzen des Körpers oder Querschnittes

Der Inhalt $= \int y \, dz$

Das statische Moment $= \int y z \, dz$

Das Trägheitsmoment $(i^2 + k^2) \int y \, dz = \int y z^2 \, dz$

und weil $i = \dfrac{\int y z \, dz}{\int y \, dz}$ ist,

so wird das Quadrat des senkrecht zu y gemessenen halben Durchmessers

$$k^2 = \frac{\int y z^2 \, dz}{\int y \, dz} - \left(\frac{\int y z \, dz}{\int y \, dz} \right)^2.$$

Wird zum Ursprung der z das durch den Schwerpunkt gehende Parallelelement gewählt, so wird das letzte Glied

$$\frac{\int y z \, dz}{\int y \, dz} = 0.$$

Sind endlich zwei von diesem Parallelelement gleichweit abstehende y gleich lang oder gleichen Flächeninhalts, so kann man die Integration auf die eine Hälfte des Querschnitts oder Körpers beschränken, weil es genau auf das Gleiche herauskommt, wenn man das halbe Trägheitsmoment mit dem halben Inhalt, als wenn man das ganze Trägheitsmoment mit dem ganzen Inhalt dividirt.

69. Centralellipse und Kern ebener geradlinigt begrenzter Figuren.

a) Die Centralellipse und der Kern eines Parallelogramms.

Conjugirte Durchmesser sind die durch den Schwerpunkt gehenden Parallelen zu den Seiten.

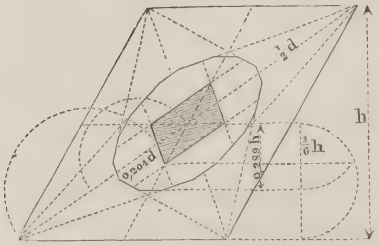
$y = b$ ist constant; bezeichnet man die Höhe des Parallelogramms mit h, so erhält man

$$k^2 = \frac{\int_o^{1/2\,h} b\, z^2\, d\, z}{\int_o^{1/2\,h} b\, d\, z} = {}^1/_{12}\, h^2$$

$$= (0{,}2887\ h)^2$$

Am schnellsten gelangt man wohl immer zur Centralellipse, wenn man direct die Länge 0,2887 h als senkrechte Höhe der halben Ellipse (Fig. 94) aufträgt, will man aber diese Grösse durchaus construiren, so kann man über der halben Höhe einen Halbkreis construiren, dann ist die Sehne, welche $^1/_6 h$ (siehe Fig. 94) zur Projection hat, die halbe Höhe der Ellipse, denn ihr Quadrat ist $= {}^1/_6 h \,.\, {}^1/_2\, h = {}^1/_{12}\, h^2$.

Fig. 94.



Das Trägheitsmoment in Bezug auf den Durchmesser b ist natürlich gleich $^1/_{12}\, b\, h^3$.

Nimmt man eine Seite als Axe an, so erhält man als Entfernung des Mittelpunktes aller Kräfte, oder als Entfernung der entsprechenden Ecke des Kernes von dieser Axe

$$i + \frac{k^2}{i} = {}^1/_2\, h + \frac{{}^1/_{12}\, h^2}{{}^1/_2\, h} = {}^1/_2\, h + {}^1/_6\, h$$

Die halbe Höhe des Kernes ist daher gleich dem $^1/_6$ der Höhe des Parallelogramms. Er nimmt also in Höhe das innere Drittel desselben ein.

Die zwei parallelen Seiten entsprechenden Ecken liegen natürlich auf dem conjugirten, den andern Seiten parallellaufenden Durchmesser. Da ferner die Diagonalen eines jeden, einer Curve zweiter Ordnung umschriebenen Vierecks conjugirt sind, so laufen auch die Tangenten an den Curvenpunkten der einen Diagonale mit der andern parallel. Die Curvenpunkte selbst sind dadurch gegeben, dass sie vom Eckpunkt des Parallelogramms und von der schon bekannten Kernseite harmonisch getrennt sind, während ihre Mitte mit dem Mittelpunkt der Curve zusammenfallen muss. Die Hälfte des sie verbindenden Durchmessers

(siehe Fig. 94) ist daher gleich der Entfernung des Mittelpunktes der Curve vom Schnitt zweier Halbkreise, wovon der eine über den zu trennenden Punkten und der andere über der Distanz der Mittelpunkte dieses Kreises und der Curve beschrieben wurde; denn die Schnitte zweier sich rechtwinkelig schneidenden Kreise mit einer Linie, die durch den Mittelpunkt des einen geht, liegen immer harmonisch.

Uebrigens kann man diesen Durchmesser direct auftragen, da er von der Kernseite in dem $^1/_{12}$ der ganzen Diagonallänge d geschnitten wird und demnach

$$\frac{k^2}{^1/_2\, d} = {}^1/_{12}\, d$$

sein soll, so muss seine halbe Länge

$$k = \sqrt{{}^1/_{24}\, d^2} = 0{,}2041\, d \text{ sein.}$$

Werden auch noch die 8 durch die Parallelogrammecken gehenden Tangenten, von denen nur eine construirt zu werden braucht, weil alle anderen symmetrisch liegen, eingezeichnet, so sind 16 Tangenten vorhanden, welche Fig. 94 statt der Ellipse ausgezogen wurden.

Verwandelt sich das Parallelogramm in ein Quadrat, so stehen die beiden gleich langen conjugirten Durchmesser senkrecht auf einander und die Ellipse wird ein Kreis; dasselbe findet natürlich auch bei allen stern- und kreuzförmigen Querschnitten statt, welche bezüglich von 4 Durchmessern, die Winkel von 45° mit einander bilden, symmetrisch sind.

b) Die Centralellipse und der Kern eines Dreiecks.

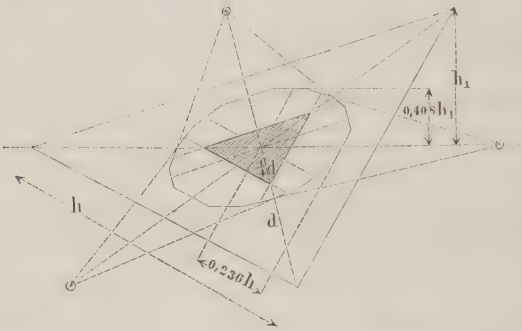
Conjugirte Durchmesser sind (Fig. 95) die Linie, welche eine Spitze mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite verbindet, und die durch den Schwerpunkt gehende Parallele zu dieser Seite. Bezeichnet man die Länge einer Lamelle in der parallel zu h gemessenen Entfernung z von der Spitze mit τz, so ist das Quadrat der halben Höhe der Ellipse

$$k^2 = \frac{\int_o^h \tau\, z^3\, d\, z}{\int_o^h \tau\, z\, d\, z} - \left(\frac{\int_o^h \tau\, z^2\, d\, z}{\int_o^h \tau\, z\, d\, z} \right)^2$$

$$= \left({}^2/_4 - ({}^2/_3)^2 \right) h^2 = {}^1/_{18}\, h^2 = (0{,}2357\ h)^2$$

Hierdurch ist auch die Höhe der Centralellipse des halben Dreiecks mit ${}^1/_{18}\, h_1{}^2$ bekannt; um aber den Trägheitshalbmesser

Fig. 95.



bezüglich der um ${}^1/_3\, h_1$ vom Schwerpunkt desselben abstehenden Halbirungslinie des Dreiecks zu erhalten, hat man nur $({}^1/_3\, h_1)^2$ zu addiren.

Das Quadrat der halben Höhe der Ellipse über der Halbirungslinie des Dreiecks ist demnach

$$= ({}^1/_{18} + {}^1/_9)\, h_1{}^2 = {}^1/_6\, h_1{}^2 = (0{,}4082\ h_1)^2$$

Wiederholt man die sub a) angeführten Schlüsse, so folgt, dass die Entfernung der der Spitze des Dreiecks entsprechenden und mit der gegenüberliegenden Seite parallel laufenden Seite des Kerns vom Schwerpunkt gleich

$$\frac{{}^1/_{18}\, h^2}{{}^2/_3\, h} = {}^1/_{12}\, h,$$

und die Entfernung der einer Seite entsprechenden Ecke des Kernes vom Schwerpunkt

$$= \frac{{}^1/_{18}\, h^2}{{}^1/_3\, h} = {}^1/_6\, h$$

sei. Bemerkt man nun, dass $^1/_6$ und $^1/_{12}$ das $^1/_4$ von $^2/_3$ und $^1/_3$ ist, so folgt, dass der Kern ein dem gegebenen Dreieck ähnliches und bezüglich des Schwerpunktes ähnlich gelegenes Dreieck sei, dessen sämmtliche Dimensionen $^1/_4$ des gegebenen Dreiecks sind.

$\sqrt{^1/_{18}\, h^2}$ und $\sqrt{^1/_6\, h_1^2}$ können auch so construirt werden, wie es bei dem Paralleltrapez gezeigt werden wird.

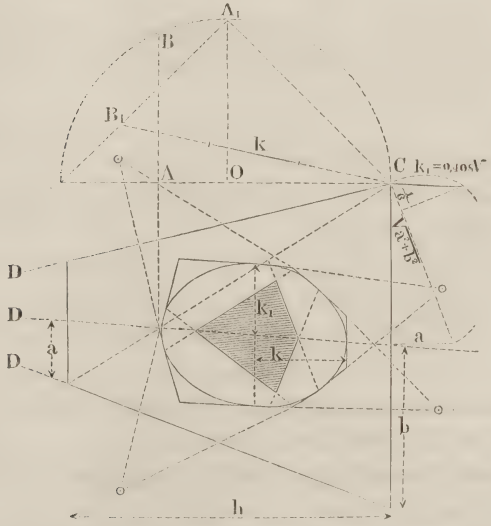
Bei der Construction giebt jede Seite 4 Tangenten der Ellipse, werden ausserdem noch durch jeden Eckpunkt die beiden Tangenten an der Trägheitsellipse construirt, so erhält man 18 Tangenten, welche Fig. 95 statt der Ellipse ausgezogen wurden.

c) Die Centralellipse und der Kern eines Paralleltrapezes.

Conjugirte Durchmesser sind: die Linie, welche die Mitten der beiden Parallelseiten mit einander verbindet und die durch den Schwerpunkt gehende Parallele zu diesen.

Wir theilen das Trapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, deren Inhalte gleich $a\,h$ und $b\,h$ sind (siehe Fig. 96, bezüglich der Bezeichnung und des Folgenden). Die Schwerpunkte dieser beiden Dreiecke liegen in den Dritteln von h und die Ent-

Fig. 96.



fernung derselben wird durch den Schwerpunkt des Trapezes im umgekehrten Verhältniss von a und b getheilt, so dass diese Entfernungen gleich

$$\frac{b}{a+b} \cdot {}^1/_3\, h \text{ und } \frac{a}{a+b} \cdot {}^1/_3\, h \text{ sind.}$$

Das Trägheitsmoment der beiden Dreiecke oder des Trapezes bezüglich des zu den Parallelseiten parallelen Durchmessers ist demnach gleich

$$\left[{}^1/_{18} + \left(\frac{b}{3(a+b)}\right)^2 \right] h^2 \cdot a\, h + \left[{}^1/_{18} + \left(\frac{a}{3(a+b)}\right)^2 \right] h^2 \cdot b\, h$$

Theilt man dieses Moment durch den Inhalt $(a + b)\, h$, so erhält man:

$$k^2 = \left({}^1/_{18} + \frac{a\, b}{9\,(a+b)^2} \right) h^2$$

Um dieses k zu construiren, schreibe man es also an:

$$3\, k = \sqrt{{}^1/_2\, h^2 + \frac{a\, b}{(a+b)^2} \cdot h^2}$$

Wir beschreiben einen Halbkreis über der Höhe h (Fig. 96). Jede der Seiten des ihm einbeschriebenen gleichschenkeligen Dreiecks ist gleich

$$A_1\, C = \sqrt{{}^1/_2\, h^2}$$

Die durch den Kreuzungspunkt der Diagonalen des Trapezes bestimmte Ordinate ist gleich

$$A\, B = \sqrt{\frac{a}{a+b}\, h \cdot \frac{b}{a+b}\, h}$$

Wir machen daher $A_1\, B_1 = A\, B$ gleich dieser Ordinate, so erhalten wir in $B_1\, C$ die Länge $3\, k$.

Das Drittel derselben ist gleich der halben Höhe der Centralellipse.

Diese Construction ist unter allen Verhältnissen einfacher als die Rechnung, sie ist nicht schwer auswendig zu lernen, und dann auch auf das Dreieck, wo $k = {}^1/_3\, A_1\, C$ ist und auf das

Parallelogramm, wo $A_1 B_1 = A O$ gleich dem Halbmesser des Kreises zu machen ist, anwendbar.

Um die Länge des den Parallelseiten parallelen Durchmessers zu erhalten, ergänzen wir das Trapez zum Dreieck, dessen Spitze in D liegt (der Punkt selbst fällt nicht mehr in den Rahmen der Figur), und stellen bei Bestimmung des entsprechenden k, a und b senkrecht auf den sie halbirenden Durchmesser und erhalten dadurch ein affines Trapez, dessen halbe Axenlänge gleich der halben Durchmesserlänge (nicht halben Höhe) des vorliegenden Trapezes ist, laut Nr. 67 S. 179. Bezeichnet dann h die Höhe des verwandelten Trapezes, so ist:

		des grossen Dreiecks	des kleinen Dreiecks
Die Höhe	$=$	$\frac{b\,h}{b-a}$	$\frac{a\,h}{b-a}$
Der Inhalt	$=$	$\frac{b^2\,h}{b-a}$	$\frac{a^2\,h}{b-a}$
Das Trägheitsmoment	$=$	$\frac{1}{6}\frac{b^4\,h}{b-a}$	$\frac{1}{6}\frac{a^4\,h}{b-a}$

demnach $k^2 = \frac{1}{6}\frac{b^4-a^4}{b^2-a^2} = \frac{1}{6}(a^2+b^2)$

oder $k = 0{,}4082\sqrt{a^2+b^2}$

Unter allen Verhältnissen ist es am einfachsten $\sqrt{a^2+b^2}$ zu construiren, wie es in Fig. 96 gezeigt ist. Dann kann man entweder direct 0,4082 der Länge nehmen, oder auch noch $\sqrt{\frac{1}{6}(a^2+b^2)}$ construiren, wie es in der Figur angedeutet ist. Auf dieselbe Weise kann auch die Höhe der Centralellipse über einer das Dreieck halbirenden Seite construirt werden.

Allgemein lässt sich die Lage der Ecken und Seiten des Centralkerns nicht mehr einfach festsetzen und wird daher wohl am zweckmässigsten durch Zeichnung der Polaren der Ecken des symmetrischen Trapezes bestimmt; dabei ist nur zu bemerken, dass die den Parallelseiten entsprechenden Ecken auf den conjugirten Durchmesser, der das Trapez hälftet, fallen müssen. Die Ecken, welche den beiden übrigen Seiten entsprechen, liegen auf den Polaren des zu D symmetrischen Punktes.

70. Centralellipse und Kern parabolischer und elliptischer Figuren.

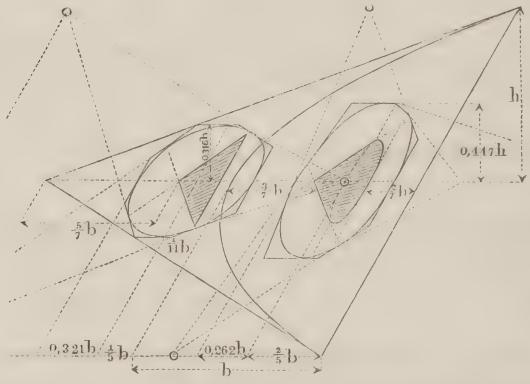
a) Centralellipse und Kern eines Parabelsegmentes.

Conjugirte Durchmesser sind der der Sehne conjugirte Durchmesser der Parabel, und die durch den Schwerpunkt gehende Parallele zur Sehne.

Zur Bestimmung des im Parabeldurchmesser liegenden Durchmessers der Centralellipse hat man die Parabelgleichung

$$y = \sqrt{p} \, . \, z^{1/2}$$

Fig. 97.



und demnach für eine Segmentlänge $= b$ (siehe Fig. 97)

$$k^2 = \frac{\int_0^b \sqrt{p}\, z^{5/2}\, dz}{\int_0^b \sqrt{p}\, z^{1/2}\, dz} - \left(\frac{\int_0^b \sqrt{p} \, . \, z^{3/2}\, dz}{\int_0^b \sqrt{p}\, z^{1/2}\, dz} \right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{7} - \frac{3^2}{5^2} \right) b^2 = \frac{12}{175}\, b^2 = (0{,}26186\, b)^2$$

Für die auf b senkrechte Höhe der Ellipse hat man bei der Bezeichnung von Fig. 97

$$y = b\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)$$

und

$$k^2 = \frac{\int_0^h b\left(z^2 - \frac{z^4}{h^2}\right)dz}{\int_0^h b\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)dz} = \frac{1/3 - 1/5}{1 - 1/3}h^2 = 1/5\,h^2 = (0{,}44721\,h)^2$$

Die Entfernung der Spitze des Kerns, welche der Parabelsehne entspricht vom Schwerpunkt, ist gleich

$$\frac{k^2}{2/5\,b} = \frac{5}{2}\cdot\frac{12}{175}b = \frac{6}{35}b$$

den sich in dieser Spitze schneidenden Tangenten der Kernellipse entsprechen die Endpunkte der Sehne als Parabelpunkte.

Da alle Tangenten der Parabel von der Centralellipse ausgeschlossen sind, so liegen alle entsprechenden Punkte des Kernumfangs im Innern der Centralellipse; der gekrümmte Theil desselben kann daher nur einer Ellipse angehören, welche durch den Mittelpunkt der Centralellipse, den Schwerpunkt, gehen muss, weil die unendlich ferne Gerade die Parabel berührt.

Der Scheiteltangente der Parabel entspricht ein Punkt der Kernellipse, dessen Entfernung vom Schwerpunkt gleich

$$\frac{k^2}{3/5\,b} = \frac{5}{3}\cdot\frac{12}{175}b = \frac{4}{35}b$$

Die Entfernungen zwischen dem Kern und dem Segment betragen einerseits

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{6}{35} = \frac{3}{7}\right)b$$

andrerseits

$$\left(\frac{2}{5} - \frac{4}{75} = \frac{2}{7}\right)b$$

und der Kern nimmt im Innern des Segments nur $2/7$ von dessen Breite ein.

Die übrigen Dimensionen des Kerns werden wohl immer am zweckmässigsten mittelst der Centralellipse construirt.

b) Centralellipse und Kern eines Parabeldreiecks.

Unter diesem verstehen wir die Fläche zwischen zwei Parabeltangenten und dem zwischen-liegenden Parabelbogen (siehe Fig. 97).

Conjugirte Durchmesser sind der durch den Schnittpunkt der Tangenten gehende Parabeldurchmesser, der mit dem Segmentdurchmesser zusammenfällt und die zur Scheiteltangente Parallele durch den Schwerpunkt.

Am leichtesten gelangt man wohl zu den Durchmesserlängen, wenn man das Parabeldreieck als Differenz des durch die beiden Tangenten und die Sehne gebildeten Dreiecks und des Parabelsegments betrachtet.

Bezeichnen wir den Inhalt des Parabeldreiecks mit F, so ist der des Segments $= 2\ F$ und der des ganzen Dreiecks $= 3\ F$.

Ferner liegt der Schwerpunkt laut Nr. 58d S. 155 in dem $^1/_5$ der Basis vom Scheitel ab gemessen. Da nun die Breite des Segments ebenfalls gleich der des Parabeldreiecks $= b$ ist, so beträgt die Entfernung des Schwerpunkts dieses letztern von dem des ganzen Dreiecks

$$\frac{6}{5}\ b\ -\ \frac{1}{3}\ 2\ b = \frac{8}{15}\ b,$$

und die vom Schwerpunkt des Segments

$$\frac{6}{5}\ b\ -\ \frac{2}{5}\ b\ =\ \frac{4}{5}\ b,$$

Das Moment des ganzen Dreiecks ist daher gleich

$$\left[\frac{1}{18}\ .\ (2\,b)^2 + \left(\frac{8}{15}\ b\right)^2\right]\ 3\ F$$

Und das des Segments laut a) gleich

$$\left[\frac{12}{175}\ .\ b^2 + \left(\frac{4}{5}\,b\right)^2\right]\ 2\ F$$

Dividirt man die Differenz dieser beiden Trägheitsmomente durch den Inhalt F des Parabeldreiecks, so erhält man für dasselbe:

$$k^2 = \left[3\left(\frac{4}{18} + \frac{64}{15^2}\right) - 2\left(\frac{12}{175} + \frac{16}{25}\right)\right] b^2 =$$

$$= \frac{18}{175} b^2 = (0{,}32071\ b)^2$$

Das Moment in Bezug auf den Parabeldurchmesser gestaltet sich einfacher, weil alle drei Schwerpunkte in demselben liegen; man erhält das Moment

$$\frac{1}{6} h^2 . 3F - \frac{1}{5} h^2 . 2F \text{ und}$$

$$k^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) h^2 = \frac{1}{10} h^2 = (0{,}31623\ h)^2$$

Bei Bestimmung des Kerns fällt der Parabelbogen ausser Betracht, weil alle seine Tangenten das Dreieck schneiden und daher keine von demselben ausgeschlossen ist. Der Kern entspricht daher dem ganzen vollen Dreieck.

Die Entfernung der dem Schnitt der Tangenten entsprechenden Seite vom Schwerpunkt ist gleich

$$\frac{18}{175} b^2 : \frac{4}{5} b = \frac{9}{70} b$$

und die Entfernung derselben, von dem nur um $\frac{1}{5} b$ abstehenden Parabelrand gleich

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{9}{70} = \frac{1}{14}\right) b$$

Die Entfernung des der Sehne entsprechenden Eckpunktes vom Schwerpunkt ist gleich

$$= \frac{18}{175} b^2 : \frac{6}{5} b = \frac{3}{35} b$$

und die Entfernung desselben vom Eckpunkt des Parabeldreiecks gleich

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{35} = \frac{5}{7}\right) b$$

Die übrigen Elemente des Kerns bestimmen sich wohl immer am zweckmässigsten durch Construction.

In der Regel betrachtet man alle Abrundungen der Querschnitte, sei es, dass sie auswärts oder dass sie einwärts gekehrt seien, als solche Parabelbogen; gewöhnlich genügt es, die eben gezeichneten Centralellipsen nach dem Augenmaass einzuzeichnen um das Wenige, um welches bei Bestimmung der Trägheitsmomente der Schwerpunkt verrückt werden muss, bemessen zu können.

Den Centralkern wird man wohl nie brauchen, denn die kleinen Dimensionen desselben zeigen schon, wie ungünstig die Verwendung solcher Parabelquerschnitte zu selbstständig tragenden Theilen ist.

c) Centralellipse und Kern ganzer und ringförmiger Ellipsen.

Den elliptischen Sector und das elliptische Segment übergehen wir hier; die Integration führt jederzeit zu einem ziemlich complicirten Ausdruck, der eine Sinusfunction und zwei Glieder mit Wurzelgrössen enthält, die Berechnung derselben ist viel complicirter als die Construction.

Man theile das Gebilde in Lamellen und verfahre graphisch wie bei unregelmässigen Querschnitten, auf die wir bald zurückkommen werden.

Für ganze Ellipsen und Kreise aber wird die Centralellipse jederzeit der gegebenen Ellipse ähnlich, denn wir können für jeden Durchmesser $y = \alpha \sqrt{h^2 - z^2}$ setzen, wo α eine mit der Curve veränderliche Constante, während h die Höhe der Ellipse über dem Durchmesser bezeichnet, für welchen das Trägheitsmoment bestimmt werden soll.

Nun ist aber

$$k^2 = \frac{\int_o^h \alpha\, z^2 \sqrt{h^2 - z^2}\, .\, dz}{\int_o^h \alpha \sqrt{h^2 - z^2}\, dz} = {}^1/_4\, h^2 = ({}^1/_2\, h)^2$$

Ist aber die Trägheitsellipse in jeder Richtung halb so hoch als die Ellipse der sie zugeordnet ist, so wird sie ihr auch ähnlich und ähnlich gelegen sein, und alle ihre Dimensionen halb so gross als die jener sein.

Dasselbe gilt natürlich auch vom Kern, da i immer gleich h ist, so wird die halbe Höhe der Kernellipse

$$= \frac{k^2}{i} = \frac{\frac{1}{4} h^2}{h} = \frac{1}{4} h .$$

Die Dimensionen der Kernellipse werden also gleich dem $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen und gleich $\frac{1}{2}$ der Trägheitsellipse sein.

Der Kreis, der zugeordnete Trägheitskreis und der Kern sind Kreise, deren Halbmesser gleich

$$r, \frac{1}{2} r \text{ und } \frac{1}{4} r$$

sind.

Für den Ring zwischen zwei ähnlichen Ellipsen ist das Trägheitsmoment

$$= \frac{1}{4} h^2 F - \frac{1}{4} h_1^2 \frac{h_1^2}{h^2} F$$

wenn wir mit F den Flächeninhalt der grössern Ellipse, und mit h_1 die h ähnliche Höhe der kleinern bezeichnen, denn die Flächeninhalte ähnlicher Gebilde verhalten sich wie die Quadrate ähnlicher Dimensionen; man erhält daher:

$$k^2 = \frac{\frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{4} \frac{h_1^4}{h^2}}{1 - \frac{h_1^2}{h^2}} = \frac{1}{4} (h^2 + h_1^2)$$

71. Centralellipse und Kern eines Schienenprofils.

Wir können zum Trägheitsmoment und dann zum Trägheitshalbmesser k eines unregelmässig begrenzten Querprofils nur dadurch gelangen, dass wir, wie es in Nr. 60 S. 160 angedeutet wurde, die Figur in Lamellen zerlegen und das Moment 2. Grades derselben bilden.

Die hierzu nothwendigen Constructionen wollen wir an demselben Schienenprofil (Taf. 8_1) erläutern, dessen Schwerpunkt auf ähnlichem Wege schon in Nr. 58d bestimmt wurde, und wir fahren hier gerade da fort, wo wir dort stehen geblieben sind.

Wir zeigten, dass die Segmente $\triangle z''$ auf der Horizontalen durch den Schwerpunkt den einfachen Momenten $y \triangle F$ des In-

halts der Lamellen in der Art proportional sind, dass sie mit $a\,b = 20$ Quadratcentimeter multiplicirt werden müssen, um diese Momente zu geben. Betrachten wir daher die Linie z'' als die eines Kräftepolygon, dessen einzelne Kräfte durch die Segmente $\triangle z''$ dargestellt sind, und nehmen wir an, dass sie ebenfalls in der Richtung der Lamellenmitten wirken, indem wir ein zweites Polygon construiren, dessen Ecken auf denselben Horizontalen liegen: so werden uns die Polygonseiten dieses zweiten ∞förmigen Polygons auf der Horizontalen durch den Schwerpunkt Segmente abschneiden, welche den Momenten der $\triangle z''$ in der Art proportional sind, dass sie mit c der Entfernung des Pols des neuen Kräftepolygons von der Linie z'' der Kräfte multiplicirt werden müssen, um die Momente der $\triangle z''$ also $y \triangle z''$ darzustellen; es ist also

$$c \triangle z''' = y \triangle z''$$

Nun ist aber laut Nr. 58d S. 157 schon

$$a\,b \triangle z'' = y \triangle F$$

mithin wird

$$a\,b\,c \triangle z''' = y^2 \triangle F \text{ sein.}$$

Aus der ∞förmigen Gestalt dieses zweiten Polygons geht hervor, dass alle $\triangle z'''$ gleiches Zeichen zu beiden Seiten der Horizontalen durch den Schwerpunkt haben, wie es auch sein muss, weil y^2 mit y sein Zeichen nicht ändert. Die sämmtlichen $\triangle z'''$ summiren sich daher so zu z'''_{16} dass

$$a\,b\,c\,z'''_{16} = \sum_{o}^{16} y^2 \triangle F$$

ist.

Da das Trägheitsmoment mit seinen 4 Dimensionen nie im Ganzen verwerthet werden kann, indem sogar Momente mit einem Coefficient pro Flächeneinheit nur 3 Dimensionen haben, so wird es immer mit irgend einer Linie dividirt werden müssen, und diess geschieht am einfachsten dadurch, dass man die letzte Polentfernung c gleich diesem Divisor macht; die Division ist dann vollzogen, wenn man c weglässt. Werden obige Constructionen, wie Taf. 8_1 vorausgesetzt wurde, z. B. ausgeführt, um den Biegungswiderstand bei gegebener Spannung der äussersten Faser zu bestimmen,

so ist das Trägheitsmoment durch die Entfernung dieser äussersten Faser vom Schwerpunkt zu dividiren. Dem entsprechend wurde also c gleich dieser Entfernung angenommen, und man hat

$$\sum_{0}^{16} y^2 \triangle F : c = a\ b\ z'''_{16}$$

In einer gebogenen Schiene des vorliegenden Querschnitts ist also das Moment der innern Kräfte gleich einer an einem Hebelarm z'''_{16} wirkenden Kraft, die genügend wäre, um einen Querschnitt von 20 Quadratcentimeter mit der Spannung der äussersten Faser zu spannen.

Soll nur die halbe Höhe k der Trägheitsellipse bestimmt werden, so ist das Trägheitsmoment durch den Flächeninhalt

$$F = a\ z'_{16}$$

zu dividiren.

Es sollte also $c = z'_{16}$ angenommen werden, nun ist es aber nach Nr. 29 S. 84 leicht, das (z'''_{16}) für die Poldistanz z'_{16} zu bestimmen, wenn das Seilpolygon für c construirt wurde. Wir verlängern irgend einen Strahl BC z. B., der mit dem z''_9 projicirenden Mittelstrahl parallel läuft, bis zu seinen Schnitten B und C mit den äussersten Polygonseiten AB und CD, welche z'''_{16} abschneiden, dann werden auch im neuen Polygon die B und C entsprechenden Punkte auf den Horizontallinien durch B und C liegen müssen.

Wird daher die Poldistanz über z'' statt zu c zu $(z'_{16}) = z'_{16}$ angenommen und der Strahl gezogen, der den Endpunkt von z''_9 projicirt, so gelangt man zur Lage dieser drei Strahlen im neuen Polygon, indem man, die äussere Polygonseite AB beibehaltend, BC_1 parallel zu diesem Strahl bis zum Schnittpunkt C_1 mit der Horizontalen CC_1 durch C zieht. Dem Zug $ABCD$ im ursprünglichen wird dann ABC_1D_1 im neuen Polygon mit der Poldistanz z'_{16} entsprechen und die horizontale Entfernung (z'''_{16}) der beiden äussersten Strahlen AB und C_1D_1 (oder vielmehr die Strecke, welche sie auf der Horizontalen durch den Schwerpunkt abschneiden), wird das Moment der z'' bezüglich des Schwerpunktes in der Art darstellen, dass sie mit (z'_{16}) multiplicirt werden muss, um dieses Moment zu geben.

Das Trägheitsmoment des Querschnittes ist also jetzt gleich

$$a\ b\ z'_{16}\ (z'''_{16}) = b\ (z'''_{16})\ F = \sum_{o}^{16} y^2 \triangle F$$

weil $F = a\ z'_{16}$ ist.

Es ist also jetzt

$$k^2 = \frac{\sum_{o}^{16} y^2 \triangle F}{F} = b\ (z'''_{16})$$

und wir erhalten k, indem wir (z'''_{16}) am Ende von b zufügen, über der Summe $b + (z'''_{16})$, einen Halbkreis beschreiben, der uns auf der Horizontalen durch den Endpunkt von b als Ordinate

$$k = \sqrt{b\ (z'''_{16})}$$

abschneidet.

Dieses k ist die Höhe der Ellipse über der Horizontalen durch den Schwerpunkt. Da aber die Mitten aller horizontalen Lamellen auf einer verticalen Linie liegen, so sind laut Nr. 66 S. 177 diese beiden Richtungen die zweier conjugirten Durchmesser der Centralellipse; da sie ferner senkrecht aufeinander stehen, so ist k die halbe Länge der einen Ellipsenaxe, und zwar, wie ein Blick auf den Querschnitt zeigt, die Länge der grossen Axe.

Um die Länge der kleinen Axe zu erhalten genügt es, dieselben Operationen für den halben Querschnitt nur zu wiederholen, weil dieser symmetrisch ist. Die entsprechenden Seilpolygone finden sich unter dem Fuss der Schiene.

Die Schiene wurde in sechs verticale Lamellen getheilt, von denen die erste natürlich die halbe Schienendicke zur Breite hat, und auf die Flächenbasis a=3 Centimeter reducirt werden muss. Bei dieser Lamelle wurde auch berücksichtigt, dass wegen der Nähe der Axe und wegen der Grösse des Flächeninhalts man sich diesen nicht im Schwerpunkt, dessen Entfernung von der Axe wir für einen Moment mit i bezeichnen wollen, concentrirt denken darf, sondern laut Nr. 67 S. 178 in der Entfernung $\sqrt{i + k^2}$, wo laut Nr. 69 S. 182 $k = 0{,}289 \,.\, 2i$ angenommen wurde, und daher ist in der Mitte bei dem Schwerpunkt ein kleines rechtwinkeliges Dreieck construirt dessen Seiten = 0,5 und 0,289 der Lamellenbreite sind, die Hypothenuse auf die Horizontale herunterge-

schlagen, und an ihrem Endpunkt die Lamellenfläche 1 angenommen worden. Ferner wurde noch die Lamelle 4 für den Kopf und den Fuss der Schiene, besonders, wegen der verschiedenen Lamellenbreite, in Construction gebracht.

Die Flächenlinie z' befindet sich unten rechts, ihre Länge ist gleich dem halben Inhalt. Der Polabstand b des ersten Kräftepolygons ist wie früher zu $\frac{20}{3}$ Centimeter angenommen, so dass $a\ b$ auch hier $= 20$ Quadratcentimeter ist. Für c wurde die halbe Breite des Schienenfusses angenommen, so dass z'''_7 das halbe Biegungsmoment darstellt, wenn es mit $a\ b$ multiplicirt wird.

Um das Trägheitsmoment durch die Fläche dividiren zu können, wird statt c der halbe Inhalt $z'_7 = {}^1/_2\ z'_{16}$ eingeführt; das entsprechende (z'''_{14}), das man erhält, gilt dann für die ganze Fläche, denn wenn

$$a\ b\ .\ {}^1/_2\ z_{16}'\ .\ (z'''_{14})$$

das halbe Biegungsmoment darstellt, so ist das ganze gleich

$$a\ b\ z'_{16}\ (z'''_{14})$$

was wir durch den doppelten Index der Lamellenzahl 14 andeuten wollen.

Durch Division mit $F = a\ z'_{16}$ erhält man das Quadrat der kleinen Axe

$$k_1{}^2 = b\ (z'''_{14})$$

Die Construction derselben ist bekannt. Mittelst der beiden Axen kann nun die Centralellipse eingezeichnet, und der Centralkern als reciproke Figur des umgekehrten (Taf. 8_1) ebenfalls eingezeichneten Schienenprofils construirt werden. Die zur Construction der einzelnen Seiten des Kerns dienenden Tangenten wurden nur für einen einzigen Punkt des umgekehrten Schienenprofils ausgezogen.

72. Centralellipse und Kern eines Winkeleisens.

Um auch zu zeigen, wie grössere Flächen bei Construction der Trägheitsmomente zusammengesetzt werden können, wurde noch (Taf. 9) die Centralellipse eines Winkeleisens construirt,

indem dasselbe in nur 6 Paralleltrapeze, von denen zwei die ganzen Schenkel bilden, getheilt wurde.

Die auf die Basis $a = 2$ Centimeter reducirten Flächeninhalte wurden nur einmal auf der Linie z' aufgetragen, die zweite Basis $b = 5$ Centimeter angenommen, und dann mittelst zweier Polygone, deren Seiten einmal parallel und einmal senkrecht zu den Strahlen des Kräftepolygons gezogen wurden, und deren Ecken auf den Horizontal- und Verticallinien durch die Schwerpunkte der 6 Partialflächen des Winkeleisens lagen, der Schwerpunkt S bestimmt; die Bleistiftlinien, die hierzu gedient hatten aber wurden wieder ausgelöscht.

Die Trägheitsmomente wurden nun durch Bildung von

$$\sum_{o}^{6} \triangle F \, (i^2 + k^2)$$

bestimmt.

Um k zu erhalten, mussten die Trägheitsellipsen jedes einzelnen Trapezes eingezeichnet werden; die zur Construction derselben nothwendigen Linien sind für $\triangle F_2$ ausgezogen. Die Nr. 69c S. 185 erläuterte und Fig. 96 dargestellte Construction diente zur Bestimmung der zwei conjugirten Durchmesser, von denen der eine vertical und der andere nahezu horizontal ist. Bezüglich dieser Constructionen bemerken wir nur, dass $0{,}408 \sqrt{a^2 + b^2}$ in der ebenen Ecke links gebildet wurde.

Da im vorliegenden Winkeleisen keine conjugirten Elemente von vornherein bestimmt sind, und bei gegebenem Mittelpunkt einer Ellipse 3 Tangenten zur Bestimmung derselben nothwendig sind, so sind die Trägheitsmomente in Bezug auf 3 Axen, wozu die Axen S) Y X und Z gewählt wurden, bestimmt worden.

Bei Construction des Trägheitsmomentes bezüglich der Axe S Z z. B. wurde eine Tangente parallel zu S Z an die Trägheitsellipse gezogen, die senkrechte Entfernung k dieser Tangente vom Schwerpunkt, dem Mittelpunkt der Ellipse 2, auf die Parallele zu S Z heruntergeschlagen und die zweite Ecke 2 der Seilpolygone z'' und z''' auf der Parallellinie zu S Z angenommen, deren Entfernung von der Axe die Hypothenuse des Dreiecks ist, dessen Seiten i und k (siehe Taf. 9) sind.

Die Wiederholung dieser Construction für die Axen S X und S Y giebt noch zwei weitere Parallellinien, welche mit der zu S Z

ein Dreieck bilden, das in jedem Trapez ausgezogen wurde; die Index 2 3 5 stehen in diesen Dreiecken, kleiner und noch kleiner sind sie bei 4 und 6, endlich verschwindend klein bei Nr. 1.

Auf den verlängerten Seiten dieser Dreiecke liegen also die Eckpunkte der Seilpolygone. Die weitern Constructionen sind identisch mit den Nr. 71 S. 194 beschriebenen, und wir machen daher nur auf die folgenden Lageverschiedenheiten aufmerksam.

Da die Segmente von z'_6 für alle Axenlagen gleich gross sind, wenn die Grösse der $\triangle$ F und a nicht geändert werden, so werden auch bei gleichbleibendem b die sich entsprechenden Seiten der ersten Polygone, welche z'' auf der Axe abschneiden, den Axenwinkel mit einander bilden. Man braucht daher z' nur einmal aufzutragen und die Seilpolygonseiten so zu ziehen, dass sie für die Axe $S\,X$ den Winkel 0, für $S\,Y$ den Winkel $X\,S\,Y$ und für $S\,Z$ den Winkel $X\,S\,Z$ mit den Strahlen des Kräftepolygons bilden. S) $X\,Y\,Z$ sind die Richtungen der Seiten des Winkeldreiecks, mit dem Taf. 9 ausgearbeitet wurde.

Da S nicht mehr der Schwerpunkt der einzelnen $\triangle$ F nach Veränderung ihrer Lage ist, so braucht auch z''_6 nicht mehr nothwendigerweise $= 0$ zu sein; es laufen daher auch die äussersten Seiten $A\,B$, $C\,D$ des letzten Polygons nicht mehr miteinander parallel, worauf auch bei dem Uebergang von der Poldistanz c zur Distanz z'_6 wohl zu achten, daher $B\,C_1$, $C_1\,D_1$ parallel mit den entsprechenden Strahlen des Kräftepolygons $z'_6\,z''_6$ zu ziehen sind. Die 3 erhaltenen z'''_6 sind am Endpunkte eines und desselben einzigen b aufgetragen, und mittelst Halbkreisen die Abstände k der zu S) $X\,Y\,Z$ parallelen Tangenten der Centralellipse des ganzen Winkeleisens auf derselben Ordinate abgeschnitten worden.

Die Centralellipse mittelst dieser 3 Paar parallelen Tangenten haben wir seitwärts (Taf. 8_2) construirt.

Da die Diagonalen eines jeden einer Curve zweiter Ordnung umschriebenen Parallelogramms conjugirte Durchmesser sind, so erhält man einen involutorischen Strahlenbüschel, wenn durch den Punkt O (Taf. 8_2) Parallele O) $(X\,Y)$, $(X\,Z)$, $(Y\,Z)$ zu Diagonalen gezogen werden, welche durch Verbindung der zu X und zu Y parallelen Tangenten zu einem Parallelogramm, dann durch Verbindung der zu X und Z, endlich Y und Z parallelen Tangenten entstehen; hierbei bemerken wir, dass die Eckpunkte $X\,Z$ und

YZ in die Figur Taf. 8_1 fallen. Die Punkte, in welchen zwei zugeordnete Punkte irgend einen durch O gehenden Kreis schneiden, liegen daher auch involutorisch, weshalb die Verbindungslinien je zweier zugeordneten Kreispunkte durch einen Punkt J, das Involutionscentrum, gehen. Die beiden zugeordneten Strahlen, welche von O aus die Endpunkte des durch J gehenden Durchmessers AB projiciren, stehen senkrecht auf einander und laufen daher zu den hierdurch der Lage nach bestimmten Axen der Ellipse parallel.

Durch dieses Involutionscentrum sind nun auch die Berührungspunkte der drei Tangentenpaare gegeben; sie liegen auf den zu O) X_1, Y_1, Z_1, parallelen Durchmessern, welche den Tangentenrichtungen O) X, Y, Z, zugeordnet sind.

Um nun noch die Axenlängen, die kleine z. B. zu erhalten, hat man nur einen dieser Berührungspunkte, wozu man den nächsten, den der Tangente Y wählen wird, orthogonal auf diese Axe zu projiciren; diese projicirende Linie ist daher die Polare des Schnittpunktes der Tangente Y mit der Axe, und ihr Schnitt mit derselben jenem Schnittpunkt conjugirt, und deshalb durch die Curvenpunkte der kleinen Axe harmonisch von ihm getrennt. Wird daher durch jene conjugirte Punkte ein Kreis gelegt, so ist die Länge der halben kleinen Axe gleich der Länge der Tangente, die vom Mittelpunkt der Curve an den Kreis gezogen wird.

Zur Bestimmung der Länge der grossen Axe ist diese sonst einfache Construction nicht einmal nothwendig; die Berührungspunkte der Tangenten X liegen ihr so nahe, dass der Ellipsenbogen zwischen dem Berührungspunkt und der grossen Axe füglich als Parabelbogen betrachtet werden kann. Die Mitte des Tangentenstücks X zwischen der Axe und dem Berührungspunkt liegt daher auf der Scheiteltangente, und die Länge der grossen Axe ist gleich der Entfernung dieser Mitte von der kleinen Axe. Mittelst des Augenmaasses kann man diese Länge hinlänglich genau bestimmen, und der Kreis, dessen Halbmesser gleich der grossen Axe ist, kann im vorliegenden Fall direct eingezeichnet werden.

Mittelst der beiden über der kleinen und grossen Axe construirten Kreise können nun beliebig viele Punkte und Tangenten nach der bekannten Methode construirt werden, die wir auch Taf. 8_2 unten rechts angewendet haben, um zur Probe die Berüh-

rungspunkte der Ellipsentangenten nochmals zu bestimmen. Um den Berührungspunkt einer Tangente zu erhalten, die senkrecht auf einem Radius der beiden Kreise steht, betrachte man das Stück desselben zwischen den zwei Kreisen als Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten senkrecht auf den entsprechenden Axen stehen; zieht man durch den Scheitel des rechten Winkels, der auf der Curve liegt, einen zweiten Radius, und wiederholt man die Operation, so ist der Scheitel des zweiten rechten Winkels der gesuchte Berührungspunkt.

Derselbe muss mit einem der früher schon bestimmten zusammenfallen, wenn der erste Halbmesser senkrecht auf der entsprechenden Tangente angenommen wurde.

Die Construction des Kerns nach bestimmter Centralellipse ist bekannt.

In Folge der vielen $\triangle F$, die wir hier angenommen hatten, scheint die eben erklärte Construction noch ziemlich complicirt zu sein, doch wird sie gar zu einfach, wenn deren nur zwei anzunehmen sind; wenn der gegebene Querschnitt z. B. ein T oder auch I Eisen ist; mit wenig Strichen gelangt man dann zum Ziel und erhält in der kürzesten Zeit das Biegungsmoment solcher Querschnitte.

73. Centralellipsoid und Kern einiger Körper.

a) Centralellipsoid und Kern eines Tetraeders.

Schneidet man ein Tetraeder durch Parallelebenen, deren Stellung die Richtung zweier gegenüberliegender Kanten enthält, so sind diese Schnitte Parallelogramme, deren Schwerpunkte alle in der geraden Linie liegen, welche die Mitten dieser Kanten mit einander verbindet. Da ferner in allen Centralellipsen der Parallelogramme die zu den Seiten parallelen Durchmesser conjugirt sind, so folgt nach Nr. 64 S. 177, dass in dem Centralellipsoid eines Tetraeders dem Durchmesser, welcher die Mitten der zwei gegenüberliegenden Kanten mit einander verbindet, die zu den Schnitten

parallele Diametralebene und in dieser die den beiden gegenüberliegenden Kanten parallelen Durchmesser conjugirt seien.

Jeder der drei jetzt erwähnten Durchmesser ist daher der Ebene der beiden andern conjugirt.

Bezeichnen wir die Länge des halben Durchmessers, welcher die Mitten der beiden gegenüberliegenden Kanten verbindet, mit d, so ist laut Nr. 59 S. 158 die Fläche y dem Product

$$(d - z)\,(d + z) = d^2 - z^2$$

proportional, und man hat, weil vom Schwerpunkt gleichweit abstehende Schnitte gleichen Flächeninhalt haben

$$k_d^2 = \frac{\int_o^d \alpha\,(d^2 - z^2)\,z^2\,dz}{\int_o^d \alpha\,(d^2 - z^2)\,dz} = {}^1/_5\,d^2 = (0{,}44721\,d)^2$$

wo α die Constante bezeichnet, mit der $d^2 - z^2$ multiplicirt worden ist, um den Inhalt der Parallelschnitte zu geben.

Bezeichnen wir ferner die halben Längen der gegenüberliegenden Kanten mit a und b, so sind die Parallelschnitte $b\,d$ z. B. Dreiecke, welche dem Quadrat ihrer Entfernung von den Endpunkten von a proportional sind; man hat daher das Quadrat der Länge des a parallelen Durchmessers gleich

$$k_a^2 = \frac{\int_o^a \alpha\,(a - z)^2\,z^2\,dz}{\int_o^a \alpha\,(a - z)^2\,dz} = {}^1/_{10}\,a^2 = (0{,}31623\,a)^2$$

Ebenso findet man auch das Quadrat des b parallelen Durchmessers

$$k_b^2 = {}^1/_{10}\,b^2 = (0{,}31623\,b)^2$$

Durch die Längen und Richtungen dieser drei conjugirten Durchmesser ist das Centralellipsoid vollständig bestimmt.

Zur Bestimmung des Kerns wählen wir die Kanten als Elemente des Tetraeders.

Der Kante a entspricht die Polare der Linie a_1, welche bezüglich des Schwerpunkts symmetrisch zu a liegt und daher durch

den Schnittpunkt $b\ d$ geht. Da a_1 in der Diametralebene $a\,d$ liegt, so geht ihre Polare durch den unendlich fernen Punkt von b, durch den auch der $a\ d$ conjugirte Durchmesser geht.

Ferner geht die Polare von a_1 durch den Pol der Ebene $a_1\ b$ in welcher a_1 liegt; dieser aber liegt auf dem Durchmesser d, der der Stellung $a_1\ b$ conjugirt ist, und seine Entfernung vom Schwerpunkt ist

$$= \frac{k^{d\,2}}{d} = {}^1/_5\ d\ .$$

Die der Kante a entsprechende Linie des Kerns ist daher vollständig bestimmt, sie liegt in der Ebene des Schwerpunkts und der gegenüberliegenden Kante b, läuft mit dieser parallel, und ihre Entfernung vom Schwerpunkt beträgt $^1/_5$ der Entfernung von b.

Da das eben Gesagte nicht allein von der Kante a, sondern von allen Kanten gilt, so folgt, dass der Kern eines Tetraeders ein ähnlicher und bezüglich des Schwerpunkts als perspectivischem Projectionscentrum, ähnlich gelegener Körper sei, dessen sämmtliche Dimensionen gleich $^1/_5$ der Dimensionen jenes Tetraeders sind.

b) Centralellipsoid und Kern eines Ellipsoids.

Schon Nr. 59a S. 158 wurde darauf aufmerksam gemacht, dass die Inhalte der Schnitte eines Ellipsoids, dessen halbe conjugirte Durchmesser in Richtung und Länge gleich $a\ b\ d$ wären (wir beziehen das Nr. 59a Gesagte sogleich auf das eben behandelte Tetraeder) mit Parallelebenen zu $a\,b$, in constantem Verhältniss π zu den entsprechenden Schnittflächen des Tetraeders stehen. Es folgt hieraus unmittelbar, dass alle Strecken des Durchmessers d gleich gross in beiden Körpern sind.

Die Länge des Durchmessers d des Centralellipsoids ist daher $= d\sqrt{}^1/_5 = 0{,}44721\ d$, und der Tangentialebene an das Ellipsoid am Ende des Durchmessers d entspricht ein Punkt des Kerns auf d, dessen Entfernung vom Schwerpunkt gleich $^1/_5\,d$ ist. Da aber diese Verhältnisszahlen allgemein für alle conjugirten Durchmesser und Diametralebenen gelten, so folgt, dass das Ellipsoid, sein

Centralellipsoid und sein Kern concentrische ähnliche Körper seien, deren Dimensionen sich wie

$$1 : \sqrt{1/5} : 1/5 \text{ verhalten.}$$

c) Centralellipsoid und Kern eines Prismas und eines Cylinders.

In einem von parallelen Endflächen begrenzten Prisma oder Cylinder ist bezüglich des Schwerpunkts die Stellung dieser Endflächen der Richtung der Kanten oder Erzeugungslinien conjugirt.

Da alle Parallelen zu den Kanten gleich lang sind, so erscheint der zu den Endflächen parallele Querschnitt durch den Schwerpunkt in allen Theilen gleich stark belastet, und seine Centralellipse und sein Kern sind daher auch die Schnitte des Centralellipsoids und Kerns.

Da alle Parallelschnitte gleichen Inhalts sind, so sind die Segmente, welche auf der zu den Kanten parallelen Linie durch den Schwerpunkt von den Endflächen des Prismas vom Centralellipsoid und vom Kern abgeschnitten werden, eben so gross als die Segmente welche von den Seiten, der Centralellipse und dem Kern eines gleich hohen Parallelogramms auf der Linie abgeschnitten werden, welche die Mitte zweier gegenüberliegenden Seiten verbindet. Berücksichtigt man nun noch, dass dem Umfang der Endflächen laut Nr. 67 S. 179 eine Pyramide oder Kegelfläche entspricht, deren Spitze der Pol dieser Endfläche ist, so erscheinen das Centralellipsoid und der Kern vollständig bestimmt. Die Höhe des Centralellipsoids ist gleich $\sqrt{1/12}$ oder $= 0{,}289$ der Prismen- oder Cylinderhöhe, und die Höhe des Kerns, der aus einer Doppelpyramide oder einem Kegel zusammengesetzt ist, nimmt das innere Drittel des Prismas ein.

d) Centralellipsoid und Kern einer Pyramide oder eines Kegels.

Im Schwerpunkt ist die Parallelebene zur Grundfläche der Linie conjugirt, welche den Schwerpunkt derselben mit der Spitze des Kegels verbindet. Der Schwerpunkt liegt im $1/4$ dieser Linie, von der Grundfläche ab.

Wird der Kegel durch Parallelebenen zur Grundfläche geschnitten, so kann der Inhalt dieser Schnitte gleich αz^2 gesetzt

werden, wo α eine beliebige Constante ist, und z von der Spitze weg gemessen wird.

Bezeichnen wir die Höhe des Kegels mit h, so ist das Quadrat der halben Höhe des Centralellipsoids

$$k^2 = \frac{\int_0^h \alpha\, z^4\, dz}{\int_0^h \alpha\, z^2\, dz} - \left(\frac{\int_0^h \alpha\, z^3\, dz}{\int_0^h \alpha\, z^2\, dz} \right)^2$$

$$= \left({}^3/_5 - ({}^3/_4)^2 \right) h^2 = \frac{3}{80} h^2 = (0{,}19365\ h)^2$$

Da alle Parallelschnitte ähnliche Figuren bilden, deren Dimensionen dem Abstand von der Spitze proportional sind, so wird dasselbe auch mit den Centralellipsen dieser Schnitte der Fall sein. Werden daher zu irgend einer durch die Spitze des Kegels gehenden Diametralebene parallele Tangenten an die Centralellipsen der Schnitte gezogen, so kann man den Abstand derselben von der Diametralebene mit $\beta\, z$ bezeichnen, wo β eine beliebige Constante ist. Das Trägheitsmoment eines Kegelelements zwischen zwei zur Grundfläche parallelen Ebenen bezüglich irgend einer durch die Spitze gehenden Diametralebene, kann daher

$$= \alpha\, z^2\, dz\, .\, (\beta\, z)^2$$

gesetzt werden.

Das Quadrat der Höhe des Centralellipsoids über dieser Diametralebene ist daher gleich

$$k^2 = \frac{\int_0^h \alpha\, \beta^2\, z^4\, dz}{\int_0^h \alpha\, z^2\, dz} = {}^3/_5\, (\beta\, h)^2 = (0{,}77460\ \beta\, h)^2$$

Da aber $\beta\, h$ die Höhe der Centralellipse der Grundfläche über der Diametralebene ist, und das eben Gesagte von allen durch die Spitze gehenden Diametralebenen gültig ist, so folgt, dass das Centralellipsoid von der durch den Schwerpunkt gehenden Parallelebene zur Grundfläche in einer Ellipse geschnitten wird, die der Centralellipse der Grundfläche ähnlich ist und deren Dimensionen $= 0{,}77460$ der Dimensionen jener sind.

Ohne die Dimensionen der Grundfläche festzusetzen, kann man auch keine Beziehung zwischen den Erzeugungslinien des Kegels und dem Schnitt des Centralellipsoids mit der Diametralebene erhalten; man kann daher auch über die Form des Kerns nichts weiter sagen, als dass er ein Kegel sei, dessen Grundfläche mit der Grundfläche des Kegels, dem er zugeordnet ist, parallel läuft und dass die beiden Spitzen und der Schwerpunkt auf einer geraden Linie liegen. Die nähere Bestimmung muss der graphischen Construction überlassen bleiben.

DRITTER ABSCHNITT.

DER BALKEN.

Erstes Kapitel.

Gleichgewicht der an einem Balkenquerschnitt wirkenden äussern und innern Kräfte.

---

74. Der Balken und die an ihm wirkenden Kräfte im Allgemeinen.

Unter einem Balken denken wir uns einen Körper, der durch die Bewegung einer ebenen Figur in der Art erzeugt wird, dass der Schwerpunkt der Figur eine continuirliche Bahn beschreibe, und sie selbst dabei immer senkrecht auf dieser Bahn stehen bleibe, wenn nichts Besonderes bezüglich dieser Stellung bemerkt wird.

Die Bahn des Schwerpunkts nennen wir die Axe des Körpers und die erzeugende Figur die Querschnittsfläche oder auch den Schnitt.

Die Axe braucht nicht nothwendiger Weise eine gerade Linie, und der Schnitt unveränderlich zu sein; doch setzen wir vorerst voraus, dass zwei Schnitte, deren Entfernung ihrer grössten Dimension gleichkommen kann, noch als gleich gross und parallel betrachtet und allen Querschnittstheilen $\triangle F$ des einen Schnittes gleich grosse und gleich gelegene des andern Schnittes zugewiesen werden können.

Die Länge der Axe wird mindestens drei- bis viermal länger als die grösste Dimension des Schnittes angenommen, und ein wiederholtes Beschreiben desselben körperlichen Raumes durch den

erzeugenden Schnitt wird ausgeschlossen; indem wir endlich noch dem Schnitt F immer eine endliche Ausdehnung beimessen, schliessen wir dadurch auch alle Rückkehrpunkte und mehrfachen Punkte aus.

Die Bestimmung des Balkens ist, Spannungen und Pressungen zu übertragen; der über einen Bach gelegte Balken z. B. überträgt den Druck eines auf ihm stehenden belasteten Wagenrades auf die Stützpunkte des Balkens, die Widerlager. Man kann den Druck des Wagenrades in zwei Seitenkräfte nach der Richtung der Widerlager zerlegen, welche dort durch die Reaction dieser letzteren aufgehoben werden, sodass diese Reactionen mit dem Druck des Wagenrades im Gleichgewicht sind; der Zusammenhang dieser drei Kräfte wird durch den Balken bewirkt. Würden wir diesen Zusammenhang durch einen wirklichen Schnitt des Balkens lösen, so wäre das Gleichgewicht der Kräfte auf jeder Seite des Schnittes gestört, und des Balkens einzelne Theile würden, der Impulsion der an ihnen wirkenden und nicht im Gleichgewicht befindlichen Kräfte folgend, in Bewegung gerathen. Diese Bewegung wird nur durch die Kräfte, mit denen die Theile des Balkens rechts und links des gedachten Schnittes aneinander haften, verhindert. Diese Kräfte, die wir mit dem Namen innere Kräfte bezeichnen wollen, sind daher nothwendiger Weise mit den ausserhalb des Schnitts wirkenden Kräften, im vorliegenden Beispiel mit dem Gewicht des Balkenstücks, dem Druck des Rades und der Reaction des einen Widerlagers im Gleichgewicht, diese letztern Kräfte bezeichnen wir mit dem Namen äussere Kräfte.

Die äussern Kräfte sind, einige wenige Fälle ausgenommen, durch die Natur der zu lösenden constructiven Aufgaben gegeben. Und es handelt sich dann immer darum, zu untersuchen, wie gross die an einzelnen Flächentheilen eines gegebenen oder angenommenen Balkenquerschnitts wirkenden innern Kräfte sind. Wir beschränken uns nun hier darauf, diese innern Kräfte, die an den einzelnen Theilen des Balkenquerschnitts wirken, zu bestimmen, ohne auf die Untersuchung, ob diese Kräfte zu gross seien oder nicht, ohne auf die Lehre von der Festigkeit einzutreten.

75. Die Vertheilung der innern Kräfte über den Balkenquerschnitt.

Die bekannt vorausgesetzten äussern Kräfte lassen sich auf die verschiedenartigste Weise auf einen Schnitt des Balkens als innere Kräfte vertheilen, und die Aufgabe wäre unbestimmt, wenn die Vertheilung dieser Kräfte nicht durch mehr oder weniger richtige Voraussetzungen beschränkt würde.

Da wir hier keine Festigkeitstheorie treiben, sondern nur unsere graphischen Methoden auf dieselbe anwenden wollen, so begnügen wir uns damit, diese Hypothesen hier aufzuzählen.

Die erste ist die, dass der Körper nur so schwach belastet werde, dass seine Biegungen, selbst bei einer grössern Länge des Balkens, dieser Längenausdehnung gegenüber vernachlässigt werden können. Würde eine Brücke unter dem darüber weggehenden oder fahrenden Publikum sich stark biegen und schwanken, so würde letzteres schreien; dies muss vermieden werden, und selbst bei Spannweiten von 100^m darf die Einbiegung höchstens einige Centimeter, nimmer Decimeter betragen. Können die Biegungen und Formänderungen aber im Längenschnitt des Balkens vernachlässigt werden, so können sie es noch um so mehr im Querschnitt. Es finden also in demselben keine endlichen Formänderungen statt. Ein Schnitt, der vor der Biegung eben war, ist es auch noch nach derselben. Zwei Schnitte, die vor der Biegung parallel waren, sind es ebenfalls noch nach derselben, allein dies hindert nicht die Linie zu bestimmen, um die sich die Schnitte, freilich nur unendlich wenig, gedreht haben. Diese Annahme hindert uns überhaupt nicht, mit diesen kleinen Grössen einerseits und mit ihren reciproken Werthen, den unendlich grossen Krümmungshalbmessern des gebogenen Balkens anderseits zu rechnen; im Gegentheil, sie berechtigt uns, alle vorkommenden Grössen in drei Ordnungen zu classificiren, und bei solchen Rechnungen die unendlich kleinen Ausdehnungen, Pressungen und Biegungen den endlichen Dimensionen des Balkens, und diese den unendlich grossen Biegungshalbmessern gegenüber zu vernachlässigen.

Die zweite Voraussetzung besteht darin, anzunehmen, dass die zur Axe des Balkens parallelen Spannungen und Pressungen

in den einzelnen Querschnittstheilen $\triangle F$ der Entfernung derselben von der Linie proportional seien, um die die unendlich kleine Drehung des Querschnitts bei der Belastung stattfindet. Es wird diese Voraussetzung gewöhnlich dadurch begründet, dass man sagt, es sei diese Spannung der Aenderung der Entfernung zweier sich entsprechenden Punkte in zwei unendlich nahen Querschnitten proportional. Allein diese Begründung ist nur dann zulässig, wenn gar keine Kräfte vorhanden sind, welche mit den Querschnitten parallel laufen (scheerende Kräfte), denn bei der bisher üblichen Zusammensetzung dieser Kräfte findet dieses Verhältniss der Entfernungsänderung zur Intensität der Spannung nicht mehr statt. Wir nehmen daher nur deshalb an, dass die Spannungen und Pressungen parallel zur Axe des Balkens der Entfernung von einer geraden Linie im Querschnitt proportional seien, weil sich diese Annahme durch die Erfahrung bestätigt. In jedem Querschnitt giebt es in Folge dieser Annahme eine gerade Linie, in der weder Pressungen noch Spannungen parallel zur Axe des Balkens stattfinden, auf gleicher Seite dieser Linie sind die Flächentheile $\triangle F$ auch auf gleiche Weise in Anspruch genommen, indem der Uebergang von Spannung zu Pressung auf dieser Linie stattfindet. Diese Linie heisst im Querschnitt die neutrale Axe, bei Bewegung des Querschnitts beschreibt sie eine neutrale Regelfläche, und die Spur dieser Fläche in einem Längenschnitt heisst wieder die neutrale Axe.

Die dritte Hypothese nimmt an, es widerstehe das Material gleich gut in allen Richtungen, und es sei dieser Widerstand sowohl gegen das Zerreissen und Zerdrücken, als auch gegen das Abscheeren der Fläche des Schnittes einfach proportional. Diese Hypothese, die in der Art und Weise, wie die innern Kräfte in neuerer Zeit zusammengesetzt wurden und wie wir sie auch zusammensetzen werden, enthalten ist, gilt übrigens nicht allgemein, z. B. nicht für Holz, das in gewissen Richtungen nur $^1/_{10}$ des Widerstandes leisten kann, den es in andern leistet, sondern nur für gewisse Materialien, Eisen z. B., und auch für dieses ist sie noch eine Beschränkung der Belastungsgrenzen. Gewalztes Blech z. B. widersteht besser in der Richtung, in der die Walzen rollten, als in der senkrechten Richtung: wir müssen also mit dem Tragmodul der letztern Richtung die Balkendimensionen bestimmen. Scheerend, wenn die ausserhalb des Schnittes wirkenden Kräfte parallel

mit diesem wirken, widersteht das Material nur mit $^4/_5$ des Moduls der absoluten Festigkeit: die Belastung darf in keinem Falle diese $^4/_5$ des Tragmoduls überschreiten, man bleibt übrigens immer unter der Hälfte. Wir dürfen uns also nicht damit begnügen, die ausserhalb eines Normalschnittes wirkenden Kräfte auf diesen zu vertheilen, sondern wir müssen in allen Richtungen schneiden und müssen alle ausserhalb dieses Schnittes auf $\triangle F$ wirkenden Kräfte bestimmen, nach den Regeln des Parallelogramms der Kräfte addiren und proportional auf den Querschnittstheil vertheilen, ganz abgesehen von den Richtungen der Kräfte und ihrer Mittelkraft.

Wir können z. B. ein Drahtseil mit $\gamma^1/_2 = 0{,}7$ seiner Tragfähigkeit spannen und gleichzeitig es so zusammenschnüren, dass einzelne Drähte mit derselben Intensität senkrecht auf die Richtung der Drähte zusammengedrückt sind, und das Seil wird diesen beiden gleichzeitig wirkenden Kräften widerstehen können.

In der Regel werden wir die ausserhalb eines Schnittes wirkenden Kräfte auf diese Weise in Seitenkräfte zerlegen, welche in der Ebene des Schnittes und senkrecht darauf wirken.

Bei Holz müsste auf dieselbe Weise verfahren werden, ausserdem aber auch noch in der Richtung der Fasern geschnitten und untersucht werden, ob die scheerenden Kräfte in diesen Schnitten den daselbst ausserordentlich geringen Widerstand des Holzes gegen das Scheeren nicht übersteigen.

76. Das Gleichgewicht der äussern und der innern Kräfte.

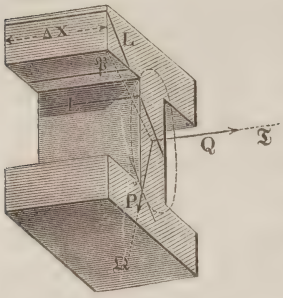
Wir wollen jetzt die äussern an einem Balkenschnitt wirkenden Kräfte mit den innern wirklich in's Gleichgewicht setzen.

Die durch die Natur der Aufgabe gegebenen äussern Kräfte setzen wir nach No. 45 S. 118 zu einer durch den Schwerpunkt des vorliegenden Balkenquerschnittes (Fig. 98 S. 214) gehenden und einer unendlich fernen Kraft (einem Moment) zusammen.

Die erste endliche Kraft zerlegen wir in eine Seitenkraft Q nach der Richtung der Axe des Balkens, und eine senkrecht darauf stehende, also im Schnitt wirkende Kraft P.

Die unendlich ferne Kraft zerlegen wir in drei unendlich ferne Seitenkräfte $\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{T}$, welche in der Ebene PQ und in den auf P und Q senkrechten Ebenen wirken. Die Axe der ersten $\mathfrak{P}$ steht senkrecht auf PQ und die Axen der beiden andern $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{T}$ fallen mit

Fig. 98.



P und Q zusammen. In Folge dieser Zerlegung liegen P und $\mathfrak{P}$ ebenso wie Q und $\mathfrak{Q}$ in einer Ebene und können mit einander zusammengesetzt werden.

Die Kraft P wirkt scheerend in dem Querschnitt selbst, indem sie diesen über einen unendlich nahen Querschnitt wegzuschieben trachtet. Die Art und Weise, wie sie sich über die einzelnen Flächentheile des Querschnitts vertheilt, werden wir erst in einer der nächsten Nummern näher bestimmen können.

Die Kraft Q, eine Spannung oder negativ genommen eine Pressung darstellend, vertheilt sich gleichmässig über den ganzen Querschnitt. Denn sollen sich der zweiten Voraussetzung Nr. 75 entsprechend die Spannungen im Querschnitt wie ihre Entfernungen von einer geraden Linie in dessen Ebene verhalten und soll die Mittelspannung mit Q zusammenfallen, so muss jene gerade Linie laut Nr. 67 S. 178 bezüglich der Centralellipse des Querschnitts mit der Polaren des Angriffspunktes von Q symmetrisch liegen. Nun ist aber Q der Mittelpunkt der Centralellipse, ihre Polare also die unendlich ferne Gerade, die mit ihrer zur Ellipse symmetrisch liegenden Geraden zusammenfällt. Die von Q herrührenden Spannungen in den einzelnen Theilen des Schnittes verhalten sich demnach wie ihre Entfernungen von der unendlich fernen Geraden und sind in der Endlichkeit überall gleich gross. Bezeichnen wir die Querschnittsfläche des Balkens mit F und die von Q herrührende Spannung mit ϱ_1, so ist diese für alle Punkte des Schnittes für die Flächeneinheit gleich

$$\varrho_1 = \frac{Q}{F}$$

Die Momente $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ setzen wir zu einem in der Schnittebene wirkenden Moment $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ zusammen, d. h. zu einer unendlich fernen Kraft, welche in der auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ senkrechten Ebene, man kann annehmen, zu Q parallel wirkt. Der Angriffspunkt dieser Kraft $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ ist also der unendlich ferne Punkt des auf der Axe $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ senkrecht stehenden Durchmessers. Laut Nr. 67 wird also diese Kraft zu Q parallele Spannungen und Pressungen verursachen, deren Intensität in den einzelnen Theilen des Schnittes der Entfernung dieser

von dem Durchmesser proportional ist, der die Polare des unendlich fernen Angriffspunktes von $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, der sich selbst symmetrisch und dem auf der Axe $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ (Fig. 98) senkrecht stehenden Durchmesser conjugirt ist. Bezeichnen wir mit ϱ_2 die von diesem Moment herrührende Spannung in dem Flächenelement $\triangle F$, dessen Entfernung von der Axe $= e$, gleich der Entfernung der äussersten Faser ist, so ist diese Spannung in dem Element, dessen Entfernung von der Axe y ist, gleich $\varrho_2 \frac{y}{e} \triangle F$ und das Moment dieser Spannung gleich $\varrho_2 \frac{y^2}{e} \triangle F$. Die Summe aller dieser Momente erhält man demnach, wenn man die Ausdrücke von Nr. 71 S. 194 u. 196 mit $\frac{\varrho_2}{e}$ multiplicirt; da diese Summe gleich dem Moment $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q})$ sein muss, so hat man:

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) = (\varrho_2\, ab)\, z'''_{\prime\prime} = \varrho_2 \frac{k^2}{e} F,$$

und

$$\varrho_2 = \frac{e}{k^2} \cdot \frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q})}{F}.$$

Wenn man wollte, könnte man auch die drei Kräfte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\,Q$, welche sich in unendlicher Ferne schneiden, direct zusammensetzen, man würde dann eine nicht mehr durch den Schwerpunkt gehende, aber noch mit Q parallele Mittelkraft erhalten, die Spannungen verursacht, welche in den einzelnen Schnitttheilen ihrer Entfernung von der zur Polare des Angriffspunktes der Mittelkraft symmetrischen Linie proportional sind. In der Aussage scheint das letztere Verfahren das einfachere, allein bei dem wirklichen Construiren der Kräfte ist es, wie man sich durch Probiren leicht überzeugt, zweckmässiger, die einzelnen Kräfte auseinander zu halten. Setzt man übrigens im erstern Falle die Entfernung der Kraft Q vom Schwerpunkt $= \frac{k^2}{i}$, sodass die Entfernung der neutralen Axe vom parallelen Durchmesser der Centralellipse $= i$ wird; und setzt man die auf der Seite von Q gemessene Entfernung der äussersten Faser von diesem Durchmesser wie früher $= c$, so ist die Entfernung derselben von der neutralen Axe $= i + c$; wird dann die Spannung in derselben $= \varrho$ gesetzt, so finden wir, indem wir wie oben schliessen, in Uebereinstimmung mit Nr. 67 S. 178 oben:

$$Q = \Sigma \frac{i+y}{i+c} \varrho \triangle F = \frac{\varrho}{i+c} i F$$

und hieraus:

$$\varrho = \frac{Q}{F}\left(1 + \frac{c}{i}\right) = \varrho_1 + \varrho_2$$

worin $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) = \frac{k^2}{i} Q$ ist.

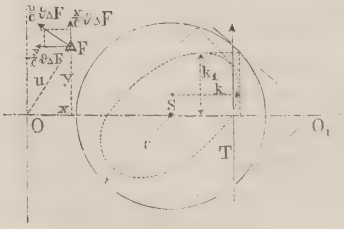
Bei Anwendung aller dieser Formeln versteht es sich von selbst, dass die Längen $c\,i\,k$ parallel mit der Spur der Ebene $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q})$, in der auch der Angriffspunkt von Q liegt, gemessen werden müssen.

Die unendlich ferne Kraft (das Moment) $\mathfrak{T}$ wirkt in der Ebene des Schnittes, und daher scheerend, wie die Kraft P. Man nimmt an, dass die von ihr herrührenden, die einzelnen Flächentheile des Balkens abscheerenden Kräfte ihrer Entfernung vom Schwerpunkt des Schnittes proportional seien.

Um die Grösse der von ihnen herrührenden Spannungen zu ermitteln, wollen wir umgekehrt zuerst bestimmen, welches die Mittelkraft eines Systems ist, dessen einzelne Kräfte dem Product der Flächenelemente eines gegebenen Querschnitts mit den Leitstrahlen bezüglich eines gegebenen Poles als Drehungsmittelpunktes proportional sind, und die alle senkrecht auf diesen Leitstrahlen stehen.

Es sei Fig. 99 O der gegebene Drehungsmittelpunkt als Pol, ϑ die scheerende (Torsions-) Kraft pro Flächeneinheit in dem Element, dessen Entfernung von O gleich c ist, wir denken uns darunter das entfernteste Element des Schnittes, dann wird bei der Bezeichnung von Fig. 99 die Spannung im Element $\triangle F = \frac{u}{c} \vartheta \triangle F$ sein und senkrecht auf OF wirken. Zerlegen wir diese Kraft in zwei Seitenkräfte parallel und senkrecht zur Verbindungslinie von O mit dem Schwerpunkt S des Querschnittes, so wird erstere $= -\frac{y}{c} \vartheta \triangle F$ und letztere $\frac{x}{c} \vartheta \triangle F$, weil sich die Kraft in $\triangle F$ und ihre Seitenkräfte wie u, y und x verhalten.

Fig. 99.



Da nun x durch den Schwerpunkt von F geht, so wird $\Sigma\, y\, \vartheta \triangle F = 0$ sein, die Mittelkraft des Systems reducirt sich daher auf die mit y parallelen, also auf OS senkrecht wirkenden Kräfte, deren Summe gleich

$$\Sigma\, \frac{x}{c}\, \vartheta \triangle F = \frac{i}{c}\, \vartheta\, F \text{ ist.}$$

Das Moment der mit y parallelen Kräfte ist laut Nr. 67 S. 178 gleich

$$\frac{1}{c}\left(i^2 + k^2\right) \vartheta\, F$$

der mit x parallelen Kräfte gleich

$$\frac{1}{c}\, k_1{}^2\, \vartheta\, F$$

und da beide Momente in demselben Sinne um O drehen, so ist das Moment der Mittelkraft gleich

$$\frac{1}{c}\left(i^2 + k^2 + k_1{}^2\right) \vartheta\, F$$

Der Ort aller einer Ellipse umschriebenen rechten Winkel ist ein Kreis, bezeichnen wir den Radius desselben mit r, so ist

$$r^2 = k^2 + k_1{}^2 = a^2 + b^2$$

wenn a und b die halben Axenlängen bezeichnen.

Das Moment der Mittelkraft der Torsion ist daher auch gleich

$$\frac{i^2 + r^2}{c}\, Q\, F$$

und da ihre Intensität gleich $\frac{i}{c}\, Q\, F$ ist, so ergiebt sich als Entfernung derselben von O die Länge

$$i + \frac{r^2}{c}$$

Da nun ebenso wie in Nr. 63 S. 172 nachgewiesen werden kann, dass die 4 Punkte

$$i - r\,,\ i + \frac{r^2}{c}\,,\ i + r\,,\ 2\, i$$

harmonisch liegen, so folgt: die Richtungslinie T der Torsionsmittelkraft eines gegebenen Querschnittes ist die Polare des zum Drehungsmittelpunkt O symmetrisch liegenden Punktes O_1, bezüglich des Kreises, welcher der Ort aller der Centralellipse des Querschnittes umschriebenen rechten Winkel ist. Ihre

Intensität ist dem Product der Querschnittsfläche mit der Entfernung ihres Schwerpunktes von dem Drehungsmittelpunkte proportional.

Fällt der Drehungsmittelpunkt mit dem Schwerpunkt zusammen, so reducirt sich die Mittelkraft auf eine unendlich ferne Kraft, ein Moment, dessen Maass

$$\mathfrak{T} = \frac{r^2}{c}\,\vartheta F$$

ist, woraus bei gegebenen $\mathfrak{T}$, r, c, F die von der Torsion herrührende scheerende Kraft $\frac{u}{c}\vartheta$ für jedes Flächenelement $\triangle F$ bestimmt werden kann.

Uebrigens beabsichtigen wir nicht die Torsionskräfte zu construiren, denn es ist für den Ingenieur viel wichtiger, schädliche Torsionen ganz zu vermeiden, als zu wissen wie gross sie sein mögen, wenn er schlecht construirt hat. $\mathfrak{T}$ muss also durch die Construction selbst beseitigt werden. Im Allgemeinen ist aber hierzu erforderlich:

1) dass die Mittelkraft aller in irgend einem Schnitt wirkenden Kräfte die Axen Q aller Schnitte schneide. Dies ist aber nur möglich, wenn alle Axen und alle diese Mittelkräfte in einer Ebene liegen. In diesem Falle ist auch $\mathfrak{Q} = 0$.
2) Soll diese ebene Axe auch bei Biegungen in Folge starker Belastungen nicht aus dieser Ebene heraustreten, so muss, weil ein Balken sich immer senkrecht zur neutralen Axe des Querschnittes, also senkrecht zu dem P conjugirten Durchmesser ausbiegt, dieser Durchmesser senkrecht auf der Ebene stehen, welche die Kräfte und Axen aller Schnitte enthält, und in der P wirkt. Es muss also diese Ebene auch eine der Hauptaxen der Centralellipse enthalten.

Die Erfüllung dieser beiden Bedingungen ist beim Brückenbau von der grössten Wichtigkeit; der Widerstand, den eine Brücke gegen Torsion leisten kann, ist verhältnissmässig ausserordentlich gering. Es ist daher mehr als bloses Schönheitsgefühl, wenn die Windstreben so angeordnet werden, dass die Brücke bei allenfalsigen seitlichen Ausbiegungen wieder in die ursprüngliche Ver-

ticalebene zurückgeschraubt werden könne, und wenn die Querschnitte derselben symmetrisch gehalten werden, damit die eine Axe der Centralellipse vertical stehe. Es versteht sich von selbst, dass immer die grosse Axe vertical gestellt wird, weil der Balken in dieser Stellung der Biegung durch das Moment $\mathfrak{P}$ den grössten Widerstand entgegensetzt.

77. Die scheerenden Kräfte in Längenschnitten.

Wir haben jetzt allen äusseren Kräften eines Schnittes innere Kräfte entgegengesetzt, sie dadurch aufgehoben und abgethan. Allein ausser diesen durch sie erzeugten innern Kräften kann es noch andere geben, die nothwendig sind, um die Spannungsänderungen von einem Querschnitt zum andern nächsten zu bewirken. Wenn z. B. an dem Fig. 98 (S. 214) dargestellten Balkenstück zwischen zwei aufeinander folgenden und um $\triangle x$ von einander abstehenden Schnitten, der Theil der totalen Spannung Q, welcher über der $i$ten Lamelle L wirkt, und den wir mit Q_i bezeichnen, nicht genau gleich der entsprechenden Spannung Q'_i auf den hintern Schnitt ist, so wird die Spannungsdifferenz $\triangle Q_i = Q'_i - Q_i$ durch die scheerenden Kräfte ausgeglichen werden müssen, welche in dem angedeuteten Längenschnitt L wirken und welche die Kräfte darstellen, mit welchen die Balkentheile zu beiden Seiten dieses Längenschnittes aneinander vorüber zu gleiten trachten.

Um diese scheerenden Kräfte zu ermitteln, müssen wir vor allem die am hintern Schnitt (Fig. 98) wirkenden äusseren Kräfte bestimmen. Unter der Voraussetzung, dass das Eigengewicht des $\triangle x$ langen Balkenstückes vernachlässigt werden könne und dass sonst keine äusseren Kräfte an demselben wirken, wird sich Q bei seiner Versetzung nach dem Schwerpunkt des zweiten Schnittes nicht ändern, weil seine Richtungslinie schon durch denselben geht. P müssen wir in eine durch diesen Punkt gehende parallele gleich intensive Kraft und eine unendlich ferne Kraft, deren Maass $= P \triangle x$ ist (Nr. 40 S. 110) zerlegen. Diese unendlich ferne Kraft liegt in gleicher Ebene mit $\mathfrak{P}$. Da die unendlich fernen Kräfte bei dem Uebergang von einem endlichen Schnitt zum andern sich nicht ändern, so werden $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{Q}$ unveränderlich bleiben und nur $\mathfrak{P}$ sich in $\mathfrak{P}' = P + P \triangle x$ verwandeln. Hierin besteht also die einzige

Aenderung bei dem Uebergang von einem Schnitt zu einem um $\triangle x$ entfernten in den an ihm wirkenden Kräften; P, Q, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{T}$ bleiben unverändert.

Um die Construction der von $\triangle \mathfrak{P} = P \triangle x$ herrührenden scheerenden Kräfte am Längenschnitt L zu zeigen, denken wir uns es sei (Taf. 8_1) die Construction des Momentes $\mathfrak{P}$, das, wie dort angenommen wurde, Spannungen verursacht, deren Intensität der Entfernung von der durch den Schwerpunkt gehenden Axe proportional ist. Das Folgende kann also als eine Ergänzung der Nr. 58 und Nr. 73 betrachtet werden.

Bezeichnen wir mit ϱ die Spannung in der äussersten Faser, deren Entfernung vom Schwerpunkt $= c$ der Poldistanz des zweiten Kräftepolygons ist, so ist die in der $i$ten (z. B. 6ten) Lamelle wirkende Spannung

$$= a \triangle z'_i \cdot \frac{y}{c} \varrho = \varrho\, ab \cdot \frac{\triangle z''_i}{c}$$

weil $y \triangle z'_i = b \triangle z''_i$ ist. Und die Totalspannung in den obersten i Lamellen ist gleich

$$Q_i = \varrho\, ab \, \frac{z''_i}{c}$$

Bei dem Uebergang zum nächsten um $\triangle x$ entfernten Schnitt ändert sich z''_i nicht, weil alle Constructionen, aus denen es hervorgegangen ist, von $\varrho\, ab$, der Spannung auf die Fläche ab, die wir gleichsam als Flächeneinheit betrachten, unabhängig sind, und wir bei Definition des Balkens (Nr. 74 S. 209) angenommen haben, sein Querschnitt ändere sich nicht merklich auf die Länge $\triangle x$, die wir uns kleiner als die grösste Querschnittsdimension denken. Es kann sich also $\varrho\, ab$ nur ändern. Zur Bestimmung dieser Aenderung $\triangle \varrho\, ab$ haben wir auszudrücken, dass die Aenderung des Moments aller am Balkenquerschnitt wirkenden Kräfte gleich $P \triangle x$ ist.

Das Moment der an der $i$ten Lamelle wirkenden Kraft

$$\varrho\, ab \cdot \frac{\triangle z''_i}{c}$$

ist gleich $\varrho\, ab \triangle z'''_i$, weil $y \triangle z''_i = c \triangle z'''_i$ ist.

Das Moment aller am Schnitt wirkenden Spannungen ist gleich $\varrho\, ab\, z'''_n$.

Bei dem Uebergang zu dem um $\triangle x$ entfernten Schnitt ändert es sich um $\triangle(\varrho\, ab) \,.\, z'''_n = P \triangle x$.

Man hat demnach:

$$\triangle(\varrho\, ab) = \frac{P \triangle x}{z'''_n}$$

Die Aenderung der Spannung in den obersten i Lamellen ist daher gleich

$$\triangle Q_i = \triangle(\varrho\, ab)\, \frac{z''_i}{c} = \frac{P \triangle x}{z'''_n} \cdot \frac{z''_i}{c}$$

Um bei einfachen Querschnittsformen auch rechnen zu können, ist es mitunter nützlich, den z'' und z''' ihre ursprüngliche Bedeutung zu substituiren; laut Nr. 59 (S. 157) ist:

$$ab\, z''_i = \sum_o^i y \triangle F$$

und laut Nr. 71 (S. 194 und 196):

$$abc\, z'''_n = \sum_o^n y^2 \triangle F = k^2 F;$$

demnach:

$$\frac{z''_i}{c\, z'''_n} = \frac{\sum_o^i y \triangle F}{k^2 F}$$

und

$$\triangle Q_i = \frac{\sum_o^i y \triangle F}{k^2 F} \,.\, P \triangle x.$$

Verlängert man die Polygonseite des zweiten Momentenpolygons, welche auf die Lamelle i folgt, in Taf. 8_1 geschah es mit der Polygonseite für $i = 6$ und 9, bis zu ihren Durchschnittspunkten mit den äussersten Polygonseiten AB und CD, so liegen diese Schnitte auf den Mittelkräften aller vorausgehenden und aller folgenden Kräfte. Bezeichnet man diese Entfernung mit h_i (die Längen von h_6 und h_9 sind angedeutet), so hat man

$$\frac{h_i}{z'''_n} = \frac{c}{z''_i} \quad .$$

weil diese Polygonseite mit dem entsprechenden Strahl des Kräftepolygons parallel läuft. Es ist demnach auch

$$\triangle Q_i = \frac{P \triangle x}{h_i}$$

Bemerkt man, dass diese scheerende Kraft sich auf einen $\triangle x$ langen Schnitt L (Fig. 98) vertheilt, so folgt, dass sie mit derselben Intensität auf einen Schnitt von der Länge h_i vertheilt gleich

$$\frac{h_i}{\triangle x} \triangle Q_i = P$$

sein würde.

Dieses Resultat drücken wir in Worten also aus:

Die Mittelkraft P der zu einem Schnitt parallelen Seitenkräfte der äusseren Kräfte vertheilt sich scheerend auf einen Längenschnitt des Balkens, dessen Spur im Querschnitt mit dem der Richtung P conjugirten Durchmesser der Centralellipse des Querschnittes parallel läuft, und dessen Länge gleich der Entfernung h_i der Mittelkräfte der Spannungen und Pressungen ist, welche über und welche unter diesem Schnitt wirken.

Diese scheerenden Kräfte sind natürlich in dem Längenschnitt der Axe am grössten, weil für diesen die h_i bestimmende Polygonseite BC am steilsten und daher h_i am kleinsten ist.

Ist der Balken ein nicht ganz niedriger Blechbalken, in dessen Fuss und Kopf das meiste Metall concentrirt ist, und für dessen Höhe gewöhnlich die Entfernung der Schwerpunkte dieser Metallmassen in Rechnung gebracht wird, so kann man auch, in Erwägung, dass die Höhendifferenz der Punkte BC (Taf. 8_1) oder h_i immer grösser als diese Entfernung der Schwerpunkte sein muss, sagen: P vertheilt sich scheerend auf den Längenschnitt der Axe, dessen Länge gleich der Höhe des Balkens ist.

Nach dieser Regel berechnen sich wohl immer am einfachsten die in einem Balkenschnitt wirkenden scheerenden Kräfte, wenn man weiss, dass keine anderen Kräfte in demselben wirken, wie es z. B. bei den Stützpunkten der an beiden Enden aufliegenden Balken der Fall ist. Sollen sie jedoch mit anderen Kräften und Spannungen zusammengesetzt werden, so reducire man sie wie alle anderen Kräfte auf die Flächeneinheit ab.

$\triangle Q_i$ vertheilt sich auf den Längenschnitt L, dessen Inhalt geich $z \triangle x$ ist, die mit derselben Intensität auf die Fläche ab wirkende scheerende Kraft ist:

$$\frac{ab}{z \triangle x} \cdot \triangle Q_i = P \cdot \frac{b}{z'''_n} \cdot \frac{z''_i}{c} \cdot \frac{a}{z} = \sigma_i \cdot ab$$

oder wenn man für z'' und z''' die ursprüngliche Bedeutung substituirt:

$$\sigma_i = \frac{\sum_o^i y \triangle F}{k^2 F} \cdot \frac{P}{z}$$

indem wir mit σ die scheerende Kraft in irgend einem Längenschnitt, pro Flächeneinheit 1 bezeichnen.

Zur Multiplication von P mit obigen drei Verhältnissen wurde vom Pol des zweiten Polygons aus eine Linie nach dem Endpunkt des z'''_n gezogen, dessen Entfernung von diesem Pol gleich b ist. (Wir unterstreichen die Grössen, welche Taf. 8_1 eingeschrieben sind.) Die Entfernung vom Pol der Horizontalen, deren Länge gleich P ist, beträgt dann $P \frac{b}{z'''_n}$, und die Horizontale selbst wird von den Strahlen des zweiten Kräftepolygons, welche nach den einzelnen $\triangle z''$ in der Entfernung c laufen, in Segmente getheilt, die $= P \frac{b}{z'''_n} \cdot \frac{\triangle z''}{c}$ sind, und die sich zu $P \frac{b}{z'''_n} \cdot \frac{z''_i}{c}$, z. B. zu $P \frac{b}{z'''_n} \cdot \frac{z''_{15}}{c}$ summiren.

Dieser von der zufälligen Dicke des Balkens an der treffenden Stelle unabhängige Theil, der die scheerenden Kräfte darstellt, welche in einem Längenschnitt L von der Länge b wirken, wurde über der Axe des Schienenprofils aufgetragen und die ihre Endpunkte verbindende Curve mit: Curve der scheerenden Kräfte bezeichnet. Um σab zu erhalten, hat man die Ordinaten $P \frac{b}{z'''_n} \cdot \frac{z''_7}{c}$ z. B. noch mit dem Verhältniss $\frac{a}{z_7} = \frac{{}^1/_2 a}{{}^1/_2 z}$ zu multipliciren; es geschah indem über der halben Schienendicke ${}^1/_2 z$ die halbe Basis ${}^1/_2 a = 1{,}5$ Ctm. aufgetragen und mit der Hypothenuse des so gebildeten Dreiecks eine Parallele durch den Endpunkt der Ordinate der Curve der scheerenden Kräfte gezogen wurde; sie schneidet in der Axe $\sigma_7 ab$ ab.

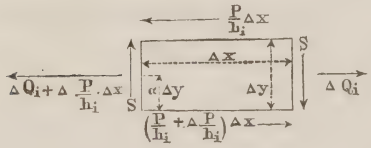
78. Die scheerenden Kräfte in Querschnitten.

An den Schnitten eines Balkenelements ist uns jetzt nur noch die Vertheilung der in den Querschnittsflächen wirkenden scheerenden Kräfte unbekannt; wir wissen zwar (Nr. 76 S. 213), dass die Summe derselben $= P$ ist, allein wir wissen noch nicht, wie viel von diesem P auf den Lamellenkopf, dessen Höhe $= \triangle y$ ist, trifft. Da diese Kraft die einzige letzte unbekannte an der Lamelle wirkende ist, so erhalten wir sie einfach dadurch, dass wir ausdrücken, sie müsse mit allen übrigen an der Lamelle wirkenden Kräften im Gleichgewicht sein.

Wir schneiden also das Balkenstück (Fig. 98) nochmals durch eine Parallebene zu L und zeichnen die $\triangle y$ hohe Lamelle mit den an ihr wirkenden Kräften in Fig. 100 heraus. In Nr. 77 hatten wir die auf die Vorderseite der Lamelle wirkenden Kräfte mit Q_i bezeichnet, dann gefunden, dass die auf die Rückseite wirkende Kraft $= Q_i + \frac{P}{h_i} \triangle x$ und die scheerende Kraft im Längenschnitt $L = \frac{P}{h_i} \triangle x$ ist. Bezeichnen wir den Zuwachs dieser Kräfte beim Uebergange zum $\triangle y$ entfernten Längenschnitt mit $\triangle Q_i$ und $\triangle Q_i + \triangle \frac{P}{h_i} \cdot \triangle x$, wo $\triangle x$ natürlich constant ist, so sind dies gerade die Spannungen, denen die $\triangle y$ hohe Vorder- und Rückseite der Lamelle ausgesetzt ist. Die scheerende Kraft im untern Lamellenschnitt ist dann nothwendiger Weise gleich

$$\left(\frac{P}{h_i} + \triangle \frac{P}{h_i}\right) \triangle x$$

Fig. 100.



Nützlich ist es zu bemerken, dass die Richtungen aller Kräfte in jedem Sinne streng abwechseln. Um zu scheeren, müssen schon die zu beiden Seiten eines Längen- oder Querschnitts wirkenden Kräfte entgegengesetzte Richtungen haben; aber auch die Richtungen der am innern oder äussern Umfang wirkenden Kräfte sind entgegengesetzte, wenn sie unmittelbar aufeinander folgen.

Alle diese Kräfte sind parallel und ihre Summe ist gleich 0, es müssen sich demnach auch die in den Endflächen $\triangle y$ wirkenden Kräfte, welche diesen parallelen Kräften das Gleichgewicht halten sollen, auf eine unendlich ferne Kraft reduciren, d. h. in beiden Endflächen gleich gross sein. Wir bezeichnen diese Kraft für den Moment mit S. Es muss nun das Moment $S \triangle x$ der unendlich fernen Kraft $+ S - S$ gleich dem der übrigen Kräfte sein.

Bemerkt man, dass die Richtungslinien von $\triangle Q_i$ und $\triangle Q_i + \triangle \frac{P}{h} \cdot \triangle x$ zusammenfallen, weil sie durch den Schnitt der der obern und untern Lamellenseite entsprechenden Seiten des ersten Seilpolygons (Taf. 8_1) bestimmt werden, und die dazu dienenden Constructionen nur von der Form des Schnittes, nicht von seiner Lage abhängig sind; und bezeichnet man die Höhe des Angriffspunktes dieser Kräfte in der Lamelle mit $\alpha \triangle y$, so erhält man als Momentengleichung, aus der $\triangle Q_i$ natürlich ganz ausfällt:

$$S \triangle x = \frac{P}{h_i} \triangle x . \triangle y + \triangle \frac{P}{h_i} . \triangle x . \alpha \triangle y,$$

und hieraus

$$S = \left(1 + \frac{\alpha \triangle \frac{P}{h_i}}{\frac{P}{h_i}} \right) \frac{P}{h_i} \triangle y.$$

α ist immer ein ächter Bruch und convergirt gegen $^1/_2$. Es nimmt diesen Werth an, sobald man sich $\triangle Q_i$ gleichmässig über $\triangle y$ vertheilt denken kann. $\triangle \frac{P}{h_i} : \frac{P}{h_i}$ convergirt gegen 0, es ist desto kleiner, je kleiner die Lamellendicke im Verhältniss zu der darüber befindlichen Balkendicke ist; S convergirt daher gegen den folgenden Grenzwerth, den man annehmen kann, sobald $\triangle y$ klein genug ist:

$$S = \frac{P}{h_i} \triangle y$$

Auf die Längeneinheit ist diese scheerende Kraft

$$\frac{S}{\triangle y} = \frac{P}{h_i}$$

gerade so gross als in dem Längenschnitt L. Das oben (S. 223) für den Längenschnitt construirte σab gilt daher auch für die scheerende Kraft im Querschnitt.

Wir haben jetzt noch nachzuweisen, dass die Summe aller dieser scheerenden Kräfte $= P$ ist. Werden die Ordinaten der Ecken des zweiten Seilpolygons mit z'''', und die Zunahme derselben bei dem Uebergang von der Ecke i zur Ecke $i+1$ mit $\triangle z''''_i$ bezeichnet (eigentlich sollte der Index $= i + {}^1/_2$ sein), so hat man offenbar:

$$\frac{\triangle y}{h_i} = \frac{\triangle z''''_i}{z''''_n};$$

denn das rechtwinklige Dreieck, dessen Katheten $\triangle y$ und $\triangle z''''_i$ sind (siehe Taf. 8_1, wo diese Werthe für $i=6$ eingezeichnet sind), ist dem rechtwinkligen Dreieck ähnlich, dessen Seiten h_i und z'''_n sind; die Hypothenusen fallen zusammen und die homologen Katheten laufen parallel. Es ist daher auch

$$S = P \cdot \frac{\triangle z''''_i}{z'''_n}$$

Nun sind aber P und z'''_n constant und $\sum_0^n \triangle z''''_i$ gleich z''''_n $= z'''_n$, mithin

$$\sum_0^n S = P$$

w. z. b. w.

79. Zusammensetzung der auf ein Schnittelement wirkenden Kräfte.

Gewöhnlich nimmt man an, dass es für die Sicherheit genüge, dass in einer Fläche ϱ und σ vergrössert um die übrigen von $Q, \mathfrak{Q}$ und etwa $\mathfrak{T}$ herrührenden Kräfte gewisse Grenzen nicht überschreiten. Die bisherigen Constructionen genügen, um dies für einen Querschnitt, auf den ϱ und in dem σ gleichzeitig wirken, ebenso für einen Längenschnitt, in welchem σ allein wirkt, zu ermitteln. Es fragt sich aber jetzt, ob es zwischen diesen normal auf einander stehenden Schnitten nicht andere geben kann, für die ϱ oder σ oder beide grösser sein könnten. Wir wollen dies für den Fall untersuchen, dass der Balken keinen Torsionen ausgesetzt sei.

Wir theilen den Balken in prismatische Elemente durch Längenschnitte, die parallel und senkrecht zu dem der Richtung P conjugirten Durchmesser stehen, deren Dicke in der Richtung P gemessen klein genug sei, um innerhalb derselben die im Querschnitt scheerende Kraft σ constant annehmen zu dürfen, und deren

Breite der Dicke z des ganzen Balkens gleich sein darf, wenn keine $\mathfrak{Q}$ vorkommen, die jedoch im entgegengesetzten Fall so schmal angenommen werden müssen, dass innerhalb derselben auch die von $\mathfrak{Q}$ herrührenden Spannungen constant angenommen werden dürfen.

Es sei Fig. 101 der Längenschnitt eines solchen Prismas; wir schneiden es durch eine Ebene $\triangle s$, die senkrecht auf den Seiten des Prismas steht, in denen keine scheerenden Kräfte wirken, und mit denen auch die Bildebene parallel laufend angenommen wurde.

Fig. 101.

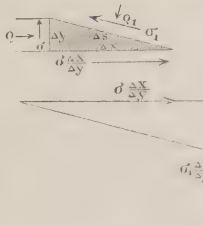
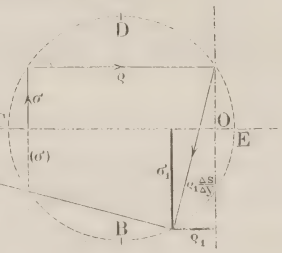


Fig. 102.



und bestimmen nun die an $\triangle s$ wirkenden Kräfte durch Zusammensetzung der bekannten Kräfte, welche an dem Querschnitt $\triangle y$ und dem Theil $\triangle x$ des Längenschnittes wirken.

Wir bemerken, dass durch Veränderung der Lage des Querschnittes $\triangle y$ nichts geändert wird, weil der Zuwachs der scheerenden Kräfte auf der untern Seite der Lamelle durch die dazu kommenden in entgegengesetzter Richtung in ihrer obern Seite wirkenden Kräfte wieder aufgehoben wird. Ferner muss die durch $\triangle s$ gehende Schnittfläche senkrecht auf der Fläche stehen, in welcher keine scheerenden Kräfte wirken, weil dann durch Drehung um $\triangle s$ keine Aenderung der an allen Schnitten wirkenden Kräfte erzeugt wird, indem der Flächeninhalt jeder Prismenseite, in welcher die scheerenden Kräfte wirken, constant bleibt. Die Normalfläche als kleinste Fläche ist dann die, in welcher die grössten Spannungen durch Vertheilung constanter Kräfte entstehen.

Bezeichnen wir nun sämmtliche Normalspannungen oder Pressungen auf den Querschnitt $\triangle y$, den wir für die vorliegenden Operationen als Einheit betrachten, Kräfte, die aus Q, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zusammengesetzt sind, mit ϱ, die auf denselben Schnitt $\triangle y$ wirkenden von P herrührenden scheerenden Kräfte mit σ, so werden

die im Längenschnitt $\triangle x$ wirkenden Kräfte $= \sigma \frac{\triangle x}{\triangle y}$ sein, weil sich die Inhalte dieser Schnitte wie $\triangle x : \triangle y$ verhalten und die scheerenden Kräfte in beiden laut Nr. 78 S. 225 pro Flächeneinheit gleich sind. Aus demselben Grunde geht die Mittelkraft dieser beiden scheerenden Kräfte durch die Mitte von $\triangle s$; durch denselben Punkt geht auch ϱ, weil es der Voraussetzung gemäss gleichförmig vertheilt über das hinlänglich kleine $\triangle y$ angenommen werden kann; und in demselben Punkte schneiden sich auch die scheerende und die pressende Kraft, welche in und an $\triangle s$ wirken. Bezeichnen wir sie durch σ_1 und ϱ_1 pro Flächeneinheit, so werden die entsprechenden totalen in $\triangle s$ wirkenden Kräfte gleich $\sigma_1 \frac{\triangle s}{\triangle y}$ und $\varrho_1 \frac{\triangle s}{\triangle y}$ sein.

Das Gleichgewicht dieser fünf Kräfte ist durch das Kräftepolygon (Fig. 102) dargestellt. ϱ und σ sind in Richtung und Grösse gegeben. $\sigma \frac{\triangle x}{\triangle y}$ ist in Richtung und Lage gegeben; seine Grösse bestimmen wir, indem wir durch den Endpunkt des nochmals symmetrisch zu ihm aufgetragenen $(\sigma) = \sigma$ eine Parallele zu $\triangle s$ ziehen, denn dann verhält sich $\sigma \frac{\triangle x}{\triangle y}$ zu σ wie $\triangle x$ zu $\triangle y$. Durch diese Parallele erhalten wir gleichzeitig auch in Richtung und Lage $\sigma_1 \frac{\triangle s}{\triangle y}$. Die Grösse dieser Kraft wird durch den Fuss des durch den Endpunkt von ϱ gehenden Perpendikels bestimmt, der in Richtung und Grösse $\varrho_1 \frac{\triangle s}{\triangle y}$ darstellt. Fällt man vom Schnittpunkt dieser beiden Kräfte Perpendikel σ_1 und ϱ_1 auf die Richtungslinie der Kraft $\sigma \frac{\triangle x}{\triangle y}$ und auf die durch den Endpunkt von ϱ gehende Senkrechte darauf, die sich gegenseitig in O schneiden, so sind diese Perpendikel die auf die Längeneinheit in $\triangle s$ wirkenden scheerenden und pressenden Kräfte, weil sie sich zu $\sigma_1 \frac{\triangle s}{\triangle y}$ und $\varrho_1 \frac{\triangle s}{\triangle y}$ wie $\triangle y$ zu $\triangle s$ verhalten.

Aendern wir nun durch Aenderung von $\triangle x$ die Richtung von $\triangle s$ allein (Fig. 101), so bleiben ϱ und (σ) σ unverändert, und

der Schnittpunkt $(\varrho_1\ \sigma_1)$ beschreibt den Kreis, der über den Endpunkten von (σ) und ϱ als Durchmesser beschrieben ist, weil die in $(\varrho_1\ \sigma_1)$ sich schneidenden und senkrecht auf einander stehenden Linien $\sigma_1 \frac{\triangle s}{\triangle y}$ und $\varrho_1 \frac{\triangle s}{\triangle y}$ immer durch diese beiden Punkte gehen. Die Maximalordinaten dieses Kreises bezüglich O als Ursprung sind daher die grössten scheerenden und spannenden Kräfte, welche durch Drehung vom $\triangle s$ an der treffenden Stelle des Balkens bei gegebener Belastung hervorgebracht werden können.

Die beiden Punkte B und D machen σ_1 und C und E machen ϱ_1 zum Maximum; die Linien, welche diese Punkte mit dem Endpunkte von (σ) verbinden, geben die Richtung von $\triangle s$ an, in welchen diese Maxima stattfinden.

Um das gegenseitige Verhältniss der Kräfte bei diesen, Maximalspannungen erzeugenden Richtungen von $\triangle s$ klar darzulegen, wurden sie (Fig. 103, 104, 105, 106) besonders gezeichnet und die jeweilige Form des geschnittenen Balkenelementes (s. Fig. 101) mit $\sigma_1 \frac{\triangle s}{\triangle y}$ als $\triangle s$ in Verbindung gebracht. Wir machen darauf aufmerksam, dass die in $\triangle y$ wirkenden Kräfte ihr Zeichen ändern,

Fig. 103.

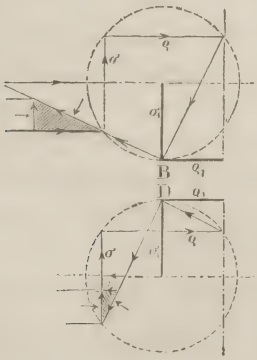


Fig. 104.

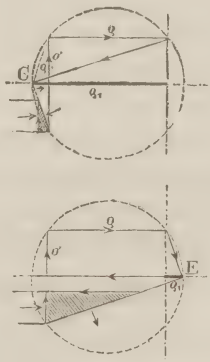


Fig. 105.

Fig. 106.

wenn dadurch, dass $\triangle s$ in den nächsten Quadranten tritt, die scheerenden Kräfte in der obern Prismenseite zum Angriff kommen, die in entgegengesetzter Richtung als die in der untern wirken. Die Construction befindet sich mit dieser Thatsache vollständig im Einklang.

Ausserdem lesen wir noch aus obigen vier Figuren heraus:

Die Winkel, welche die Richtungen mit einander bilden, in welchen irgend Maxima vorkommen, sind Winkel von 45°.

Das Maximum der überhaupt vorkommenden Inanspruchnahme ϱ_1 des Balkenmaterials ist derselben Natur (spannend oder pressend), als wie ϱ (Fig. 104). Der Winkel, den der Schnitt mit dem Normalschnitt bildet, und der auch bei δ (in Fig. 104 steht aus Versehen ϱ statt δ) abgelesen werden kann, ist immer kleiner als 45°. Wird der Balken senkrecht auf diesen Schnitt geschnitten, so ist sein Material in entgegengesetztem Sinne als wie durch ϱ in Anspruch genommen (pressend oder spannend) (Fig. 106). In diesem Fall ist nämlich die im Längenschnitt ϱ entgegenwirkende scheerende Kraft etwas grösser als dieses.

In den Schnitten, welche den rechten Winkel dieser beiden letzten Schnitte halbiren, sind die scheerenden Kräfte σ_1 am grössten (Fig. 103 und 105). Sie sind nie so gross als das Maximum ϱ_1 (Fig. 104).

Die Maximalkraft dieser scheerenden Kräfte σ_1 ist gleich der Mittelkraft der senkrecht auf einander wirkenden σ und $^1/_2\,\varrho$ in den Normalschnitten. Das Maximum der Spannungen oder Pressungen ist dann um $^1/_2\,\varrho$ grösser, das kleinste Maximum um $^1/_2\,\varrho$ kleiner.

In den Schnitten, in welchen dieses positive oder negative Maximum (Minimum) von ϱ_1 stattfindet, kommen gar keine scheerenden Kräfte vor.

In der neutralen Axe, wo $\varrho = o$ ist, bilden die Schnitte, welche ϱ_1 zum Maximum und Minimum machen, Winkel von 45° mit dieser Axe. Die Schnitte, in denen σ_1 Maxima sind, laufen parallel und senkrecht mit der Axe.

In den äussersten Fasern, wo $\sigma = o$ ist, ist das Maximum von ϱ_1 auch in Richtung gleich ϱ, das Minimum $= o$. Die Schnitte, welche σ_1 zum Maximum von $^1/_2\,\varrho$ machen, bilden Winkel von 45° mit ϱ.

Ueber die Lage, welche das Element (Fig. 101, 103, 104, 105, 106) im Balken einnimmt, wird man nie in Zweifel sein, sobald man sich daran erinnert, dass σ die am stehenbleibenden Balkenstück wirkende scheerende Kraft bezeichnet, und daher immer in entgegengesetzter Richtung als wie P wirkt.

Nimmt man an, der Balken sei über eine lichte Oeffnung gelegt und belastet, so wird die Spitze des schraffirten Balkenelements immer gegen den Maximalmomentenpunkt (Nr. 48 S. 127) gekehrt sein.

Zweites Kapitel.

Construction der innern Kräfte.

80. Construction der Kräfte, welche im Innern einer Eisenbahnschiene wirken.

Die im vorigen Kapitel erläuterten Constructionen haben wir auch noch auf das Beispiel (Taf. 8_1) des Schienenprofils angewendet. Es versteht sich von selbst, dass wir nicht mit σ und ϱ pro Flächeneinheit, sondern mit dem Druck auf unsere Flächeneinheit ab, nämlich mit $(\sigma\, ab)$ und $(\varrho\, ab)$, construiren. $(\sigma\, ab)$ haben wir (Nr. 77 S. 223) so construirt, dass es über der treffenden Lamelle in die Axe der Schiene zu liegen kam, siehe $(\sigma_7\, ab)$, auch $(\sigma_{13}\, ab)$. Wir denken uns nun, dies seien die σ von Fig. 104 u. 106 S. 229 und klappen den im Längenschnitt befindlichen oberen Halbkreis dieser Figuren in den Querschnitt um, indem wir ihn um σ drehen. Die Entfernung des Mittelpunktes von σ ist $= {}^1/_2\,\varrho$ oder wenn wir mit $(\varrho\, ab)$ den Druck in der äussersten Faser, deren Entfernung von der neutralen Axe $= c$ ist, auf dieser Flächeneinheit ab bezeichnen $= {}^1/_2\,\frac{y_i}{c}\,(\varrho\, ab)$, wo y_i die Entfernung der betreffenden Lamelle von der neutralen Axe bezeichnet.

Wird daher in der äussersten Faser ${}^1/_2\,\varrho\, ab$ senkrecht auf die Axe (Richtung der P) aufgetragen und der Endpunkt desselben mit dem Schwerpunkt der Schiene verbunden, so liegen die Mittelpunkte aller umgeklappten Kreise in dieser Linie, und die Kreise selbst sind vollständig dadurch bestimmt, dass die Endpunkte von $(\sigma_i\, ab)$ (siehe $i = 7$ und 13) Punkte derselben sind. Die Segmente

des Durchmessers, über dem die Halbkreise beschrieben wurden, zu beiden Seiten von $(\sigma_i ab)$, sind das Maximum und das Minimum von ϱ_1. Das Maximum auf der Seite des Kreismittelpunktes hat ganz die Lage wie in Fig. 104.

Dass aber das Segment auf der andern Seite von $(\sigma_i ab)$ gleich dem Minimum von ϱ_1 sei geht daraus hervor, dass die ϱ_1 in Fig. 104 und in Fig. 106 sich zur Länge des Durchmessers ergänzen.

Wird diese Construction für alle Lamellen wiederholt und die Endpunkte der so erhaltenen Durchmesser durch eine Curve mit einander verbunden, so erhält man die Taf. 8_1 eingezeichneten Curven der Maximalspannungen und Pressungen; sie geben den besten Ueberblick über die Inanspruchnahme des Materials in den verschiedenen Höhen der Schiene.

Die Stelle, wo die Winkel δ_1 abgelesen werden können, welche die entsprechenden Schnitte mit der Horizontalen bilden, sind im Halbkreis der Lamelle 13 angedeutet; auch in Fig. 104 wollten wir dieses δ andeuten, leider aber wurde, wie schon bemerkt, ein ϱ daraus.

Die Curve der Maximalpressungen und Spannungen kann man auch als Curve des Maximums der scheerenden Kräfte betrachten, sobald man sie auf die Mittelpunktslinie der umgeklappten Kreise bezieht, die durch $\frac{1}{2}(\varrho ab)$ in der äussersten Faser bezeichnet ist; denn diese Maxima (siehe Fig. 103 und 105) sind gleich dem Radius des Constructionskreises.

Aus dem Verlauf der Curven (Taf. 8_1) geht hervor, dass das Maximum der Inanspruchnahme des Balkenmaterials nicht auf den Kopf und Fuss desselben beschränkt ist, sondern es kann, wenn zufälliger Weise, wie es hier angenommen wurde, starke scheerende Kräfte mit grossen Momenten, bei den Stützpunkten continuirlicher Balken z. B. zusammentreffen, der Ort, wo plötzliche Aenderungen der Querschnittsdicke stattfinden, sehr bedeutenden Pressungen ausgesetzt sein.

Die Belastungsverhältnisse, welchen Taf. 8_1 entspricht, können wir wie folgt in die Praxis übersetzen. Das die scheerenden Kräfte bezeichnende P hat eine Länge von 2,6 Ctm. Unter der Voraussetzung, dass 1 Tonne durch 0,8 Ctm. dargestellt werde, würde es ein Gewicht von $\frac{26}{8} = 3^{tn},25$, den halben Raddruck einer Engerthschen Locomotive, die einen Axendruck von 13^{tn} ausübt, darstellen. So gross und noch grösser kann die scheerende Kraft bei den Stützpunkten sein.

$(\varrho\ ab) = 4$ Ctm. stellt einen Druck von $\frac{40}{8} = 5$ Tn. auf 20 □Ctm. oder von 2,5 Kilogr. pro □Mm. dar. Das Moment dieser Spannungen ist $= (\varrho\ ab)\ 2'''_{14} = 5 \,.\, 7{,}3$ Ctm. Ihm entspricht der halbe Wagendruck an einem Hebelarm von

$$\frac{5^{t.} \,.\, 7^{Ctm.},3}{3^{t.},25} = 11{,}3 \text{ Ctm.}$$

wirkend.

So gross würde also das Moment sein, wenn bei der Belastung durch ein Wagenrad der Inflectionspunkt der elastischen Linie, welche die Schienenaxe bildet, sich in einer Entfernung von 11 Ctm. vom Stützpunkt befände.

In der Regel wird wohl die scheerende Kraft kleiner, das Moment dagegen grösser sein. Hier haben wir vorzugsweise aus Deutlichkeitsgründen die Belastungsverhältnisse also angenommen.

81. Bestimmung der im Innern eines Balkens bei verschiedenartigen Belastungen wirkenden Kräfte.

Auf Taf. 8_I sind nur P und $\mathfrak{P}$ durch innere Kräfte aufgehoben, wäre noch ein Q, d. h. ein directer Zug oder ein directer Druck vorhanden, so müsste es einfach dadurch berücksichtigt werden, dass man die bei $\frac{1}{2}(\varrho\ ab)$ auslaufende Linie aller Mittelpunkte parallel mit sich selbst um $Q\frac{ab}{F}$ versetzt, wie wir es im Beispiel von Nr. 92 zeigen werden. Natürlich so, dass je nachdem Q selbst Druck oder Spannung ist, dadurch der Druck oder die Spannung um $\frac{1}{2}(\varrho\ ab)$ vergrössert wird: die Reduction $Q\frac{ab}{F}$ wird gar leicht graphisch ausgeführt, wenn man berücksichtigt, dass $F = a\,z'_{16}$ ist, sodass also das auf dem Maassstab der Kräfte abgegriffene Q im Verhältniss $\frac{b}{z'_{16}}$ zu reduciren ist, um die Constante zu erhalten, um welche jedes von $\mathfrak{P}$ herrührende ϱ vergrössert oder vermindert werden muss.

Wenn am Balken gar keine andern Kräfte als Q wirken, so reducirt sich der Fall auf den, welchen wir schon in Nr. 76 S. 216 behandelt haben, und wir haben einfach:

$$Q = \frac{i}{i + c}\, \varrho\, F,$$

und:

$$\varrho = \frac{Q}{F}\left(1 + \frac{c}{i}\right).$$

Würde Q in der Axe wirken, so wäre der Druck oder die Spannung in jedem Flächenelement $= \frac{Q}{F}$, dadurch, dass sie excentrisch und zwar in der Entfernung $\frac{k^2}{i}$ von der Axe wirkt, wird der Druck oder die Spannung in der äussersten Faser auf der Seite, auf welcher Q wirkt, um ein $\frac{c}{i}$tel vergrössert. Dieses Verhältniss nimmt den Werth 1 an, wenn in symmetrischen Balkenquerschnitten Q auf den Umfang des Centralkerns wirkt, weil dann das Profil des Schnittes bei seiner Umkehrung zur Bestimmung des Kerns mit sich selbst zusammenfällt und demnach $i = c$ ist.

Wenn also an einem symmetrischen Balkenquerschnitt, z. B. an einem Bogen oder Gewölbequerschnitt, eine Kraft parallel mit der Richtung der Axe auf den Umfang des Kerns wirkt, bei einem Gewölbe z. B. die ausserhalb einer Fuge wirkenden Pressungen durch das äussere $^1/_3$ gehen, so ist die Spannung in den äussersten Flächenelementen der Flächenquerschnitte

$$\varrho = 2 \cdot \frac{F}{Q}$$

doppelt so gross, als wenn der Druck, im Schwerpunkt wirkend, gleichmässig über denselben vertheilt wäre.

Wenn es sich um so einfache Verhältnisse wie hier handelt, so wird man ϱ wohl immer leichter rechnen als construiren, übrigens bietet auch die Construction von

$$(\varrho\, ab) = Q \cdot \frac{ab}{F}\left(1 + \frac{c}{i}\right) = Q \cdot \frac{b}{z'_n} + Q\,\frac{b}{z'_n} \cdot \frac{c}{i}$$

durchaus keine Schwierigkeiten, und wir verweilen nicht länger hierbei.

Würde ausser P, Q und $\mathfrak{P}$ auch noch eine unendlich ferne Kraft $\mathfrak{Q}$ am Balken wirken, deren Axe mit der von $\mathfrak{P}$ einen rechten Winkel bildet, so wird es wohl immer am zweckmässigsten sein, mit Benutzung der Seilpolygone unter dem Fuss der Schiene (Taf. 8_1), welche zur Construction der kleinen Axe dienten, ganz auf dieselbe Weise, wie es für die horizontalen Lamellen geschah, auch für die verticalen das $(\varrho\, ab)$ zu bestimmen. In einem aus der Durchdrin-

gung einer verticalen und horizontalen Lamelle entstehenden Rechteck wird sich dann das ($\varrho\, ab$) aus der Summe der ($\varrho\, ab$), die in jeder der beiden Lamellen wirken, zusammensetzen. Die weiter oben ausgeführten Constructionen zur Zusammensetzung der scheerenden Kräfte mit den Spannungen und Pressungen werden dann natürlich nicht mehr für eine ganze Lamelle, sondern nur für einen Theil derselben gelten. Uebrigens wird man deshalb diese Constructionen nie für alle durch die Durchdringung der beiden Lamellensysteme entstehenden Elemente auszuführen haben; da $\mathfrak{Q}$ bei fortschreitendem Querschnitt unverändert bleibt und daher keine scheerenden Kräfte erzeugt, so wird man nur das Randelement zu untersuchen haben, für welches sich die ($\varrho\, ab$) der beiden Lamellensysteme addiren, sodass im Ganzen die scheerenden und spannenden oder pressenden Kräfte nicht öfter zusammenzusetzen sind, als es Taf. 8_{I} geschah.

Man könnte auch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zuerst zusammensetzen und die Lamellen parallel zum Durchmesser annehmen, welcher dem Durchmesser conjugirt ist, der senkrecht auf der die Mittelkraft ($\mathfrak{P}$ $\mathfrak{Q}$) darstellenden Axe steht, man hätte es dann nur mit einem einzigen $\varrho\, ab$ zu thun, weil es innerhalb jeder dieser Lamellen constant bleibt; allein deshalb kann man doch nicht die Construction des mit der Bewegung des Querschnitts sich ändernden $\mathfrak{P}$ ersparen, weil von dieser Aenderung die scheerenden Kräfte herrühren. Man hat es daher schliesslich doch mit zwei sich durchdringenden Lamellensystemen zu thun, und dann ist es am einfachsten, Lamellen, die zur Construction ohnedies schon vorhandener Polygone dienten, zu benutzen, statt neue zu construiren.

Alle hier angeführten Constructionen bieten durchaus keine Schwierigkeiten dar, sondern verursachen nur Mühe; alle vorzunehmenden Operationen sind Taf. 8_{I} einzeln schon vorhanden, und wir können uns daher hier um so mehr enthalten, ein Beispiel auszuarbeiten, wo ein Schnitt allen Kräften P Q $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ausgesetzt wäre, als wir später noch Gelegenheit haben werden, Balken zu behandeln, an denen andere Kräfte als P und $\mathfrak{P}$ wirken.

82. Die Spannungstrajectorien im Längenschnitt eines Balkens.

Denkt man sich für in nicht zu grosser Entfernung aufeinander folgende Normalschnitte die Richtungen der Schnitte der Maxi-

mal- und Minimal-Inanspruchnahme des Materials construirt, und zieht man im Längenschnitt eine Trajectorie über all die Querschnitte weg, die jeden in der construirten Richtung schneidet, so wird die Trajectorie die Spur einer Fläche sein, in der keine scheerenden Kräfte vorkommen, d. h.: die Balkenelemente zu beiden Seiten dieser Fläche streben nicht, aneinander vorüber zu gleiten.

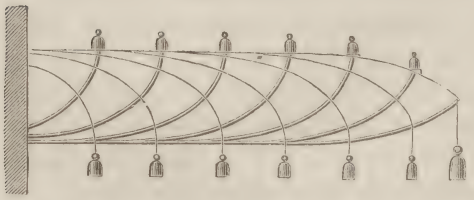
Es sind zwei Systeme solcher Trajectorien vorhanden; die eine bezeichnet die Schnitte, in welchen die Balkenelemente von beiden Seiten der Fläche auseinandergerissen, die andere diejenigen, in welchen sie von beiden Seiten zusammengepresst werden.

Es ist klar, dass die letztern Schnitte allein ausgeführt werden könnten, ohne dass deshalb der Balken auseinander fiele. Zwei solche nahe aufeinander folgende Schnitte theilen den Balken in Streifen, die in der Richtung der Trajectorie absolut in Anspruch genommen sind, während die Belastung des Balkens und ihr eigenes Gewicht sie in der Richtung der andern Trajectorien senkrecht aufeinander pressen.

Denken wir uns weiter das Material dieser Lamellen in ihrer Mitte als Blechstreifen z. B. vereinigt, so müssen wir diese Streifen auf der andern Seite durch Klötzchen auseinander halten, in denen wir auch den senkrechten Druck, dem die Streifen ausgesetzt sind, streckenweise aufnehmen.

Diese Streifen und Klötzchen setzen sich zu einem Gebilde wie Fig. 107 zusammen. Die Streifen sind als absolut angegriffene Constructionstheile durch einen Strich, die Klötzchen als rückwirkend angegriffene durch 2 Striche angedeutet; diese letztern kann man sich im Gegensatz zu den gespannten Streifen als Gewölbchen vorstellen; beide sind in obigem Sinne Trajectorien des Balkens; schneiden sich unter rechten Winkeln und die Axe unter Winkeln von 45°; die Spannung nimmt in ihnen zu von dem Rand des Balkens, auf dem sie senkrecht stehen, und wo sie den Druck oder Zug äusserer Kräfte aufnehmen können, gegen den Rand hin, mit dem sie parallel laufen; und die Spannungsänderung in ihnen wird nur

Fig. 107.



dadurch erzeugt, dass sie in jedem Knotenpunkt die Richtungsänderung der sie kreuzenden Trajectorie bestimmen.

Fig. 107 stellt also die Lage der Fibern eines Balkens dar, der den Voraussetzungen von Nr. 75 S. 211 entspräche; die Fibern laufen nichts weniger als parallel, und deshalb glaubten wir auch dort die zweite Voraussetzung einfach als solche hinstellen und sie nicht, wie es gewöhnlich geschieht, durch Beweise begründen zu sollen, die ihrerseits auf dem gar nicht stattfindenden Parallelismus der Fibern beruhen. Uebrigens findet die Fig. 107 annähernd gezeigte Fiberanlage ihre Bestätigung in den Millionen Modellen, welche uns die Natur und der Sägemüller an jedem zu Brettern verschnittenen Baum zeigen.

Setzt man zwei Balken wie Fig. 107 mit ihren Wandenden so zusammen, dass sich die Spannungen und Pressungen je zweier in der Mitte zusammenstossenden Trajectorien gegenseitig aufheben, und kehrt man dann die zwei zu einem Ganzen vereinigten Balken herum, dass die rückwirkend angegriffenen Fiberntheile oben und die absolut angegriffenen unten hin zu liegen kommen, so erhält man das Bild der Fibernlage in einem über eine Oeffnung gelegten und zu beiden Seiten gestützten Balken.

Behält man von allen diesen Fibern nur die äusserste bei und ersetzt man alle innern durch Fachwerk, so gelangt man zum Paulischen Träger, den wir später behandeln werden.

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY

Drittes Kapitel.

Beispiele über den geraden Balken.

83. Bestimmung der Kräfte, welche an einem Balken rechteckigen Querschnitts wirken.

Das jetzt Entwickelte wollen wir nun auf einige Beispiele anwenden.

Wenn die in der Querschnittsfläche wirkenden unendlich fernen Kräfte $\mathfrak{T}$, welche Torsion bewirken (Nr. 76 S. 216), entsprechend durch die Construction beseitigt werden können und beseitigt sind, so setzt man den übrigen unendlich fernen Kräften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, welche Biegungen bewirken, in der Regel einen rechteckigen Querschnitt entgegen, wenn man in Holz construirt, dagegen einen $\top$förmigen oder irgend einen andern gespreitzten Querschnitt, wenn man in Eisen construirt. Im letztern Falle führt jederzeit die in Nr. 80 S. 231 entwickelte Construction, die wir auch auf noch zwei andere Balkenformen anwenden werden, am schnellsten zum Ziel; im ersten Fall aber ist es wegen der Nr. 68 S. 180 angedeuteten Gründe einfacher, die Spannungen im Innern des Balkens als Function der wenigen vorkommenden Dimensionen auszudrücken, und dann diese sehr einfachen Ausdrücke entweder zu berechnen oder in eine Construction zu übersetzen.

Da bei dem rechteckigen Querschnitt keine Verschwächung der Dicke, wie bei der Mittelrippe $\top$förmiger Querschnitte, und demnach auch keine Anschwellung der die Maximalspannungen darstellenden Curve (siehe Taf. 8_1) vorkommt, und diese Curve wie dort die Linie der (ϱ *ab*) berührt, so folgt, dass die Elemente solcher Querschnitte jederzeit in den bezüglich der neutralen Axe äussersten Fasern am stärksten in Anspruch genommen sind. Da in diesen Elementen die scheerenden Kräfte $= 0$ sind, weil jenseits derselben keine Elemente mehr vorkommen, für welche die Spannungsdifferenzen zu übertragen wären, so können bei solchen Querschnitten die scheerenden Kräfte ganz ausser Acht gelassen werden, wenn der Balken aus einem einzigen ganzen Stück hergestellt ist; und nur dann, wenn der Balken aus zwei oder mehreren verzahnten oder verkeilten Balken zusammengesetzt ist, müssen die scheerenden Kräfte bestimmt werden, um zu untersuchen, ob die angenommenen Zähne und Keile im Stande sind, die scheerenden Kräfte von einem Balken auf den nächsten zu übertragen. Da sich ausserdem noch die von einem in der Axe wirkenden Q (siehe Fig. 98 S. 213) herrührenden Spannungen einfach zu den von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ herrührenden addiren, weil sie gleich gerichtet sind, so können wir die Wirkungen der am Balken rechteckigen Querschnitts wirkenden Kräfte von einander trennen und, wie folgt, einzeln behandeln.

Kommt nur ein in der Axe wirkendes Q vor, so vertheilen sich

die von ihm herrührenden Spannungen oder Pressungen laut Nr. 76 S. 214 gleichförmig über den Querschnitt; bezeichnen wir die Seiten desselben mit b und h, so sind sie gleich

$$\varrho_1 = \frac{Q}{b\,h}$$

Wirkt Q nicht in der Axe, aber parallel zu derselben, so wird es immer am einfachsten sein, nach Nr. 69[a] S. 182 die Centralellipse und nach Nr. 67 S. 178 die neutrale Axe zu construiren und dann nach der Formel Nr. 76 S. 214:

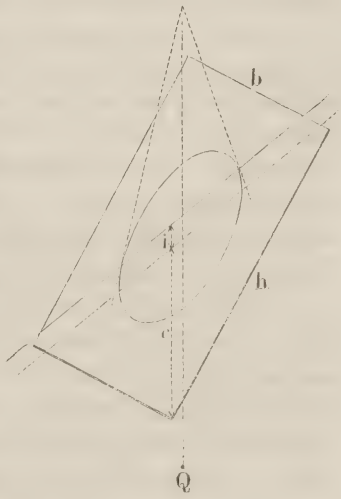
$$\varrho = \frac{Q}{b\,h}\left(1 + \frac{c}{i}\right),$$

wo c und i die frühere, und die in Fig. 108, wo die Construction ausgeführt wurde, angedeutete Bedeutung haben. Ausserdem bezeichnet noch Q den Angriffspunkt der Kraft, und die eingezeichnete Polare seines Symmetralpunktes ist die neutrale Axe. ϱ ist am kleinsten, wenn Q in dem zu h parallelen Durchmesser liegt; dann vereinfacht sich die Construction dadurch, dass man aus selbstverständlichen Gründen der Centralellipse einen Kreis des Halbmessers

$$k = \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot h = 0{,}289\ h$$

(siehe S. 182) substituiren darf. Auch in diesem Falle ist die Construction noch einfacher als die Rechnung.

Fig. 108.



Eine unendlich ferne Kraft $\mathfrak{P}$, welche in einer durch die Axe gehenden Ebene wirkt, verursacht laut S. 215 in der äussersten Faser eine Spannung ϱ_2, die sich aus

$$\mathfrak{P} = \frac{b\,h\,k^2}{c}\,\varrho_2$$

ergiebt.

Auch dieser Ausdruck wird noch leichter construirt als gerechnet, wenn $\mathfrak{P}$ nicht in den Seitenflächen h des Balkens wirkt. Ist jedoch dies der Fall, so wird laut Nr. 69 S. 182:

$$k^2 = {}^1/_{12}\, h^2, \text{ und } c = {}^1/_2\, h,$$

demnach $$\mathfrak{P} = {}^1/_6\, \varrho_2\, b\, h^2.$$

Um diesen Ausdruck zu construiren, bringe man ihn in die Form

$$\mathfrak{P} = ({}^1/_6\, \varrho_2\, b\, h)\, h = Q\, h$$

wo Q die gleich intensive Spannung und Pressung in einem Balken bezeichnet, dessen Querschnittsfläche $= {}^1/_6$ der des Blechbalkens wäre. Hat man daher das Moment $\mathfrak{P}$ auf die 1-, 2-, 3-, n-fache zum Voraus angenommene Höhe des Balkens als Hebelarm reducirt (Nr. 37 S. 103), so vertheilt sich die erhaltene Kraft

$$Q = \mathfrak{P} : h$$

auf das ${}^1/_6$ des Balkenquerschnitts. ϱ_2 erhält man demnach jetzt als Verhältniss der Kraft Q zur Kraft $1 \,.\, {}^1/_6\, b\, h$.

Am zweckmässigsten werden übrigens diese Operationen mittelst des Rechenschiebers, dieses äusserst nützlichen kleinen Instrumentchens ausgeführt. Aus

$$\frac{\mathfrak{P}}{b} = \frac{h^2}{6 : \varrho^2}$$

geht hervor, dass die Zähler und Nenner der beiden obigen Brüche auf dem Rechenschieber sich gleichzeitig gegenüberstehen müssen. Stellt man daher die Zahlen des Bruches, dessen Nenner und Zähler gleichzeitig gegeben ist, ein: so findet man der dritten gegebenen Zahl gegenüber die vierte gesuchte, wobei nur zu beachten ist, dass beide Nenner auf der beweglichen Zunge stehen müssen.

Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, die Dimensionen des Balkens seien angenommen worden, und es handle sich darum, zu untersuchen, ob in Folge dieser Annahme ϱ_2 nicht zu gross werde. Auf diese Weise muss man bei allen zusammengesetzteren Querschnitten, $\top$ und $\perp$förmigen, verfahren, weil die analytischen Ausdrücke so complicirte Functionen der Dimensionen sind, dass diese nicht mehr direct berechnet werden können; und nur beim rechteckigen Querschnitt ist dies noch möglich, sobald man ein bestimmtes Verhältniss zwischen b und h annimmt; da die Holzstämme in der Regel als Rundholz gegeben sind, so ist $\sqrt{b^2 + h^2} = d$ dem Durchmesser des Stammes also constant. Das zweckmässigste Verhältniss von b zu h ist demnach jenes, welches $b\, h^2 = b\, d^2 - b^3$ zum Maximum macht, also wenn

$$b^2 = {}^1/_3\, d^2$$

$$h^2 = {}^2/_3\, d^2 = 2\, b^2$$

und $b\, h^2 = 2\, b^3$ ist.

Die Projectionen von b und h auf die Diagonale des Querschnitts oder auf den Durchmesser des Stammes nehmen also $^1/_3$ und $^2/_3$ desselben ein, und h ist die Diagonale des Quadrats, dessen Seiten $= b$ sind. Man hat demnach:

$$b^3 = \frac{\mathfrak{P}}{^1/_3\ \varrho}.$$

Mittelst Cubentabellen rechnet sich dieser Ausdruck sehr leicht. Die Bestimmung mittelst des Rechenschiebers bedarf keiner Auseinandersetzung. Endlich kann man auch die *log.* Spirale (Taf. 1) zum Ausziehen der Cubikwurzel benutzen. Man reducire $\mathfrak{P}$ auf einen runden Hebelsarm a, die Einheit, sodass $(^1/_3\ \varrho\ a^2)$ eine runde Zahl Tonnen wird, und bestimme den Winkel, den die zwei Strahlen $\mathfrak{P} : a$ und $(^1/_3\ \varrho\ a^2)$ miteinander bilden; dann folgt aus:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{\mathfrak{P} : a}{(^1/_3\ \varrho\ a^2)},$$

dass der Winkel, den der gesuchte Strahl b mit dem in Länge angenommenen und demnach gegebenen Strahl a bildet, gleich $^1/_3$ jenes Winkels ist.

84. Ein Zahlenbeispiel.

Wie stark müssen die Dimensionen eines Balkens sein, der auf eine lichte Spannweite von 7^m oder $7^m{,}40$ Weite von Auflagermitte zu Auflagermitte, eine gleichförmig vertheilte Last von 0,28 Tn. auf den Meter (Eigengewicht inbegriffen) trägt, wenn seine äussersten Fasern mit nicht mehr als ,06 Tn. auf den □ Ctm. in Anspruch genommen sein sollen.

Wir wollen die Aufgabe auf rechnerischem, auf graphischem Wege und mittelst des Rechenschiebers lösen und beginnen mit dem Rechnen, um Zahlen für die Beurtheilung der Genauigkeit der beiden andern Methoden zu erhalten.

a) Lösung durch Rechnung.

Laut Nr. 48 S. 128 ist das Moment der äussern Kräfte im vorliegenden Fall $= ^1/_2\ pl^2$, das der innern nach der vorigen Nummer $= ^1/_3\ \varrho\ b^3$, ihre Gleichsetzung giebt

$$\mathfrak{P} = ^1/_2\ pl^2 = ^1/_3\ \varrho\ b^3.$$

Die Belastung p ist pro lf. Meter, ϱ pro □Centimeter gegeben,

drückt man daher l in Metern, b in Centimetern aus, so erhält man links das Moment der äussern Kräfte in Metertonnen, rechts das der innern in Centimetertonnen. Verwandelt man daher das Moment der äussern Kräfte links durch Multiplication mit 100 auch in Centimetertonnen, so kann man in:

$$b^3 = \frac{100\, pl^2}{{}^2/_3\, \varrho} = \frac{100 \,.\, 0{,}28 \,.\, 3^2{,}7}{0{,}04} = 9583,$$

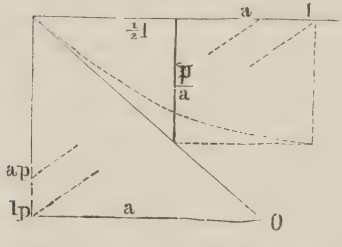
unmittelbar die oben gegebenen Zahlen, sowie wir es gezeigt haben, substituiren und erhält daraus

$$b = \sqrt[3]{9583} = 21{,}24 \text{ Ctm.}$$
$$h = \sqrt{2} \,.\, 21{,}24 = 30{,}04 \text{ Ctm.}$$

b) Lösung auf graphischem Wege.

Für die Basis oder Poldistanz a, auf welche wir (siehe Nr. 83 S. 241) das Moment $\mathfrak{P}$ reduciren, müssen wir wegen des Divisors 3 eine durch 3 theilbare runde Zahl annehmen: wir machen daher die Poldistanz $= a = 3^m$ und tragen sie Fig. 109 im Maassstab von ‚01' auf. Sie bildet mit der verticalen im Maassstab von ‚025 = 1 Tn. aufgetragenen Belastung lp das Kräftepolygon. Die Belastung $lp = 3{,}7 \,.\, 0{,}28 = 1{,}036$ kann man entweder direct, wie es eben geschehen ist, rechnen, oder wenn l vielzifferig wäre, mittelst der beiden rechteckigen ähnlichen Dreiecke, deren bekannte Seiten $a = 3$, $l = 3{,}7$ und $ap = 3 \,.\, 0{,}28 = 0{,}84$ sind, so construiren, wie es in der Figur gezeichnet ist. Die Verticale $\frac{\mathfrak{P}}{a}$ in der Entfernung ${}^1/_2\, l$ von der des Kräftepolygons ist das gesuchte, auf den Hebelsarm a reducirte Moment. Man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man das halbe parabolische Seilpolygon, wie es in der Figur durch punktirte Linien geschehen ist, zeichnet und bemerkt, dass $\frac{\mathfrak{P}}{a}$ wirklich dem Pfeil dieses Seilpolygons gleich ist. Auch geht aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke, deren Seiten im folgenden Verhältniss stehen:

Fig. 109.



$$\frac{\mathfrak{P} : a}{lp} = \frac{{}^1/_2\, l}{a}$$

unmittelbar hervor, dass

$$\mathfrak{P} = {}^1/_2\, p\, l^2 \text{ ist.}$$

Wollten wir nun die Formel am Ende von Nr. 83 S. 241 direct construiren, so würde einerseits die zulässige Spannung auf einen Balken von $a^2 = 9$ □Meter enorm gross und anderseits die Dimension b des Balkens im Verhältniss zu l und a undeutlich klein werden, wir bringen jene Gleichung daher in die Form:

$$\frac{\mathfrak{P} : a}{\frac{10}{3} \cdot \varrho \left(\frac{a}{100}\right)^2} = \left(\frac{10\, b}{a}\right)^3.$$

In derselben ist nun $\varrho \left(\frac{a}{100}\right)^2$ die äusserste zulässige Spannung auf 9 □Ctm. Querschnittsfläche des Balkens oder 0,54 Tn. und der ganze Nenner des ersten Theils $= \frac{10}{3} \varrho \left(\frac{a}{100}\right)^2 = 1{,}8$ Tn.

Es bildet nun auf der *log* Spirale Taf. 1_2 die Fig. 109 construirte Länge $\mathfrak{P} : a$ mit 1,8 Tn. den dreifachen Winkel, den die gesuchte zehnfache Breite mit der angenommenen Basis $a = 3$ M. bildet. Um diesen Winkel genauer zu erhalten und auch in der Meinung, die Fig. 109 sei bei wirklichen Constructionen in einem etwa zweimal grössern Maassstab auszuführen, bestimmen wir auf der Spirale den Strahl, dessen Länge $= 2 \frac{\mathfrak{P}}{a}$ ist. Er fällt auf der Spirale gemessen 0,55 Ctm. über den punktirten Radius Nr. 8 hinaus. Der Strahl von 1,8 Tn., dessen Länge im doppelten Maassstab der Kräfte, also im Maassstab von ,05 = 1 Tn. 9 Ctm. misst, fällt 0,6 Ctm. über den punktirten Radius Nr. 23 hinaus. Nehmen wir nun an, es repräsentire diese Länge von 9 Ctm. als Strahl der Spirale gleichzeitig auch die Länge $a = 3$ M., die wir uns demnach im Maassstab ,03 = 1 M. aufgetragen zu denken haben: so hat der diesem a nächste Strahl, welcher den Winkel, den die oben bestimmten Strahlen miteinander bilden, drittelt, die Länge 10 b. Wir erhalten daher b, wenn wir diese Länge mit dem Maassstab 0,3 = 1 M. messen, nämlich $b = 21{,}2$ Ctm. Ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten $= b$ sind, giebt die Höhe h als Hypothenuse = 30 Ctm.

c) Lösung mittelst des Rechenschiebers.

Die folgende Lösung ist nur möglich, wenn auf dem festen Stab des Instruments die Quadrate und die Wurzeln einander ge-

rade gegenüber stehen, wenn letztere mit Nr. 1 beginnen und mit Nr. 10 aufhören; sie ist dagegen nicht möglich, wenn, wie man es auf den meisten englischen Schiebern unpraktischer Weise findet, die Wurzeln mit 4 beginnen und aufhören, und die Wurzel 1 dem Quadrat 6,25 gegenüber steht. Ferner nehmen wir im Folgenden an, dass die Wurzeln unten, ihre Quadrate oben stehen.

Wegen der Ausziehung der Cubikwurzel kehren wir die bewegliche Zunge um, sodass dann nicht mehr das Verhältniss zweier untereinander stehender Zahlen, sondern das Product derselben constant ist, und bringen zur Berechnung des oben unter a entwickelten Ausdrucks:

$$b^3 = \frac{100 \,.\, 0{,}28 \,.\, 3^2{,}7}{0{,}04},$$

der Wurzel 3,7 die Zahl 2,8 der Zunge gegenüber und finden 4 gegenüber oben die Zahl 9,58 oder 9580, weil ihre Charakteristik $= 2 + 9 - 8 = 3$ ist.

Indem wir nun zum Ausziehen der Cubikwurzel die Zunge so verschieben, dass die 1 statt der 4 der obigen Zahl 9,58 oben gegenüber steht, ist die Wurzel 2,12, welcher auf der Zunge die gleiche Zahl gegenüber steht, die gesuchte Wurzel b; ihre Charakteristik ist $= {}^1/_3 \,.\, 3 = 1$, demnach $b = 21{,}2$ Ctm. Um diese Zahl mit $\sqrt{2}$ zu multipliciren, stelle man ihr auf dem Maassstab der Wurzeln die 2 der Zunge gegenüber, dann findet man der 1 der Zunge gegenüber die Wurzel 3, es ist demnach $h = 30$ Ctm.

Zur Probe kann man der Wurzel 3 die Zahl 21,2 gegenüber stellen, dann muss die 2 der Zunge dem obigen Cubus 9,58 oben gegenüber stehen, weil $9{,}58 = \frac{b\,h^2}{2}$ ist.

Unter den drei eben entwickelten Methoden die Stärken hölzerner Balken zu bestimmen, ist die graphische, die wir eben nur Anstands halber brachten, die wenigst zweckmässigste; die Aufgabe ist gleichsam zu einfach, um lange zu construiren: dagegen ist die letzte Lösung mittelst des Rechenschiebers bei Weitem die zweckmässigste, und es sollten Balkenstärken nie anders bestimmt werden. Sie ist mehr als hinlänglich genau, denn bei Holzstärken kommt es auf 1 Mm. kaum mehr an; sie führt am schnellsten, wir möchten beinahe sagen in gar keiner Zeit, zum Ziel und ist übersichtlich wie keine andere: In jener ersten Lage der Zunge, in welcher ihre Belastung 0,28 der halben Spannweite als Wurzel 3,7

gegenüber steht, stehen auch allen andern Wurzeln als Spannweiten betrachtet, die entsprechenden Belastungen, welche von demselben Balken getragen werden können, gegenüber, und man hat eine förmliche Tabelle vor sich. Also, um nur einige Fälle herauszunehmen, entsprechen den obenstehenden halben Spannweiten die darunterstehenden Belastungen:

2,60	2,80	3,	3,20	3,40	3,60	3,80	4,	4,20	4,40 M.
,568	,490	,426	,374	3,41	,296	,265	,240	,217	,198 Tn.

man sieht also unmittelbar auf dem Rechenstab, wie mit zunehmender Spannweite die Belastung abnimmt und kann daraus entnehmen, wie viel näher die Balken zusammengelegt werden müssen. Für jeden andern Balkenquerschnitt giebt eine andere Zungenlage wieder alle zusammengehörigen Spannweiten und Belastungen.

Wir glaubten in Obigem die Kenntniss des Rechenschiebers und einige Uebung im Operiren mit demselben voraussetzen zu dürfen; eine Beschreibung des Instruments und seiner Behandlung würde weiter geführt haben, als die Grenzen des vorliegenden Werkes gestatten.

85. Verzahnte Balken.

Die Zähne, mittelst denen die Spannungsdifferenzen der einzelnen Stämme, aus denen ein verzahnter Balken zusammengesetzt wurde, von einem auf den andern übertragen werden, widerstehen vermöge ihrer Construction nur in der Richtung der Flächen, die sie verzahnen. Hat man nun den Balken so gestellt, dass P in der durch die Axe gehenden und zur Seitenfläche h des Balkens parallel laufenden Ebene wirkt, so ist die Richtung des Schnittes der zur Seitenfläche b parallelen verzahnten Flächen in der Centralellipse der Richtung von P conjugirt, und die scheerende Kraft in derselben ist das Nr. 78 S. 224 entwickelte σ; wir dürfen uns auf die Bestimmung dieses σ beschränken, wenn wir voraussetzen, dass, wie weiter oben bemerkt wurde, das Holz in allen übrigen Richtungen widerstehen könne.

Bei den einfachen Formen eines rechteckigen Balkenquerschnittes wird die scheerende Kraft jederzeit am leichtesten durch Rechnung bestimmt, wir haben daher diesem Querschnitt die Formel:

$$\sigma = \frac{\sum_{o}^{i} y \triangle F}{k^3 F} \cdot \frac{P}{z}$$

anzupassen. In dieser Formel ist:

σ die scheerende Kraft pro Flächeneinheit in der zur Seitenfläche b des Balkens parallelen Fläche, deren Entfernung von der Axe $= y_i$ ist;

$\sum_{o}^{i} y \triangle F = {}^1/_2 ({}^1/_2 h + y_i)({}^1/_2 h - y_i) b$ das statische Moment der über y_i liegenden Lamellen des Querschnittes bezüglich der Axe;

$k^2 F = {}^1/_{12} h^2 . bh$ (Nr. 69 S. 182) das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes;

$z = b$ die constante Breite des Querschnittes.

Demnach

$$\sigma = \frac{({}^1/_2 h)^2 - y_i^2}{{}^1/_6 h^2} \cdot \frac{P}{bh}$$

oder wenn wir $\frac{2 y_i}{h} = \alpha$ setzen

$$\sigma = \frac{3}{2} (1 - \alpha^2) \frac{P}{bh}$$

Jeder Zahn des verzahnten Balkens übernimmt oder überträgt die scheerenden Kräfte, welche auf die glatte Balkenstrecke zwischen ihm und dem nächsten Zahne treffen würde, mittelst directen Druckes von Zahnfläche auf Zahnfläche. Bezeichnen wir diesen Druck auf die Flächeneinheit mit ϱ und das Verhältniss der Zahndistanz zur Zahntiefe mit β, eine Zahl, die zwischen 10 und 30 variiren kann, so ist offenbar

$$\varrho = \beta . \sigma = \frac{3}{2} (1 - \alpha^2) \beta . \frac{P}{bh}$$

weil die Zahnfläche, die diesen Druck allein überträgt, β mal kleiner ist als die Fläche, auf die sich derselbe sonst scheerend vertheilen würde.

Je kleiner α ist, desto grösser ist auch in dem gleichen Querschnitt die scheerende Kraft; sie ist, wie wir übrigens schon aus Nr. 77 S. 222 wissen, am grössten für die Fläche, die durch die Axe geht; für sie ist $y_i = 0$, demnach auch $(1 - \alpha^2) = 1$.

Ist der Balken statt aus zwei aus drei Stämmen zusammengesetzt, so ist $\frac{2y_i}{h} = 1/3$ und $1 - \alpha^2 = 8/9$. In diesem Fall haben also die Zähne $1/9$ weniger Kraft zu übertragen, als wenn sie sich in der Mitte befänden.

Wäre der Balken aus vier Stämmen zusammengesetzt, so haben die Zähne zwischen den zwei obersten Stämmen, für welche $\frac{2y_2}{h} = 1/2$ ist, nur $1 - 1/4 = 3/4$ der Kraft zu übertragen, welche die Zähne zwischen den beiden mittelsten Stämmen zu übertragen haben.

Da die scheerenden Kräfte direct P proportional sind, so sind sie desto grösser, je grösser dieses P den Balkendimensionen, d. h. dem Moment der ausserhalb des mittelsten Querschnittes wirkenden Kräften gegenüber ist, indem jene Dimensionen durch dieses Moment bestimmt wurden. Sie sind demnach am grössten bei kurzen verzahnten Balken, die schwere Lasten tragen; wie gross sie in solchen Fällen werden können, wollen wir an dem folgenden Beispiel zeigen.

86. Ein Zahlenbeispiel.

Welcher Druck pro Flächeneinheit wirkt zwischen den Zähnen zweier verzahnter Balken, die eine Eisenbahn, welche von Engerth'schen Locomotiven befahren wird, über eine Oeffnung von $3^m,60$ Weite führen. Wie gewöhnlich ist die Entfernung der Zähne gleich der Höhe des Doppelbalkens, und ihre Tiefe gleich $1/5$ der Tiefe des einzelnen Stammes.

Bei 3,6 lichter Spannweite nehmen wir die Entfernung von Auflagermitte zu Auflagermitte zu 4 Meter an, und erhalten bei Vernachlässigung des Brückengewichts dem grossen Druck der Räder gegenüber mittelst Abgreifen auf Taf. 7_2 (siehe Nr. 52 S. 139) oder durch Rechnung das Moment der ausserhalb des Mittelquerschnitts wirkenden Kräfte = 24,7 Metertonnen oder 2470 Cmtn.

Auch bei verzahnten Balken ist das Verhältniss $h = b\sqrt{2}$ das günstigste für Höhe und Breite eines jeden einzelnen Stammes,

da jedoch bei Einhaltung dieses Verhältnisses die totale Höhe des Balkens $= 2\,b\,\sqrt{2} = 2{,}8\,b$ unförmlich hoch werden würde, so giebt man gewöhnlich jedem einzelnen Stamm einen quadratischen Querschnitt; die Höhe eines einzelnen verzahnten Balkens ist dann gleich seiner doppelten Breite, und die zwei Balken rechts und links der Fahrbahn bilden miteinander ein volles Quadrat. Für dieses hat man daher einfach $b = h$ und das Moment der innern Kräfte Nr. 83 S. 237 wird $= {}^1/_6 \,.\, \varrho \,.\, b^3$, nehmen wir $\varrho = 0{,}06$ Tn. pro □Ctm. an, so giebt die Gleichsetzung der innern und äussern Kräfte:

$$2470 = {}^1/_6 \,.\, 0{,}06\; b^3,$$

und hieraus $\quad b = \sqrt[3]{247000} = 62{,}74$ Ctm.

Die Seiten jedes der einzelnen Stämme, aus denen der Balken zusammengesetzt ist, sind daher 31,4 Ctm.

Die ganze scheerende Kraft P oder die Reaction eines Widerlagers ist $= \frac{3}{2} \,.\, 13 = 19{,}5$ Tn., und hieraus ergiebt sich die scheerende Kraft ϱ in der Mitte des Balkens,

$$\sigma = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{b^2} = \frac{3 \,.\, 19{,}5}{2 \,.\, 62^2{,}74} = 0{,}0074 \text{ Tn.}$$

Dieser Kraft pro □Ctm. können die Fibern wohl in jeder Richtung widerstehen. Wenn nun aber diese Kraft auf die Zahnfläche übertragen wird, die laut Aufgabe $10 = \beta$ mal kleiner ist als die Balkenberührungsfläche zwischen zwei Zähnen, und

$$\sigma = \beta \,.\, \sigma = 10 \,.\, 0{,}0074 = 0{,}074 \text{ Tn.}$$

pro □Ctm. wird, so ist die Grenze des Zulässigen vollständig erreicht.

Da σ der scheerenden Kraft P direct proportional ist, so nimmt es mit ihm ab und zu und es gilt von ihm auch Alles, was in Nr. 49 S. 131 über die Aenderung von P gesagt worden ist. Bei einem gewöhnlichen, an seinen zwei Enden aufruhenden Balken sollten also die Zähne in der Mitte, wo P am kleinsten ist, ebenfalls am wenigsten tief gemacht und am weitesten auseinander gestellt werden; in vielen Fällen würde vielleicht hier die Reibung allein der fest zusammengeschraubten Balken zur Uebertragung der Spannungsdifferenzen genügen, auf diese Weise würden auch da, wo das Moment $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ am grössten ist und wo demnach der Balken am wenigsten verschwächt werden darf, dieses auch nicht stattfinden.

Dagegen sollten die Zähne am Widerlager, wo P am grössten ist, am tiefsten eingeschnitten und näher zusammengestellt werden; beides darf auch geschehen, weil hier das Moment am kleinsten, am Ende des Balkens $= 0$ ist, und demnach an dieser Stelle beliebig tief in ihn eingeschnitten werden darf.

Anders verhält es sich bei einem continuirlichen Balken; bei diesem fallen über den Zwischenpfeilern die Maxima von $\mathfrak{P}$ und P, wie wir später sehen werden, zusammen, da sollten die Zähne sehr wirksam sein und gleichzeitig der Balken möglichst wenig verschwächt werden; durch nahe aufeinander folgende und seichte Zähne lässt sich dies vielleicht erreichen.

87. Die Richtung der Zähne.

Bei manchen Verzahnungen kommt es auf die Richtung der Zähne an, weil diese bisweilen so angeordnet werden, dass sie nur in einer Richtung widerstehen können. Man wird aber nie über die Stellung derselben im Zweifel sein, sobald man die Richtung der ausserhalb eines Querschnitts der treffenden Stelle wirkenden Kräfte kennt. Wirkt z. B. P (siehe Fig. 110) in dem angedeuteten Schnitt links aufwärts, wie es zwischen einem linksseitigen Widerlager und dem darauf folgenden Maximalmomentenpunkt der Fall ist: so verursacht es offenbar in dem Verticalschnitt ein Scheeren, das durch die Richtung der Pfeile auf der Verticalen bei C angedeutet ist. Dieses erzeugt aber, weil laut Nr. 78 S. 224 an den aufeinander folgenden Seiten eines rechteckigen Balkenelementes die Richtungen der scheerenden Kräfte streng abwechseln, im Horizontalschnitte die bei D angedeuteten Richtungen der scheerenden Kräfte. Setzt man daher in der zu verzahnenden Fläche des Balkens zwei Pfeile an eine Zahnfläche in der Richtung an, in der sie widerstehen kann, so muss D entsprechend der nach links gekehrte Pfeil dem obern, der nach rechts gekehrte aber dem untern Balken angehören, wodurch die Form der Zähne unzweideutig bestimmt ist.

Fig. 110.

Mit der Richtungsänderung von P bei den Maximalmomentenpunkten ändert sich natürlich auch die Richtung der Zähne. Mit-

unter wird an diesen Stellen, namentlich bei continuirlichen verzahnten Balken der rückwirkend arbeitende Balken ganz durchschnitten, wie es Fig. 111 bei den Pfeilern am untern Balken und in der Mitte an dem obern Balken zeigt.

Fig. 111.

Bisweilen will es durchaus nicht gelingen, aus der Richtung der scheerenden Kraft P die Richtung der Zähne abzuleiten, man glaubt immer eine falsche Richtung zu erhalten. Die zweideutigen Richtungen rühren dann meistens davon her, dass man mit der Verzahnung zwei Zwecke erreichen will. Soll z. B. Fig. 112 ein Balken mit einem Sattelholz verbunden werden, so verlangt die

Fig. 112.

Verkämmung am äussersten Ende des Balkens eine andere Richtung der Zähne als die Kraft P, aber nur so lange, bis die Balken an ihren Enden zu einem einzigen Ganzen miteinander verbunden sind; sobald sie dann so miteinander verbunden sind, dass sie wie ein einziger Balken den ausserhalb eines ihrer Querschnitte wirkenden Momenten und scheerenden Kräften widerstehen, müssen die Zähne wieder die durch P bestimmte Richtung erhalten. Hieraus ergiebt sich die in der Figur dargestellte Form der Verzahnung.

Uebrigens wird man in solchen zweifelhaften Fällen immer am besten thun, Verzahnungen anzuordnen, die nach beiden Richtungen gleichmässig widerstehen können, z. B. mittelst rechteckigen, horizontal liegenden Keilen verzahnen.

88. Maximalspannungen im Innern eines eingemauerten und belasteten Blechbalkens.

Auf Taf. 10 haben wir die im Innern eines eingemauerten Blechbalkens gewöhnlichen Querschnittes wirkenden Kräfte construirt. Da bei einem an seinen zwei Enden aufliegenden Balken

die scheerenden Kräfte P am Widerlager, die Momente $\mathfrak{P}$ aber in der Mitte des Balkens am grössten sind, so haben wir den Balken eingemauert, damit die Maxima der P und $\mathfrak{P}$ zusammenfallen, um zu zeigen: welchen Einfluss die scheerenden Kräfte bei ihrer Zusammensetzung mit den von den Momenten herrührenden Spannungen ausüben.

Taf. 10_1 ist die Ansicht des 6 M. langen, 1,2 M. hohen Balkens, den wir uns mit 4,167 Tn. pro lf. Meter belastet denken.

Taf. 10_2 ist der halbe Querschnitt und enthält noch die Construction aller jener Momente, welche nur von den Querschnittsdimensionen abhängen. Da diese beinahe identisch sind mit den Constructionen von Taf. 8_1, die in Nr. 58 d S. 155, Nr. 71 S. 193 und Nr. 80 S. 231 beschrieben wurden, so wird es genügen, ganz kurz den Gang anzudeuten und nur die Aenderungen etwas ausführlicher zu besprechen.

Bei Eintheilung der Querschnittsfläche Taf. 10_2, deren sämmtlichen Dimensionen in Millimetern eingeschrieben sind, wurden die Flächenlamellen nicht gleich breit gemacht, sondern man liess ihre Grenzen möglichst mit den Berührungsflächen der einzelnen Theile, aus welchen der Querschnitt zusammengesetzt ist, zusammenfallen. Die Mittelplatte bildet die drei ersten Lamellen 1 2 3; 1 und 2 sind 0,20; 3 nur 0,19 hoch; die Lamelle 4 besteht aus dem an der Mittelplatte anliegenden, 5 aus den senkrecht auf ihr stehenden Schenkeln der beiden Winkeleisen; 6 ist die Kopfplatte. Die Lamellen 3 und 4 greifen übereinander weg; da verticale Berührungsflächen unzulässig sind, so haben wir im Einklang mit der Wirklichkeit angenommen, sie berührten sich in der Horizontalebene, welche durch die Mitte der Nieten geht und in Taf. 10_2 mit der Verticallinie 4 zusammenfällt.

Die Basis a zur Reduction der Flächen wurde zu 2 Ctm. Breite angenommen, das $\triangle z'$ ist daher bei den Lamellen 1 2 3 und 6 gleich der halben Länge dieser Platten, und bei den Lamellen 4 und 5 gleich $2 \cdot \frac{1,2}{2}$ mal der Länge des einfachen Schenkels des betreffenden Winkeleisens. Die Totallänge messen wir als 74,5 Ctm. ab, was einer halben Querschnittsfläche von 149 und einer ganzen von 298 □Ctm. entspricht. Die Bedeutung der Zahlen a und $^1/_2 F$ ist Taf. 10_2 eingeschrieben.

Das erste Polygon, das die statischen Momente z'' giebt, wurde

mit der Basis $b = 0{,}5$ M. construirt. Die Fläche ab, d. h. die Einheit, auf welche jetzt ϱ reducirt ist, misst daher 100 □Ctm.

Das zweite Polygon der Trägheitsmomente hat zur Basis die halbe Balkenhöhe c. Die Eckpunkte dieses Polygons liegen auf Linien, deren Entfernung von der Axe $= i + \frac{k^2}{i}$ ist (siehe Nr. 67 S. 178). Dieser Ausdruck wurde auf der Balkenmitte construirt, die Bedeutung der einzelnen Linien für die erste Lamelle eingeschrieben, und wir haben nur noch zu bemerken, dass k laut Nr. 69a S. 182 $= 0{,}289$ der ganzen Lamellenhöhe ist. Die halbe Höhe dieses Polygons ist $= z'''_6$ und demnach das Moment der innern Kräfte $= 2 \,.\, (\varrho\, ab)\, z'''_6 = 200\, \varrho \,.\, z'''_6$.

Um dieses $\varrho\, ab$ direct als Ordinate des Seilpolygons für die verschiedenen Querschnitte zu erhalten, wurde Taf. 10_1 als Poldistanz des Kräftepolygons P, die doppelte Höhe des ganzen Polygons also $4\, z'''_6 = 2\, z'''_{12}$ angenommen. Da der Maassstab von Taf. 10_1 zu dem von Taf. 10_2 wie 0,003 : 0,01 sich verhält, so ist die absolute Länge von $2\, z'''_{12}$ in Taf. $10_1 = 4 \,.\, \frac{3}{10}\, z'''_6 = 1{,}2\ z'''_6$ von Taf. 10_2. Zufälliger Weise ist z'''_6 genau $= c$, also $2\, z'''_{12}$ genau gleich der doppelten Höhe des Balkens. Da wir nun Taf. 10_1 den Balken in Lamellen getheilt haben, deren Länge gleich der Höhe des Balkens ist: so liegt der Pol des Kräftepolygons am Ende der zweiten Lamelle, wenn die Gewichte in der Verticalen des Widerlagers aufgetragen werden, wie es geschehen ist. Nach Obigem ist das Gewicht jeder der fünf Lamellen $= 1{,}2 \,.\, 4{,}167 = 5$ Tn. und die Totalbelastung des ganzen Balkens $= 25$ Tn.

Die Ordinaten des mit diesem Kräftepolygon construirten Seilpolygons sind, wie es bei dem Schnitt III, IV Taf. 10_1 angedeutet ist, $= {}^1/_2\, \varrho\, ab$, weil sie mit $2\, z'''_{12}$ multiplicirt, das Moment der im Innern des Querschnitts wirkenden Kräfte geben müssen.

Die Belastung des Balkens P wurde so gewählt, dass die Spannung in der äussersten Faser am Widerlager, wo der Balken am stärksten in Anspruch genommen, die übliche, von ungefähr 0,6 Tn. pro □Ctm., 50 ϱ also $= 30$ Tn. sei.

Zur Construction von $\sigma\, ab$ wurde ganz so verfahren, wie es Nr. 80 S. 231 erklärt ist. Vom Endpunkt der letzten Basis c Taf. 10_2 aus wurde die Linie gezogen, deren Abscissen zu den

Ordinaten im Verhältniss $\frac{b}{z'''_{12}}$ (oder $\frac{^1/_2 b}{z'''_6}$ wie es eingeschrieben ist) stehen. Die Punkte, deren Ordinaten $= P$ sind, bestimmen die Abscissen dieser P, sie sind $= \frac{b}{z'''_{12}} P$, wie es für die Kraft P_{IV} eingeschrieben ist; diese Ordinaten werden dann von dem Strahlenbüschel des zweiten Kräftepolygons in Segmente, die $= \frac{b\, z''}{z'''_{12}\, c} P$ sind, getheilt. Und diese Segmente sind die Ordinaten für die Curven der scheerenden Kräfte in den Figuren Taf. $10_{3\,4}$. Die Höhe des Punktes 23 z. B. wurde auf der Grenze der Lamelle 2 und 3 aufgetragen. Die einzelnen Curven tragen die Nummern des treffenden Schnittes.

Um schliesslich ($\sigma\, ab$) zu erhalten, haben wir diese scheerenden Kräfte nur mehr mit $\frac{a}{z}$ zu multipliciren. Es geschah mittelst der punktirten Linien, die durch die Endpunkte der Ordinaten in den Curven der scheerenden Kräfte gezogen wurden und deren Projection auf die Abscissenaxe sich zu diesen Ordinaten wie 1 zu 2 und wie 3, 4 zu 2 verhalten.

Die Verhältnisse 25 : 2 und 40 : 2 für die Lamellen 5 und 6 wurden nicht mehr construirt, weil sie $\sigma\, ab$ geben, die so klein sind, dass sie bei der Zusammensetzung mit den $\varrho\, ab$ diesen gegenüber verschwinden. Diese Linien schneiden auf der Balkenaxe $\sigma\, ab$ in der Lage ab, in der sie Fig. 104 S. 229 mit $\varrho\, ab$ zusammenzusetzen sind, was ganz dieser Figur und den auf Taf. 8_1 gezeichneten Constructionen entsprechend geschah.

Taf. 10_4 wurde für den Schnitt II III und den Punkt 2 3 der Constructionskreis gezeichnet und die Längen $\varrho\, ab$ und $\sigma\, ab$ eingeschrieben. Für die Punkte, bei denen die Metalldicke plötzlich ab- oder zunimmt, hat man natürlich die Construction zweimal auszuführen, einmal für die grössere und einmal für die kleinere Metalldicke, wie es Taf. 10_3 für den Punkt 3 4 des Widerlagerschnittes angedeutet ist. An diesen Punkten findet also auch eine plötzliche Zunahme der Maximalspannungen statt. Ist der Balken kurz und sind in Folge dessen die scheerenden Kräfte verhältnissmässig gross, so kann die Maximal-Inanspruchnahme bei diesen Verengungen grösser als bei den äussersten Fasern sein. Bei

den Taf. 10 gewählten Dimensionen findet dies für alle Schnitte mit Ausnahme des Widerlagerschnittes statt, für diesen ist die Spannung in der äussersten Faser 62,2 Tn., bei der Verengung 60,7; dagegen bei dem Schnitt IV V 40,8, in der äussersten Faser und 40 Tn. bei der Verengung auf 100 □Ctm. Bei den Schnitten IV...I wird dann die Spannung bei der Verengung immer noch grösser im Verhältniss zu der in der äussersten Faser.

Bei dem Zusammensetzen der Kräfte ($\varrho\ ab$) und ($\sigma\ ab$) erhält man auch an den Taf. $10_{3\,4}$ angedeuteten Stellen den Winkel δ, um welchen die Maximalspannungen und die Maximalpressungen von der Horizontalen abweichen. Diese Richtungen und die Normalen auf sie wurden Taf. 10_1 als Kreuzchen auf die entsprechenden Schnittlinien getragen und dienten in der Nr. 82 S. 236 angedeuteten Weise zum Verzeichniss der Trajectorien, welche die Richtungen angeben, in welchen das Material nur absolut, nur rückwirkend und nicht scheerend in Anspruch genommen ist. Die zwei verschiedenen Constructionen der ϱ und σ bei den plötzlichen Veränderungen der Metalldicke geben natürlich auch zwei verschiedene Werthe für δ (siehe Taf. 10_3 Punkt 3 4 des Widerlagerschnitts); die Differenz derselben ist der Winkel, welchen die Linien miteinander bilden, denen sich die Trajectorien auf der Taf. 10_1 einpunktirten Nietenlinie der Winkeleisen anschmiegen. Der Unterschied in der Form der Trajectorien bei vorherrschenden scheerenden oder vorherrschenden spannenden Kräften spricht sich am deutlichsten in der Form der Maschen aus, welche jene bilden. Diese Maschen sind da, wo die Spannungen $= 0$ sind und nur scheerende Kräfte vorhanden sind, also am Ende des Balkens vollkommene Quadrate. Bei dem Widerlager sind sie langgezogene Vierecke, die sich in Parallelstreifen verwandeln würden, wenn die scheerenden Kräfte $= 0$ wären.

Die Richtungen, in welchen die scheerenden Kräfte ein Maximum sind, halbiren die rechten Winkel, welche die Trajectorien miteinander bilden. Die Grösse dieses Maximums wird auch durch die Ordinaten der Linie der Maximalmomente in Bezug auf die Linie der $^1/_2\ \varrho\ ab$ angegeben (Nr. 81 S. 232). Sie ist immer kleiner als die Maximalspannung und kommt deshalb nie in Betracht, denn die Nieten z. B. haben nicht dieser Kraft, sondern einfach nur dem σ zu widerstehen, weil nur parallel zur Axe so geschnitten werden kann, dass keine andern Theile als die Nieten getroffen werden.

Unter der Voraussetzung, dass die Nieten in den verschiedenen Reihen gleich weit auseinander stehen, sind die der Axe zunächst stehenden, also diejenigen, welche die Winkeleisen mit der Seele verbinden, am stärksten in Anspruch genommen, sie haben der scheerenden Kraft im Schnitt 3 4 zu widerstehen. Die entsprechende Ordinate $\frac{b\,z''_3}{z'''_{12}\,c}\,P$ wurde im Widerlager-Schnitt (Taf. 10_3), wo diese scheerende Kraft offenbar am grössten ist, punktirt; man gelangt nun wohl immer am leichtesten zur Entfernung $\triangle x$ der Nieten an dieser Stelle, deren Querschnitt $\triangle F$ man angenommen hat, indem man ausdrückt, dass dieser der scheerenden Kraft (siehe Nr. 77 S. 221)

$$\triangle Q = P\,\frac{z''_3}{c}\,.\,\frac{\triangle x}{z'''_{12}} = \left(\frac{b\,z''_3}{z'''_{12}\,c}\,P\right)\frac{\triangle x}{b},$$

zu widerstehen habe. Bezeichnet man z. B. die Kraft, mit der sie scheerend widerstehen kann, mit σ pro Flächeneinheit, so ist diese pro Niete, weil jede derselben zweimal geschnitten wird, auch gleich

$$\triangle Q = 2\,\sigma\,\triangle F = \left(\frac{b\,z''_3}{z'''_{12}\,c}\,P\right)\frac{\triangle x}{b}$$

Aus dieser Gleichung wird man $\triangle x$ wohl immer am leichtesten durch Rechnung bestimmen. Im vorliegenden Fall z. B. greift man $\frac{b\,z''_3}{z'''_{12}\,c}\,P = 9$ Tn. ab. Nimmt man dann $\triangle F$ den Flächeninhalt 2 Ctm. starker Nieten zu 3,14 □Ctm., und den Coefficienten der scheerenden Festigkeit zu 0,6 Tn. pro □Ctm. an, so erhält man aus

$$2\,.\,0{,}6\,.\,3{,}14 = 9\,.\,\frac{\triangle x}{50}$$

$$\triangle x = 21 \text{ Ctm.}$$

Also könnten solche Nieten bei einer Entfernung von 21 Ctm. noch den scheerenden Kräften widerstehen.

Bezüglich der Nieten wollen wir hier noch bemerken, dass eigentlich der Inhalt, den sie in den Querschnitten einnehmen, bei Bildung der $\triangle z'$ hätte abgezogen werden sollen. Es geschah nicht, weil wir eigentlich keinen wirklichen Balken vor Augen hatten, sondern nur zeigen wollten, wie sich die Maximalspannungen bei den plötzlichen Querschnittsänderungen mit

ändern, und hierfür glaubten wir einen regelmässigen Querschnitt ohne die zufälligen Nietenlöcher vorziehen zu müssen.

Zum Schluss wollen wir noch sehen, wie die gewöhnliche approximative Rechnung mit den obigen Resultaten stimmt.

Für den Querschnitt am Widerlager ist:

Das Moment der äussern Kräfte nach Nr. 48 S. 128 = $^1/_2 p l^2 = 3 \,.\, 25 =$ 75 Mtn.

Die Höhe des Balkens, d. h. die Entfernung der Schwerpunkte seines obern und untern Streckbaums, deren Lage eingeschätzt wurde = 1,10 Ctm.

Demnach der Druck und die Spannung in jedem derselben $= \frac{75}{1{,}1} =$ 68 Tn.

Diesem widersteht die Querschnittsfläche der Streckbäume:

die Platte mit	40	□ Ctm.
die Winkeleisen mit	49,8	„
$^1/_6$ der Seele (Nr. 83 S. 240)	9,8	„
Totalfläche:	99,6	□ Ctm.

Demnach beträgt die Spannung im Kopf und Fuss: 0,68 Tn. (0,06 oder $^1/_{10}$ mehr als die wirkliche Maximalspannung.)

Die Summe der ausserhalb des Widerlager-Querschnitts wirkenden Kräfte ist $P = p l =$ 25 Tn.

Um ihr zu widerstehen sind Nietenquerschnitte nöthig $P : \sigma \triangle E = \frac{25}{0{,}6 \,.\, 3{,}14} =$ 13 Stück.

Demnach müssen, weil jede Niete zweimal geschnitten wird, laut Nr. 77 S. 222 auf die Länge von 1,20 Meter 6,7 Nieten treffen, und ihre Entfernung beträgt 16 Ctm. (statt 21 wie oben).

Die allgemein übliche approximative Rechnung gab daher für die Maximalspannung in der äussersten Faser sowohl als auch für die scheerenden Kräfte, denen die Nieten zu widerstehen haben, grössere Kräfte, als der Kräfteplan (Taf. 10). Es rührt dies daher, dass beide Arten Kräfte reciproke Funktionen von h, der Entfernung der Stossmittelpunkte des Kopfes und Fusses des Balkens sind. Da nun dieser die kleinere Schwerpunktsdistanz substituirt

wurde, so mussten nothwendiger Weise die Kräfte grösser werden als sie wirklich sind.

Man erhält daher zu starke Dimensionen, wenn der Bestimmung dieser die approximativ gerechneten Kräfte zu Grunde gelegt werden; in der Praxis ist dies durchaus ohne Nachtheil, will man jedoch genauer zu Werke gehen oder sich von dem Wirken aller am Balken wirkenden Kräfte Rechenschaft ablegen, so muss der Kräfteplan (Taf. 10) gezeichnet werden.

Viertes Kapitel.

Krahnen.

89. Die äusseren Kräfte an krahnenartigen Verbindungen.

Als Beispiele von Balken, welche gleichzeitig mit den scheerenden Kräften und Momenten auch noch Pressungen und Spannungen zu widerstehen haben, wollen wir hier die an Krahnen oder krahnenartigen Verbindungen wirkenden Kräfte untersuchen.

Am leichtesten gelangt man zu den äusseren Kräften der Fig. 113 oder 115 S. 259 ähnlichen Constructionen, welche zu irgend einem Zwecke eine Last P frei zu tragen haben, ohne dass jenseits derselben eine Unterstützung vorhanden wäre: wenn man das Gleichgewicht der am verticalen Pfosten oder an der Wendesäule wirkenden Kräfte ausdrückt, weil an diesem Constructionstheil die meisten Kräfte, im vorliegenden Fall deren vier wirken.

Die Kräfte 1 und 2 erhält man durch directe Zerlegung des Gewichtes der Last P in dem Punkte A, in welchem die Richtungslinie von P die Strebe 2 in Fig. 113, das Zugband 1 in Fig. 115 schneidet. Da an dem hinausragenden Balken die drei Kräfte $P\,1\,2$ im Gleichgewicht sind, so müssen sich alle drei in einem Punkte schneiden, wodurch die noch unbekannte Richtung 1 in Fig. 113 oder 2 in Fig. 115 bestimmt wird. In den Kräftepolygonen (Fig. 114 und 116) hat man daher durch die Endpunkte von P nur zwei

Parallellinien zu 1 und 2 zu ziehen, um die entsprechenden Kräfte zu erhalten. Die Kraft P wurde nur punktirt, weil sie nicht selbst am verticalen Pfosten wirkt.

Am verticalen Pfosten wirken ferner noch die Kräfte 3 und 4, welche mit 1 und 2 im Gleichgewicht sein müssen. (In Fig. 116 wurden aus Versehen die Zahlen 3 und 4 vertauscht, und in Fig. 113 ist statt D, B zu setzen.) Die Mittelkräfte je zweier dieser Kräfte müssen daher in Lage und Grösse entgegengesetzt sein. Die Mittelkraft von 1 und 2 aber ist P, aus deren Zer-

Fig. 113.

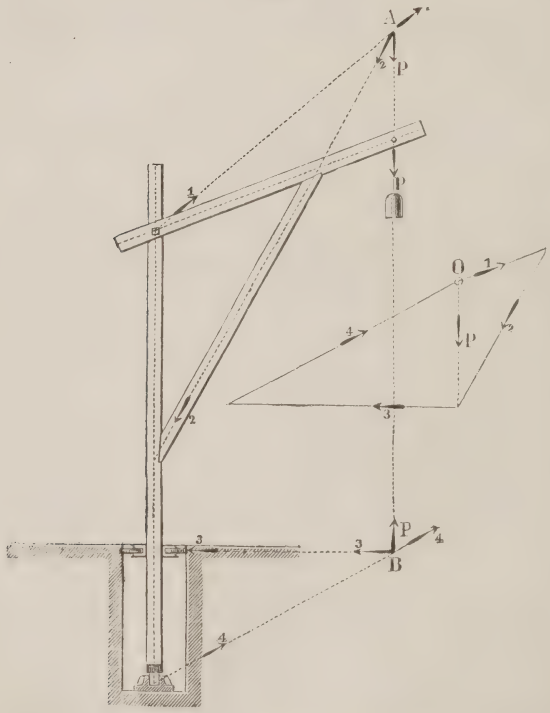


Fig. 114.

legung sie entstanden ist; demnach müssen sich auch 3 und 4 auf der Richtungslinie von P bei B schneiden; ist daher die Richtung der einen derselben 3, z. B. derjenigen, welche einen Rollenwiderstand darstellt, gegeben: so ist es dadurch auch die Richtung der andern, welche in der Regel einen Zapfen- oder Pfannenwiderstand darstellt. Die Linie AB kann also in den Fig. 113 und 115 das Seilpolygon der an den verticalen Pfosten wirkenden Kräfte darstellen. Die Kräftepolygone sind Fig. 114 und 116.

Der Punkt B kann nicht willkürlich angenommen werden. Die Richtungslinie der Kraft 4 darf um nicht mehr als um den Reibungswinkel φ des Zapfens an den Wänden der Pfanne (Fig. 117 S. 261) von der Normalen zum Zapfenhals abweichen, denn wenn die Abweichung bedeutender wäre, so würde, wie wir im letzten achten Ab-

Fig. 115.

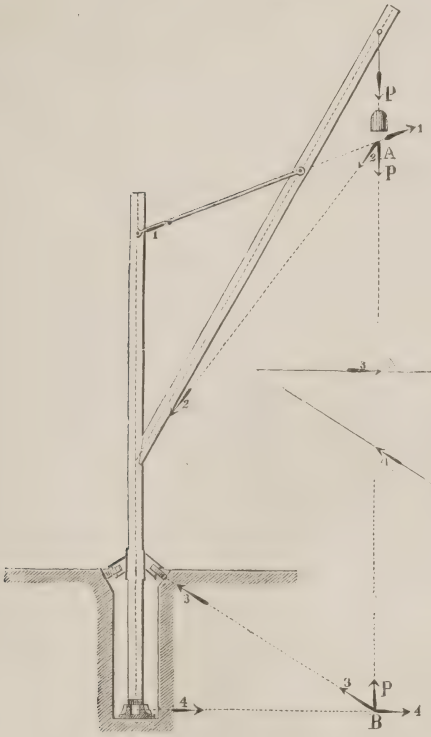
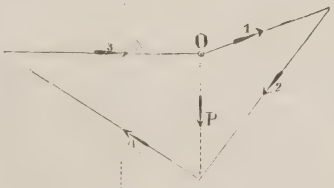


Fig. 116.



schnitte (Nr. 154) beweisen werden, das Organ der Kraft 4, die Pfanne, abrutschen. Die äusserste Stellung der Rolle wäre dann durch den Winkel φ der gleitenden Reibung derselben auf den Mantel, der ihre Bahn bildet, gegeben, so dass in Fig. 117 Grenzlagen dargestellt sind. Es wird wohl immer $\varphi_1 > \varphi$ sein.

90. Die äusseren Kräfte an Krahnen.

Bei Krahnen, welche nicht eine Last nur so hinaushängen, sondern bei denen diese Last auch noch gehoben und gesenkt wird,

muss die Spannung der Seile an den verschiedenen Constructionstheilen berücksichtigt werden, weil diese nahezu so gross als die Kraft P selbst werden kann. In diesem Falle thut man am besten, die Kräftepolygone gerade so, wie in Fig. 114 und 116 zu construiren; man wird finden, dass sich jede einzelne Kraft derselben aus einer oder zwei Seilspannungen und der des entsprechenden Constructionstheiles in Fig. 113 oder 115 zusammensetzt, dass aber die Form des Kräftepolygons im Allgemeinen dieselbe bleibt.

Schneidet man das Seil oder die Kette in dem Krahn Fig. 117 zwischen je zwei Rollen und ersetzt es durch zwei gleiche Spannungen entgegengesetzter Richtung, so sind alle Spannungen 1 2 3 4 von vorn herein dadurch bekannt, dass die Mittelkraft der beiden ersten gleich P (siehe Fig. 118) und jede folgende um die Ketten oder Seil- und um die Rollenreibung, d. h. wenige Procente grösser als die vorhergehende sein muss. Die Kraft P wird also jetzt in Fig. 118 durch 1 und 2 ersetzt. Die Kraft 1 von Fig. 114 und 116 wird durch 3 und 5 der Fig. 118 ersetzt. Man erhält daher die Kräfte 5 und 6, wenn man 3, wie es angedeutet ist, in Richtung und Grösse aufträgt und durch den Anfangspunkt von 1 und den Endpunkt von 3 die Parallelen 6 und 5 zieht.

Die Widerstände der Rollen und Pfannen 7 und 8 bestimmen sich wie früher. Es ist auch in der vorigen Nummer schon angedeutet worden, dass die Lage der Rolle 7 eine Grenzlage ist und dass, wenn sie noch steiler stände, der Krahn dem Zug P folgend ausgleiten würde.

Die sämmtlichen Kräfte, welche am Krahn wirken, sind nun bestimmt; das Seilpolygon, das die am verticalen Pfosten wirkenden Kräfte verbindet, ist die punktirte Linie $C\,5\,4\,A\,B$, deren einzelne Strecken parallel mit den entsprechenden Mittelkräften in Fig. 118 laufen; also $C\,5$ parallel mit (4 3) (Fig. 118); 5 4 parallel mit (4 3 5); $4\,A$ parallel mit $(4, 4\,3\,5) = (3\,5)$; und $A\,B$ parallel mit $(3\,5\,6) = P$. Die Richtungen dieser Seilpolygonseiten und die Spannungen in denselben, wie wir sie eben nebeneinander gestellt haben, geben in Richtung und Grösse die Mittelkraft der ausserhalb eines jeden, durch den verticalen Pfosten geführten Schnittes wirkenden Kräfte, für alle Strecken zwischen ihren einzelnen Angriffspunkten.

Es liegt in der Natur der Krahnen, dass einerseits die Mittelkraft der Strebe und des Zugbandes, andrerseits die des beinahe

immer vorhandenen Zapfen- und Rollenwiderstandes gleich der zu heben gegebenen Last seien; es werden also immer je zwei dieser zusammengehörigen Kräfte durch die zwei Dreiecke mit der gemeinschaftlichen Seite P in den Kräftepolygonen (Fig. 114, 116 und 118) bestimmt werden können; es wird immer möglich sein, die-

Fig. 117.

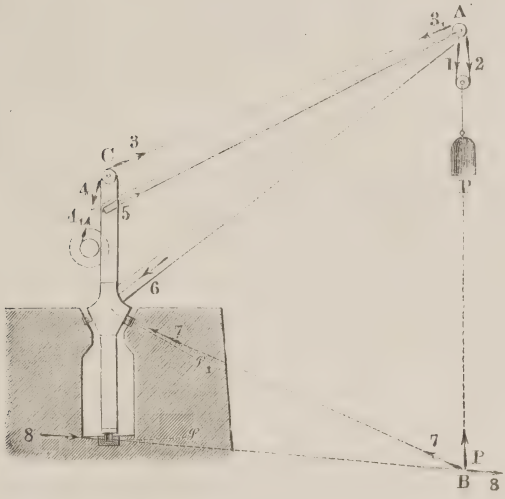
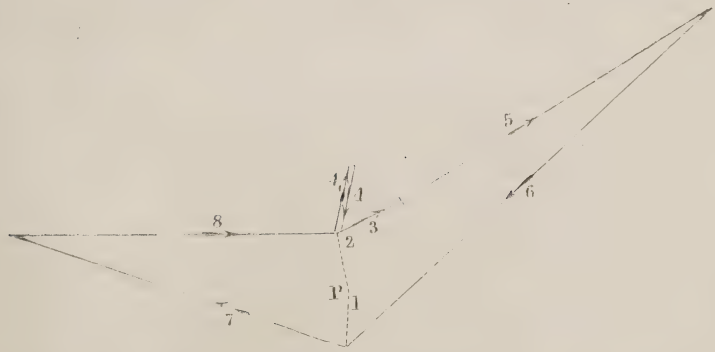


Fig. 118.



selben als Vierecke in der Zusammensetzung dieser Figuren zu construiren, auch wenn die Reihenfolge der Angriffspunkte nicht mehr dieselbe bleibt, wie es z. B. der Fall ist, wenn die verticale Säule sich nicht, wie der besseren Uebersicht wegen angenommen wurde, in der Mauer dreht, sondern als Zapfen fest steht und sich

also der Krahn um sie dreht (siehe Fig. 119). In derselben tragen alle gleichartig wirkenden Kräfte denselben Index, wie in Fig. 117, und zur ersten Bestimmung der am Krahn wirkenden Kräfte wird man nun am zweckmässigsten das Kräftepolygon genau gerade so, wie es in Fig. 118 geschah, construiren und wie es Fig. 120 durch den punktirten Theil der Figur angedeutet ist. Weiter könnte es

Fig. 119.

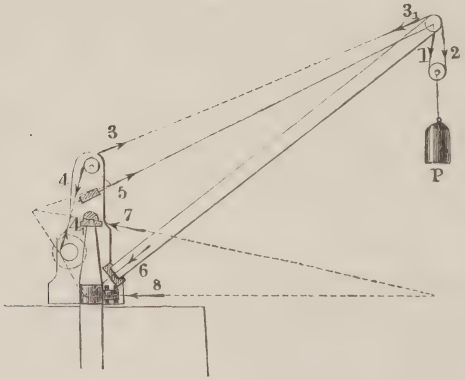
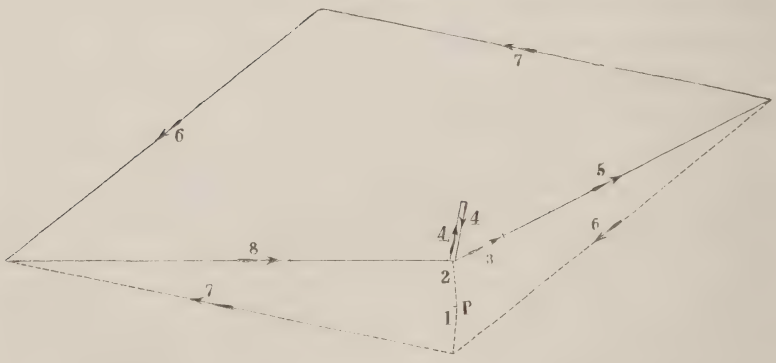


Fig. 120.



sich auch darum handeln, die Kräfte zu ermitteln, die ausserhalb der verschiedenen Schnitte wirken, welche durch die zwei Seitenplatten geführt werden können; letztere umhüllen oft in der Art den verticalen Pfosten, dass sie gleichsam das Gehäuse des Krahnens bilden, und könnten z. B. aus möglichst schwachem Blech hergestellt sein, so dass die an ihm wirkenden Kräfte berücksichtigt werden müssten. Dann müssten diese in der Reihenfolge

zusammengesetzt werden, in der sie an diesen Blechtafeln aufeinander folgen, also nach einander $4\,3\,5\,7\,4_1\,6\,8$: und diese Folge zeigt der ausgezogene Theil der Fig. 120, durch den also die Grösse und Richtung aller dieser Kräfte gegeben ist. Um die Lage derselben zu erhalten, hat man sie in Fig. 119 nur durch das Seilpolygon mit einander zu verbinden, welches fein punktirt wurde und in dem die Strecken $3\,5$, $5\,7$, $7\,4_1$, $4_1\,6$ parallel laufen mit den Mittelkräften $4\,3$, $4\,3\,5$, $4\,3\,5\,7$, $3\,5\,7$. Die Richtung und Lage der letzten Seite $3\,5\,7\,6$ fällt mit 8 zusammen, und das Polygon erscheint geschlossen, wie es beim Gleichgewicht sein soll.

91. Die innern Kräfte, welche in den einzelnen Theilen der Krahnen wirken.

Nachdem alle äussern Kräfte bestimmt sind, welche an den einzelnen Theilen des Krahns wirken, ist es nicht schwer, diese so zu zerlegen, dass ihnen die innern Kräfte entgegengesetzt werden können. Die Streben 2 in Fig. 113 und 6 in den Fig. 117 und 119 sind nur rückwirkend; die Zugbänder 1 in Fig. 115 und 5 in Fig. 117 und 119 sind nur absolut in Angriff genommen. Die sie drückenden und spannenden Kräfte vertheilen sich gleichförmig über die Querschnitte.

Die vorstehenden die Last P tragenden Balken der Fig. 113 und 115 sind in Anspruch genommen:

1) durch eine unendlich ferne Kraft das Moment von P für jeden Schnitt jenseits des Punktes, in welchem die Strebe oder das Zugband den Balken stützen; durch die Momente der Kräfte 1 in Fig. 113 und 2 in Fig. 115 diesseits jenes Punktes.

In jenem Punkte selbst sind diese Momente gleich gross und am grössten. Die Spannungen und Pressungen, welche sie verursachen, erhält man wohl am einfachsten durch Reduction dieses Momentes auf den Hebelsarm z'''_n (Nr. 88 S. 252), wenn der Balken ein Blechbalken ist indem man das Dreieck, welches auf der Figur selbst von diesem Stützpunkte aus die Kraft P oder die Kräfte 1 oder 2 projicirt auf die Basis z'''_n verwandelt. Ist der Balken ein vierkantig hölzerner, so wird man nach Nr. 84 S. 241 leichter rechnen und das Moment durch $\frac{1}{6} b h^2$ dividiren, wodurch man diese gleich grossen Spannungen und Pressungen ϱ erhält.

2) durch einen sich gleichförmig über den ganzen Balkenquerschnitt vertheilenden Druck auf der Seite dieser Kraft. Man erhält ihn, indem man P parallel zum Balken und senkrecht auf ihn zerlegt; die erste Seitenkraft ist dieser Druck. Auf der Seite der Wendesäule wird der Balken in Fig. 113 durch die Seitenkraft von 1 gespannt, in Fig. 115 aber durch die von 2 gepresst, wenn diese Kräfte wie P zerlegt werden.

3) durch die auf dem Balken senkrecht stehenden Seitenkräfte, die man bei den Zerlegungen unter 2) erhalten hat. Ist der Balken ein vierkantig hölzerner, so können diese Kräfte nach Nr. 83 (S. 238) vernachlässigt werden; ist er ein Blechbalken, so wird mittelst dieser Seitenkräfte wie auf Taf. 8 und Taf. 10, σab bestimmt und mit dem oben bestimmten ϱab zusammengesetzt.

Die oben angedeuteten Zerlegungen sind auch bei jedem einzelnen Schnitte, der durch die Wendesäule geführt werden kann, vorzunehmen. Durch die Kräftepolygone und durch die unpunktirten Seilpolygone kennt man Grösse, Richtung und Lage der Mittelkraft aller ausserhalb eines solchen Schnittes wirkenden Kräfte, und für jede, sowie für jeden Schnitt wiederholen sich die oben aufgezählten drei Zerlegungen.

Wie aber alle diese Zerlegungen auszuführen und wie dann die an den einzelnen Querschnittselementen eines solchen auf so verschiedene Weise in Angriff genommenen Balkens wirkenden Kräfte zu bestimmen seien, wollen wir an dem Blechkrahn auf Taf. 11 zeigen.

92. Construction aller an einem Blechkrahn wirkenden Kräfte.

Der auf Taf. 11 abgebildete Blechkrahn besteht nur aus einem einzigen gekrümmten Balken. Da an den Schnitten, die durch ihn geführt werden, Kräfte verschiedener Intensität in den verschiedenartigsten Richtungen bezüglich der Balkenaxe wirken, so ist diese Balkenform besonders dazu geeignet, zu zeigen, auf welche Weise die im Innern wirkenden Kräfte construirt werden können; es geschah dies für die neun mit römischen Ziffern bezeichneten Schnitte, welche durch den Balken senkrecht auf dessen Axe geführt wurden.

Das Gewicht P, das er soll tragen können, wurde zu 10 Tn. angenommen; der Haken, an dem er befestigt wird, ist oben mit einem gezahnten Rädchen versehen, um das sich eine Gall'sche Kette schlingt, die so einen einfachen Flaschenzug bildet. Das eine Ende dieser Kette ist am Kopf des Krahns befestigt, das andere aber wird mittelst einer Rolle dort, und zweier weiteren Rollen im Innern des Krahns zum Zahnrad des Hebezeugs geleitet, durch welches sie nachgelassen und angezogen wird, um sich nachher, so wie es durch die punktirte Linie angedeutet ist, im Krahn selbst zusammen zu legen. Die Drehvorrichtung unten bedarf keiner weitern Erklärung. Nur wollen wir bemerken, dass der im Mauerwerk steckende untere Theil des Krahns eigentlich kürzer ist, als es praktisch zulässig wäre; der Mangel an Blatthöhe verhinderte aber, ihn länger zu machen.

Nach einer ersten approximativen Annahme der Gewichte wurden die Dimensionen festgestellt und dann alle Gewichte wie folgt berechnet und in Taf. 11_2 auf der Verticalen im Maassstabe von ,002 gleich 1 Tn. aufgetragen.

			Kilogr.
k	Gewicht des Hakens und der Kette		150
1	„ „ Krahnkopfes jenseits des Schnittes I		350
2	„ „ Krahns mit Kette zwischen I und II		740
3	„ „ „ „ „ „	II und III	223
4	„ „ „ „ „ „	III und IV	936
5	„ „ „ „ „ „	IV und V	268
6	„ „ „ „ Hebezeug „	V und VI	1260
7	„ „ „ „ „	VI und VII	456
8	„ „ „ „ „	VII und VIII	328
9	„ „ „ „ „	VIII und IX	292
10	„ „ „ „ „	IX und X	247
		Totalgewicht	5250

Die Last P mit dem Gewicht der Kette und des Hakens k zerlegt sich in die zwei Kettenspannungen s' und s'', die statt $P + k$ eingezeichnet sind und auf die dann die übrigen Gewichte folgen. Man erhält nun in Richtung und Grösse die ausserhalb eines jeden Schnittes wirkenden Kräfte, wenn man zu den schon aufgetragenen Gewichten noch die treffende Kettenspannung s addirt. Alle diese Spannungen sind bekannt, wenn der Reibungscoefficient über jeder Rolle gegeben ist. In unserm Beispiel wurde die Reibung zu 0,04

angenommen; es verhalten sich demnach je zwei aufeinander folgende s wie 1 : 1,04.

Verbindet man die Endpunkte aller s mit einander, so erhält man das Kräftepolygon, in welchem die Kräfte in der Ordnung auf einander folgen, in der man sie zusammen zu setzen hat.

Versucht man in Taf. 11_1 die Kräfte direct zusammen zu setzen, d. h. P von 1 bis zu s''' zu verlängern, dann zusammen zu setzen u. s. f., so fallen die Schnitte sehr bald über das Blatt hinaus und in's Unendliche für die Verbindungen der parallelen Kräfte 6 u. d. f., für welche keine schiefen Kettenspannungen mehr vorhanden sind. Wir haben daher zwischen die erste und zweite Seilpolygonseite, wie bei der Zusammensetzung paralleler Kräfte (Nr. 47 S. 123), die Horizontalspannung H eingeführt, die wir uns in einer Horizontallinie unmittelbar oberhalb des Krahns wirkend dachten und im Kräftepolygon oben an $P + k$ aufgetragen haben.

Indem wir diese erste Seilspannung H mit allen Kräften nach den allbekannten Regeln zusammen setzen, erhalten wir das Polygon $s''' 1 H 2 3_1 3 4 5_1 5 s' 6 7$, bezüglich dessen Construction nur zu bemerken ist: dass angenommen wurde, es fallen die Richtungslinien von P und k mit 1 zusammen, und dass bei jeder Kettenrolle die beiden Kettenspannungen entgegengesetzter Richtung s''' und s'', z. B. Taf. 11_1 und $_2$, zu einem einzigen Rollendruck 3_1 zusammengesetzt wurden.

Jede Polygonseite schneidet H auf der Richtungslinie der zwischen H und ihr wirkenden Kräfte (Nr. 27 S. 80); man erhält daher die Lage der Mittelkraft der ausserhalb eines Schnittes III z. B. wirkenden Kräfte: wenn man durch den mit III bezeichneten Schnitt der entsprechenden Polygonseite $3 3_1$ mit H die Parallele zur Kräftesumme $P 1 2 s'''$ zieht u. s. f. bis zum Schnitt VII, wobei natürlich die letzten zwei Mittelkräfte vertical sind, weil sie keine Kettenspannung mehr enthalten.

Im Schnitt VII tritt der Rollenwiderstand als scheerende Kraft S''' ein. Sie bestimmt sich gerade so, wie der Rollendruck und der Zapfenwiderstand der vorigen Nummer, indem man das Gewicht des Krahns $P 1 \ldots 7$ oberhalb des Schnittes VII in zwei Seitenkräfte nach Richtung S''' des Rollendrucks und der Richtung R des Zapfenwiderstandes zerlegt; der letztere muss durch die Zapfenmitte gehen und man darf bei dieser Zerlegung die Gewichte der Krahnenstücke 8, 9, 10 unter dem Rollenkranz vernachlässigen,

weil ihr Mitteldruck ebenfalls durch diese Zapfenmitte geht. Im Kräftepolygon tragen diese Seitenkräfte dasselbe Zeichen R und $S^{I/II}$, die Richtung der letztern Kraft fällt mit der von H zusammen.

Es wäre nun leicht, das begonnene Seilpolygon von Taf. 11_1 fortzusetzen, und die Kraft R mit den noch übrigen Gewichten 8, 9, 10 zu vereinigen, da jedoch ihre Richtungen zusammen fallen, so ist es einfacher, die Zusammensetzung direct von der Zapfenmitte aus, wo sie die Richtung von R schneiden, vorzunehmen, indem man durch diese Zapfenmitte Parallelen zu den Strahlen ($R\,S^{I/II}$) 7, 8, 9, 10 des Kräftepolygons zieht. Diese Parallellinien sind dann die Richtungslinien der gesuchten Mittelkräfte.

Wir kennen jetzt alle ausserhalb der Schnitte I...X wirkenden Kräfte und gehen zur Construction der innern über.

Bei Construction der Querschnittsmomente, der Curven der scheerenden Kräfte und der Maximalspannungen wiederholen sich die Nr. 88 S. 250 und Nr. 91 S. 263 erläuterten Operationen. Wir begnügen uns daher damit, hier das hervorzuheben, wodurch sich diese Constructionen von jenen, nur der Lage nach unterscheiden.

In den Querschnitten (Taf. 11_3) wurden alle Blech- und Winkeleisendicken gleich 1,2 Ctm., die erste Basis a aber gleich der doppelten Blechstärke = 2,4 Ctm. angenommen. Die z' sind daher immer gleich den halben Platten- und Winkeleisenlängen. Die zweite Basis b wurde gleich 41,66 Ctm., so dass $a\,b = 100$ □Ctm. ist, und die letzte c wie gewöhnlich gleich der halben Balkenhöhe angenommen.

Bei Construction der Polygone für die z'' und z''' mittelst dieser Basen durfte man sich wegen der vollständigen Symmetrie der Querschnitte jederzeit auf das halbe Polygon beschränken, und gelangte so zwar zum ganzen z'', aber nur zu $^1/_2 z'''$, es musste daher dieses verdoppelt werden, um z''' zu erhalten.

Die Bestimmung der durch die Mittelkräfte $P1$... auf die zugeordneten Schnitte hervorgebrachten Pressungen und Spannungen wurde auf Taf. 11_1 vorgenommen. Laut Nr. 76 S. 213 ist ($\varrho\,ab$) z''' gleich dem Moment der ausserhalb des Schnittes wirkenden Kräfte; es wurde daher für jeden Schnitt die Momentenfläche so in ein Dreieck verwandelt, dass die eine Seite = z''' wurde, dann muss die andere Dreieckseite nothwendiger Weise = $\varrho\,ab$ sein. Für den Schnitt V sind die beiden gleichen Momentenflächen schraffirt,

für die übrigen Schnitte aber nur die Enden der zur Verwandlung dienenden Parallelen ausgezogen und einerseits Q, anderseits z''' und $\varrho\, ab$ an die Enden der treffenden Dreieckseiten angeschrieben. Auch wurden die $P1\ldots$ nur im halben Maassstab aufgetragen, weil sonst Taf. 11_3 die Maximalspannungen viel zu gross geworden wären. Die auf dem Schnitt senkrecht stehende Seitenkraft Q Taf. 11_1 vertheilt sich gleichmässig drückend auf die ganze Schnittfläche $F = a\, z'$ Nr. 76 S. 214, das von ihr herrührende $\varrho_1\, ab$ ist daher $= \frac{Q}{F}\, ab = \frac{Q\, b}{z'}$. Um dieses $\varrho_1\, ab$ zu construiren, haben wir $Q \,.\, {}^1/_2\, b$ als Momentenfläche betrachtet und so verwandelt, dass die eine Seite des Dreiecks $= {}^1/_2\, z'$ wurde, dann muss die andere $= \varrho_1\, ab$ sein. Von den zu dieser Verwandlung dienenden Parallellinien wurden nur die Enden ausgezogen und mit den entsprechenden Buchstaben bezeichnet.

Da dieses $\varrho_1\, ab$ sich gleichförmig über den ganzen Querschnitt vertheilt, so vergrössert es um so viel den Druck $\varrho\, ab$ der innern Krahnfibern, und vermindert um so viel die gleiche Spannung der äussern. Taf. 11_1 wurde die Anordnung der Construction so getroffen, dass die $\varrho_1\, ab$ senkrecht auf den $\varrho\, ab$ stehen, werden daher erstere mittelst zweier Viertelkreise auf $\varrho\, ab$ heruntergeschlagen, so erhält man daselbst die Pressungen und Spannungen in den äussersten Fasern $\varrho\, ab \pm \varrho_1\, ab$ als die zwei Secanten des eben verzeichneten Halbkreises. Alle eben erwähnten Kräfte $(\varrho - \varrho')\, ab$, $(\varrho + \varrho_1)\, ab$, $\varrho'\, ab$, dann die Längen ${}^1/_2\, b$ und ${}^1/_2\, z'$ wurden bei dem Schnitt V, bei den übrigen Schnitten aber nur die beiden letzten Längen an den treffenden Stellen eingeschrieben.

Taf. 11_3 wurden nun von der Axe der Balkenquerschnitte aus links und rechts die $(\varrho \pm \varrho')\, ab$ an der Stelle, wo es zuweilen angeschrieben ist, mit entgegengesetzten Zeichen aufgetragen, die Endpunkte derselben durch eine gerade Linie verbunden; die Ordinaten dieser Linie bezeichnen laut Nr. 80 S. 231 die Grösse der von den unendlich fernen und den mit der Axe parallelen endlichen Kräften herrührenden Spannungen und Pressungen im Innern des Krahns.

Die punktirte Linie dieser halben Spannungen und Pressungen oder der $\pm {}^1/_2\, (\varrho \pm \varrho')\, ab$ enthalten die Mittelpunkte der Kreise, welche den Fig. 103—106 S. 229 entsprechen und die zur

Zusammensetzung der eben bestimmten Kräfte mit den scheerenden Kräften S dienen.

Um das diesen Kräften entsprechende σab zu erhalten, wurde ganz, wie es auf Taf. 10 (siehe die Erklärung Nr. 88 S. 253) geschah, durch den Pol der z'' eine Linie gezogen, welche mit c einen Winkel bildet, dessen Tangente $= \frac{z'''}{b}$ ist, auf dieser Linie der Punkt bestimmt, dessen Ordinate in Bezug auf c, $= S$ der mit den Schnitten parallelen Seitenkraft ist; die Verlängerung dieser Ordinate wird vom Kräftebüschel der z'' in den Punkten geschnitten, welche die Ordinaten der mit $s\,c\,h$ bezeichneten Curve der scheerenden Kräfte sind. Das am Fusse dieser Ordinate in der Axe liegende σab ist $= 1$; $^1/_2$; $^1/_{10}$ dieser Ordinate, weil in der Mitte die doppelte Blechstärke gleich der angenommenen Basis a, bei Schnitten durch die anliegenden Schenkel der Winkeleisen die vierfache Blechstärke $= 2\,a$ und bei Schnitten unmittelbar hinter den Kopfplatten die totale Metalldicke von 0,24 M. $= 10\,a$ ist. Man erhält daher die Länge der σab in der Axe, indem man durch die Endpunkte der Ordinaten Linien zieht, die mit den Strahlen des Büschels Taf. 11_4 parallel laufen. Diese Linien wurden nicht markirt; sie können, im Fall man deren bedürfte, ja leicht wieder erhalten werden; ihr Endpunkt aber vom Schnitt der punktirten Linie der $^1/_2\,(\varrho \pm \varrho_1)\,ab$ mit der treffenden Ordinate auf diese heruntergeschlagen giebt die Curve der Maximalspannungen und Pressungen. Die Winkel δ, unter welchen von diesen Curven aus die σab projicirt werden, geben die Richtungen an, in welchen das Metall des Krahns scheerend nicht in Anspruch genommen ist, diese Richtungen sind links Taf. 11_3 auf einer und derselben Verticallinie für alle Querschnitte als kleine Kreuzchen aufgetragen worden. Nachdem man nun diese auf die entsprechenden Schnitte 11_1 übergetragen hatte, konnten ganz wie auf Taf. 10_1 die Trajectorien eingezeichnet werden, welche die Richtungen der stärksten directen Inanspruchnahme des Metalls angeben. Zwischen dem Schnitt VI und VII laufen sie mit der verticalen Axe des Krahns parallel, weil innerhalb derselben keine scheerenden Kräfte vorkommen. Bei Vernachlässigung des Gewichtes des Krahnstückes zwischen denselben gilt ein und dasselbe Querschnittsmoment für beide Schnitte.

Die pressenden Kräfte in den der innern Seite des Krahns sich anschmiegenden Trajectorien, sind grösser als die span-

nenden Kräfte, welche in den der äussern Seite sich anschmiegenden Trajectorien wirken. Jene wurden, wie wir bisher immer zum Unterschied der pressenden und spannenden Kräfte zu thun pflegten, etwas stärker ausgezogen.

Hiermit schliessen wir die Construction der im Innern des Blechkrahns wirkenden Kräfte.

Wir entlehnen Taf. 11 die folgenden Resultate:

Die Maximalpressung findet in den innersten Fasern des Schnittes V statt und ist bei einer Belastung des Krahns mit $P =$ 10 Tn. $=$ 34 Tn. auf $ab = 100$ □Ctm. (oder $= 3{,}4$ Kilogr. pro □Mm.). Der Krahn könnte daher nahezu die doppelte Last tragen.

In den Schnitten I und IX, im obersten und untersten allein, sind die scheerenden Kräfte grösser als die, welche von den directen Pressungen und Spannungen herrühren. Da man nun den Kopf und den Fuss solcher Krahnen nicht unverhältnissmässig schwach machen und die Metallstärken nicht plötzlich vermindern darf, so kann man füglich bei derartigen Constructionen die scheerenden Kräfte ganz ausser Acht lassen.

$\varrho' ab$ oder die Pressungen, welche von der mit der Axe des Balkens zusammenfallenden Seitenkraft von P herrühren, können nicht, wie es gewöhnlich geschieht, vernachlässigt werden. Im Schnitt V ist $\varrho' ab$ genau $= {}^1/_{11} (\varrho + \varrho_1) ab$, also 3 Tonnen auf 100 □Ctm.

Die von der Kette herrührende Spannung, welche den Druck in den Schnitten I...V so durch Zusammenpressen vergrössert, dass die Maximalspannungen in den folgenden Schnitten VI und VII geringer sind, darf auch kaum vernachlässigt werden. Im Schnitt V Taf. 11_3 ist ${}^1/_2 z' = 111$ Ctm., demnach $F = a z' =$ $2{,}4 \,.\, 222 = 535$ □Ctm. Die Spannung S^{V} aber $= 5{,}5$ Tn. oder auf $ab = 100$ □Ctm. noch 1 Tn.

In der Praxis wird es also wohl immer hinlänglich genau, und jedenfalls am förderlichsten sein, nach vorläufig angenommenen Dimensionen das Kräfte- und Seilpolygon (Taf. 11_1 und $_2$) zu construiren, und dann die Querschnittsmomente für einen oder zwei der Schnitte, für welche das Moment der äussern Kräfte ein Maximum ist, und mittelst dieser $(\varrho + \varrho_1) ab$ zu construiren, um zur Maximalpressung zu gelangen.

VIERTER ABSCHNITT.

DER CONTINUIRLICHE BALKEN.

Erstes Kapitel.

Die am continuirlichen Balken wirkenden Kräfte.

93. Das Gleichgewicht der an einem continuirlichen Balken wirkenden Kräfte.

Wird ein Balken mit vollen Wänden, wie wir ihn bisher betrachtet haben, oder auch ein Träger, dessen Wände aus Fachwerk gebildet sind, das wir später werden kennen lernen, nicht auf die Länge jeder einzelnen Oeffnung beschränkt, sondern über mehrere Oeffnungen fortlaufend hingestreckt: so entsteht ein continuirlicher Balken oder Träger.

Bei dem nicht continuirlichen Träger ist das Moment der in den Querschnitten über den Pfeilern und Widerlagern wirkenden Kräfte $= 0$; in Folge der Biegung des Balkens in der Mitte bilden die Axen der einzelnen Balken über den Pfeilern Ecken, wenn sie vor der Biegung daselbst eine gemeinschaftliche Tangente hatten: die beiderseitigen Querschnitte werden sich dort oben öffnen, klaffen, wenn sie vor der Biegung daselbst sich berührten.

In Folge der Continuität aber werden die Axen der Balken über zwei aufeinander folgenden Oeffnungen, über jedem Pfeiler auch nach der Biegung eine gemeinschaftliche Tangente haben, wenn sie sie vor derselben hatten. Die Querschnitte über den Pfeilern werden sich daher nicht mehr öffnen können und in Folge der zu beiden Seiten abwärts wirkenden Kräfte werden ihre

obern Fibern gedehnt, die untern comprimirt sein. Das Moment der in ihnen wirkenden Kräfte wird daher von 0 verschieden, und unter gewöhnlichen Verhältnissen entgegengesetzten Sinnes als wie in einem Querschnitt durch die Mitte der Oeffnung sein.

Betrachten wir daher die an dem Balken einer Oeffnung, z. B. der $i$ten (zwischen dem i und dem $i+1$ten Pfeiler, wobei wir mit 0 zu zählen beginnen) wirkenden Kräfte, indem wir uns denselben unmittelbar nach dem $i$ten und vor dem $i+1$ten Pfeiler geschnitten denken: so kommen zu den Fig. 78 und 79 S. 124 dargestellten Kräften noch zwei Momente, unendlich ferne Kräfte, welche an den beiden Enden des Balkens wirken.

Unter der Voraussetzung, dass alle diese Kräfte bereits bekannt seien, zeigt Fig. 121 ihre Disposition, Fig. 122 und 123 ihr Seil- und ihr Kräftepolygon.

Fig. 121.

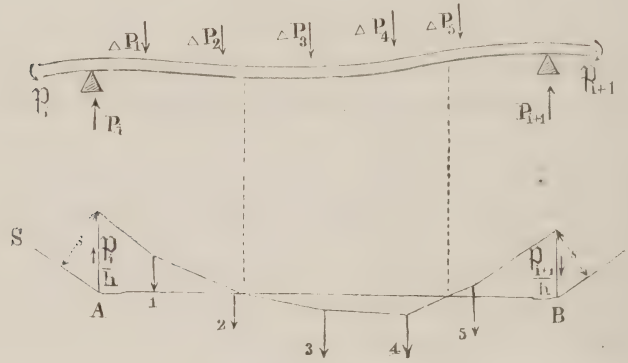


Fig. 122.

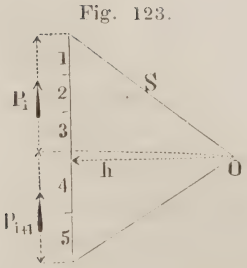


Fig. 123.

In diesen Figuren bezeichnet:

P die Summe der ausserhalb eines beliebigen Querschnitts wirkenden Kräfte. Der Querschnitt wird durch einen Zeiger näher bezeichnet. Insbesondere soll noch, wenn mehrere Oeffnungen in Betracht kommen, die Kraft vor, von der nach einem Pfeiler durch einen Accent unterschieden werden, P_i ist also in diesem Falle die Kraft im Querschnitt nach dem $i$ten und P'_{i+1} die vor dem $i+1$ten Pfeiler. Da diese Summe von einem zum andern Quer-

schnitt um die zwischen denselben wirkenden Kräfte sich ändert, so sind:

$\triangle P$ die einzelnen Belastungen, wenn es concentrirte Belastungen sind.

$p \triangle x$ kann dann die auf die Strecke $\triangle x$ vertheilte gleichförmige Belastung bezeichnen, wenn x die Abscisse des Querschnittes ist.

$\mathfrak{P}$ ist das Moment der ausserhalb eines Querschnittes wirkenden Kräfte, zu dessen näherer Bezeichnung ebenfalls die Zeiger dienen.

h ist die Poldistanz im Kräftepolygon, unter der wir uns eine Länge, und zwar bei Balken mit parallelen Streckbäumen, ein rundes Mehrfache der Balkenhöhe denken wollen.

Das Kräftepolygon Fig. 123 unterscheidet sich in nichts von dem Kräftepolygon Fig. 79 S. 124, weil unendlich kleine und ferne Kräfte in demselben verschwinden. Setzen wir nun im Seilpolygon Fig. 122 die Spannung in der äussersten Polygonseite S mit der unendlich kleinen und fernen Kraft $\mathfrak{P}_i$ zusammen, so muss jene nach Nr. 40 S. 110 parallel zu sich selbst um die Länge s so verschoben werden, dass $Ss = \mathfrak{P}_i$ ist. Die verticale Verschiebung dieser äussersten Polygonseite ist dann $= \frac{\mathfrak{P}_i}{h}$, weil die Aehnlichkeit der beiden mit den entsprechenden Buchstaben in Fig. 122 und 123 versehenen Dreiecke:

$$S : h = \frac{\mathfrak{P}_i}{h} : s$$

giebt.

Die direct auf den Balken wirkenden Kräfte werden, wie gewöhnlich, durch das Seilpolygon miteinander verbunden, sodass die Polygonseite zwischen 3 und 4 z. B. mit dem Strahl $O(34)$ parallel läuft.

Die Spannung in der letzten Polygonseite nach $\triangle P_5$ setzen wir mit dem Moment $\mathfrak{P}_{i+1}$ zusammen, indem wir sie in verticaler Richtung um $\frac{\mathfrak{P}_{i+1}}{h}$ parallel mit sich selbst verschieben. Da diese unendlich fernen Kräfte entgegengesetzten Sinnes in Fig. 121 angenommen wurden, so müssen auch in Fig. 122 die Seilpolygonseiten in entgegengesetzter Richtung verschoben werden, wie die Pfeile es andeuten. Als Schlusslinie ergiebt sich dann die Linie AB; eine Parallele zu ihr durch den Pol O des Kräftepolygons

bestimmt die Grösse der ausserhalb der äussersten Querschnitte wirkenden Kräfte P_i und P'_{i+1}.

Dass alle so im Zusammenhang miteinander stehenden Kräfte im Gleichgewicht seien, geht daraus hervor, dass sowohl das Kräfte- als auch das Seilpolygon geschlossen erscheinen.

Wie in Nr. 48 S. 127 ist das Segment einer Verticalen zwischen zwei Polygonseiten multiplicirt mit der Poldistanz h gleich dem Moment der zwischen diesen Seiten wirkenden Kräfte in Bezug auf die Verticale; das Moment aller ausserhalb eines Querschnitts wirkenden Kräfte $\mathfrak{P}$ wird daher auf dieselbe Weise durch das Segment zwischen der treffenden Seite und der Schlusslinie gemessen. Wäre nicht weiter oben schon bewiesen worden, dass der verticale Abstand zwischen den äussersten Polygonseiten und der Schlusslinie über den Pfeilern $= \frac{\mathfrak{P}_i}{h}$ und $\frac{\mathfrak{P}_{i+1}}{h}$ sei, so könnte es auch hieraus geschlossen werden.

Wie in Nr. 47 S. 124, schneiden die Parallelen zu zwei Polygonseiten durch den Pol des Kräftepolygons auf der Linie der Kräfte ein Segment ab, das die Summe der zwischen den Polygonseiten wirkenden Kräfte darstellt. Die Summe aller ausserhalb eines Querschnittes wirkenden Kräfte P wird daher durch das Segment zwischen den Parallelen zur Schlusslinie und zur treffenden Polygonseite bestimmt. Der Schnitt der Parallelen zur Schlusslinie mit der Linie der Kräfte im Kräftepolygon, bestimmt auf jener den Maximalmomentenpunkt (Nr. 48 S. 127) zwischen den Pfeilern.

Ist das Moment über den Pfeilern entgegengesetzten Sinnes, als wie das Maximalmoment, was Fig. 121, 122 und 123 vorausgesetzt wurde, aber nicht nothwendiger Weise der Fall sein muss: so befinden sich zwischen dem Maximalmomentenpunkt und den beiden Pfeilern zwei Punkte, in welchen das Moment $= 0$ ist; man erhält diese Punkte durch den Schnitt der Schlusslinie mit dem Seilpolygon. Da die Momente zu beiden Seiten dieser Punkte entgegengesetzten Sinnes sind, so ist auch der Balken zu beiden Seiten derselben in entgegengesetztem Sinne gebogen. Diese beiden Punkte heissen daher häufig auch die Inflectionspunkte des Balkens.

In diesen Punkten könnte man die Streckbäume des Balkens schneiden, ohne das Gleichgewicht zu stören, wenn nur dafür gesorgt würde, dass die Querschnitte nicht aneinander vorübergleiten

können. Dies könnte z. B. durch Unterstützung oder einfach dadurch geschehen, dass man das Balkenstück zwischen den beiden Inflectionspunkten an dem Balkenstücke über den Pfeilern aufhinge; dieses Verhältniss wird vielleicht am deutlichsten durch Fig. 124 dargestellt. Wir dachten uns ein Balkenstück über jeden

Fig. 124.

Pfeiler gelegt und an seinen Endpunkten das Mittelstück jeder Oeffnung aufgehängt. Eine solche Darstellung zeigt auch am deutlichsten den Nutzen der Continuität; die Spannweite des Mittelstücks ist immer viel kleiner als die der ganzen Oeffnung, und wenn das Balkenstück über dem Pfeiler nicht zu lang angenommen wird oder ausfällt, so wird auch in diesem das Moment über den Pfeilern nicht viel grösser als in einem freiliegenden Balken gleicher Länge sein. Man kann daher sagen: das Continuirlichmachen eines über mehreren Oeffnungen freiliegenden Balkens kommt nahezu einer Verdoppelung der Pfeiler gleich.

Doch ist wohl zu achten, dass, wie aus Fig. 122 hervorgeht, die Reduction des Maximalmoments auf das einer halb so grossen Oeffnung sich nur auf das Moment selbst erstreckt. Fig. 123 dagegen zeigt, dass die Summe der ausserhalb eines Querschnitts wirkenden Kräfte nicht vermindert wird; nach wie vor ist die Summe der ausserhalb der Endquerschnitte eines Balkenstücks wirkenden Kräfte gleich der Summe der zwischen ihnen liegenden Belastungen.

94. Ausscheidung der unbekannten Kräfte, welche am continuirlichen Balken wirken.

Bisher haben wir immer vorausgesetzt, dass die in den Endquerschnitten des Balkens wirkenden Kräfte $\mathfrak{P}$ und P bekannt seien, dies ist jedoch nicht der Fall. Da das Gewicht des Balkens und seiner Belastung auf unendlich verschiedene Weisen nach der Richtung von mehr als wie zwei verticalen Linien zerlegt werden kann: so wäre die Aufgabe unbestimmt, wenn der Balken starr vor-

ausgesetzt würde; wenn man annehmen dürfte, der Balken besitze hinlängliche Stärke und Steifigkeit, um den Druck jeder Belastung auf jeden Pfeiler, auch auf den entferntesten, direct zu übertragen. Letzteres ist jedoch nicht der Fall, unter jeder Belastung biegt sich der Balken, abwärts unter ihr, aufwärts über jedem Pfeiler, und gerade durch diese Biegungsfähigkeit werden die Fig. 124 dargestellten Verhältnisse und dadurch alle am Balken wirkenden Kräfte endliche und unendlich ferne bestimmt. Diese Bestimmung aber durch die Biegung, deren Gesetze in der Theorie der elastischen Linie ihren Ausdruck finden, entgeht gänzlich der graphischen Statik; wenigstens soweit wir derselben bis heute mächtig sind. Es wird gewöhnlich von dem Grundsatz ausgegangen, dass die Krümmungshalbmesser des gebogenen Balkens in jedem Querschnitt dem Moment der ausserhalb desselben wirkenden Kräfte umgekehrt proportional seien. Nun sind aber diese Biegungen so unendlich klein und die Krümmungshalbmesser so unendlich gross, dass jede Construction derselben unmöglich ist und unmöglich sein wird, bis uns die Geometrie einfache Verhältnisse zwischen den entsprechenden Krümmungshalbmessern projectivischer Figuren liefert, die bezüglich des unendlich fernen Punktes in der Verticallinie als Projectionscentrum und bezüglich der geraden Axe des ungebogenen Balkens als Spurlinie perspectivisch liegen: denn dann könnten wir die Einbiegungen des Balkens so lange projectivisch verzerren, bis die Krümmungshalbmesser messbar würden. Da wir jedoch heute noch nicht im Stande sind, dies zu thun, so müssen wir zur Rechnung greifen.

Wir verfahren dabei wie bei der Auflösung einer algebraischen Aufgabe, indem wir die Beziehungen zwischen den bekannten und unbekannten Grössen so aufstellen, als ob letztere bekannt wären. Aus den erhaltenen Gleichungen bestimmen wir die unbekannten Grössen, mittelst deren nun P und $\mathfrak{P}$ für jeden Querschnitt ermittelt werden können. Da nun hierbei gerade wieder so verfahren werden muss als wie bei der ersten Aufstellung, so werden wir, um Wiederholungen zu vermeiden, gleich von vornherein alles den continuirlichen Balken Betreffende so erledigen, als ob schon die Momente über den Pfeilern, d. h. die $\mathfrak{P}_i$ bekannt wären, und bemerken hier nur, dass in dem nächsten Kapitel die Bestimmung dieser Unbekannten behandelt werden soll.

Dass sich $\mathfrak{P}_i$ am besten zur Bestimmung der an dem Balken

einer Oeffnung wirkenden Kräfte eigne, geht aus einem Blick auf Fig. 122 und 123 S. 274 hervor. In der That wird durch Auftragen von $\frac{\mathfrak{P}_i}{h}$ und $\frac{\mathfrak{P}_{i+1}}{h}$, sowohl die Lage als auch die Richtung der Schlusslinie AB Fig. 122 bestimmt und dadurch auch, indem man eine Parallele durch den Pol O des Kräftepolygons zieht, die Kräfte P_i und P'_{i+1}. Würde man dagegen eine dieser letztern Grössen als die zu bestimmende betrachten, so würde dadurch wohl die Richtung der Schlusslinie AB, nicht aber deren Lage im Seilpolygon bestimmt. Noch weit weniger eignen sich willkürliche Zusammensetzungen von P als zu bestimmende Unbekannte, z. B. $P_i - P'_i$, d. h. die Reaction eines Pfeilers auf dem Balken, wie es z. B. Laisle und Schüble u. A. gethan haben. Es muss auf diesem Wege viel schwieriger zu den an einer beliebigen Oeffnung wirkenden Kräften zu gelangen sein, weil zur Bestimmung von $\mathfrak{P}_i$ dann alle vorausgehenden $P_i - P'_i$ zusammengesetzt werden müssen.

Nach Bresse's Cours de mécanique appliquée 1859 S. 143 soll Hr. Clapeyron zuerst das Moment über den Pfeilern als zu bestimmende Unbekannte betrachtet haben, doch haben wir uns nie dessen Originalabhandlung verschaffen können.

Herr Bresse jedoch, dem wohl Alles bekannt war, was Herr Clapeyron in dieser Sache gethan hat, hat sich bei seinen Untersuchungen auf Balken von gleichweiten Oeffnungen mit gleichförmiger Belastung pro Oeffnung beschränkt. Solche Beschränkungen geben zwar der Darstellung den eigenthümlichen Reiz der Einfachheit, sie gewähren jedoch sehr wenig Uebersicht, weil dadurch von vornherein Allgemeines und Specielles vermengt wird.

Wir wollen uns daher bemühen, so lange als möglich die Lösung allgemein durchzuführen, weder die Belastungsart noch die Zahl der Oeffnungen beschränken und auf diese Weise ausscheiden, was allgemein gilt von dem, was sich nur auf 2, 3, 4 gleichweite Oeffnungen bezieht.

95. Wirkungen der einzelnen concentrirten Belastung auf den continuirlichen Balken.

Bevor wir den beliebig belasteten Balken behandeln, wollen wir untersuchen, welches die Wirkungen der einzelnen concentrirten Belastung auf den Balken seien, weil die Wirkungen der einzel-

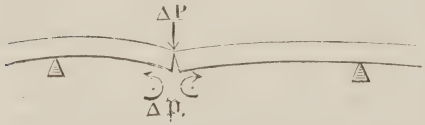
nen Belastung sich viel klarer und reiner darstellen als wie die summirten Wirkungen einer nach unbekanntem Gesetz vertheilten Totalbelastung.

An welcher Stelle der Spannweite auch $\triangle P$ auf den nicht continuirlichen Balken aufgebracht werden mag, die Biegung wird immer so stattfinden, wie Fig. 125 es darstellt; wie nahe auch $\triangle P$ an dem einen oder an dem andern Pfeiler angebracht werden mag, der Balken wird sich an dieser Stelle immer abwärts biegen, und die Tangenten an seinen Endpunkten werden sich immer aufwärts bewegen. Wirkt dieser Bewegung der Zusammenhang des Balkens mit der nächsten Oeffnung entgegen, so werden in Folge dieser Gegenwirkung die von der Belastung $\triangle P$ herrührenden unendlich fernen Kräfte am Ende des Balkens, die wir mit $\triangle \mathfrak{P}_i$ und $\triangle \mathfrak{P}_{i+1}$ bezeichnen wollen, die durch die Pfeile in Fig. 125 angedeuteten Richtungen haben.

Fig. 125.

Bei hinlänglich grossem $\triangle \mathfrak{P}_i$ und $\triangle \mathfrak{P}_{i+1}$ könnten wir uns wie in Fig. 126 den Balken unter der Belastung geschnitten und einen Theil von $\triangle P$ dem links-, den andern dem rechtsseitigen Balken aufgegeben denken. Bei dieser Vertheilung ist es ganz undenkbar, dass der eine Theil von $\triangle P$ negativ und der andere $> \triangle P$ sei, es werden sich daher die beiderseitigen Balken in $\triangle P$ immer abwärts biegen, die Querschnitte dort, wie es Fig. 126 angedeutet ist, klaffen. Kann dies wegen des Zusammenhangs des Balkens nicht stattfinden, so werden in dem Balkenquerschnitt unter $\triangle P$ Spannungen stattfinden, deren Moment $\triangle \mathfrak{P}$ immer den durch die Pfeile Fig. 126 angedeuteten Sinn haben werden. Construiren wir daher Fig. 122 S. 274 entsprechend das Seilpolygon für $\triangle P$, so wird dasselbe immer die Fig. 127 dargestellte Form haben.

Fig. 126.



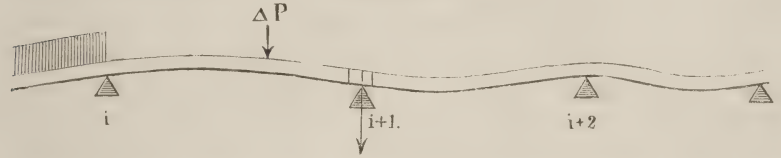
Da die von den Belastungen der nächsten Oeffnungen herrührenden $\triangle \mathfrak{P}$ negativ sein können, so wird hiermit nicht behauptet, dass die $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{P}_{i+1}$ selbst, die Zeichen von Fig. 127 und Fig. 128 S. 281 haben müssen: sondern es können dieselben

in Folge der starken Belastungen ausserhalb der treffenden Oeffnungen entgegengesetzten Sinn annehmen, wie es z. B. durch die

Fig. 127.

Verhältnisse der Fig. 128 angedeutet wird, allein auch dann wird immer die Aenderung in Folge des Aufbringens der Last $\triangle P$ den in Fig. 127 angedeuteten Sinn haben. In Fig. 128 würde also $\triangle P$

Fig. 128.



das Moment des wie gewöhnlich in i aufwärts gebogenen Balkens vergrössern, dagegen das Moment des in $\triangle P$ aufwärts gebogenen Balkens vermindern, und das Moment des über dem Pfeiler $i+1$ abwärts gebogenen Balkens, der also dort auf den Pfeiler niedergeschraubt werden muss, auch vermindern.

Welches sind nun die Wirkungen von $\triangle P$ auf die nächstfolgenden Oeffnungen?

Wie wir uns auch die Belastung des Balkens denken mögen, so kann durch $\triangle P$ nur ein Niedergehen, wenn auch ein unendlich kleines, aller Punkte der Axe innerhalb der Oeffnung, in der es aufgebracht wird, erzeugt werden. Stellt daher in der Verzerrung die ausgezogene Linie Fig. 129 die ursprüngliche Lage der Axe dar, so kann die punktirte Linie die Lage derselben nach der Belastung durch $\triangle P$ darstellen. Die Tangente an die Axencurve bewegt sich daher über dem Pfeiler i in dem daselbst durch einen Pfeil angegebenen Sinne abwärts; vergrössert daher, wie wir es bereits schon wissen, das Moment über diesem Pfeiler unter der Voraussetzung, dass es den durch den Kreispfeil über i angegebenen Sinn habe. Diese Drehung kann in der nächsten Oeffnung zwischen $i-1$ und i nur ein Aufsteigen aller Punkte der Axe in dieser Oeffnung zur Folge haben. Die Tangente an der Axencurve bewegt sich daher über dem Pfeiler $i-1$ in dem daselbst durch

einen Pfeil angegebenen Sinne aufwärts und vermindert daher das Moment daselbst. Auf diese Weise kann man fortschliessen und folgern, dass auf allen Pfeilern, welche durch eine

Fig. 129.

Fig. 130.

gerade Zahl Pfeiler von $\triangle P$ getrennt sind, das Moment vergrössert wird, insofern der Balken daselbst abwärts gebogen war. Auf allen Pfeilern aber, welche durch eine ungerade Zahl Pfeiler von $\triangle P$ getrennt sind, wird das Moment vermindert.

Das Seilpolygon, das entsteht, wenn wir die Wirkungen von $\triangle P$ auftragen, wird daher eine Figur ähnlich Fig. 130 bilden. Wenn nur die einzige Last $\triangle P$ aufgelegt wird, so sind nur so viele Ecken als Pfeiler jenseits $\triangle P$ vorhanden, und zwischen je zwei Pfeilern wird ein Inflectionspunkt J_{i-1}, J_{i-2}... liegen für dessen Querschnittsmoment die Wirkung der Kraft $\triangle P = 0$ ist.

Die Lage dieser Inflectionspunkte ist unabhängig von der Lage und Grösse von $\triangle P$. Nr. 93 S. 275 haben wir gezeigt, dass die Aenderung der Momente in Folge der Continuität in einer Oeffnung nur von den Momenten auf den nächsten Pfeilern abhängig sei. Zwischen $i-1$ und i Fig. 130 wird daher die Lage der Seilpolygonseite nur von der Grösse des Moments auf dem Pfeiler i abhängig sein, $\triangle P$ mag sonst jede beliebige Lage und Grösse zwischen i und $i+1$ haben. Da wir ferner annehmen, der Balken werde nur innerhalb der Elasticitätsgrenzen belastet, und da innerhalb dieser Grenzen alle Spannungen in jedem Querschnitt der Grösse der Belastungen proportional sind, sodass also die Fibern eines Balkens, dessen sämmtliche Belastungen plötzlich verdoppelt würden, auch dadurch doppelt so stark in jedem Querschnitt in Anspruch genommen würden: so muss, wenn in Folge der Belastung der Oeffnung zwischen i und $i+1$ das

Pfeilermoment i 2, 3, n mal so gross wird, das Moment in allen übrigen Querschnitten vor i sich ebenso vielmal vergrössern, also in den Querschnitten J_{i-2}, J_{i-1}, wo es früher $= 0$ war, auch 0 bleiben. Dies kann aber nur stattfinden, wenn sich die einzelnen Seilpolygonseiten um diese Punkte als um feste Punkte drehen. Da das für die Belastung einer folgenden Oeffnung Bewiesene ebenso auch für Belastungen aller vorausgehenden Oeffnungen gilt, so folgt:

In jeder Oeffnung eines continuirlichen Balkens giebt es zwei nur von der Form, nicht von der Belastung des Balkens abhängige Querschnitte J und J', welche in der ersten und zweiten Hälfte der Oeffnung so liegen, dass das Moment des erstern durch beliebige Belastung aller folgenden, das Moment des zweiten aber durch beliebige Belastung aller vorhergehenden Oeffnungen nicht geändert wird.

Dass diese Punkte jederzeit in der der belasteten Oeffnung gegenüber liegenden Balkenhälfte liegen, kann daraus geschlossen werden, dass die von einer belasteten Oeffnung herrührenden Pfeilermomente mit der Entfernung von dieser Oeffnung abnehmen müssen; aus der Erfahrung schon geht hervor, dass bei langen continuirlichen Balken die Belastung einer Oeffnung auf die vierte oder fünfte folgende oder vorausgehende Oeffnung gar keinen merkbaren Einfluss mehr ausübe, was nicht möglich wäre, wenn die Punkte J und J' nicht jenseits der Mitten lägen. Unsere späteren Rechnungen geben auch die Lage vom J und J' immer nur in den äussersten Dritteln an.

Nähert sich $\triangle P$ (Fig. 129 und 130 S. 281) einem Pfeiler, z. B. dem Pfeiler i, um endlich mit ihm zusammenzufallen, so wird sich die Seilpolygonseite zwischen $i-1$ und i um J_{i-1} drehen und endlich mit der Horizontalen zusammenfallen. Allein auch dann wird man immer noch J_{i-1} als den Schnittpunkt der zwei zusammenfallenden Linien betrachten müssen; gerade so, wie man den Berührungspunkt einer Tangente als den Schnitt zweier zusammenfallenden Tangenten betrachten muss. Wegen desselben Grundes aber, wegen dessen jetzt die Seilpolygonseite zwischen $i-1$ und i durch J_{i-1} geht, wird auch die Polygonseite zwischen i und $i+1$ durch J'_i gehen müssen. Man kann daher auch diese

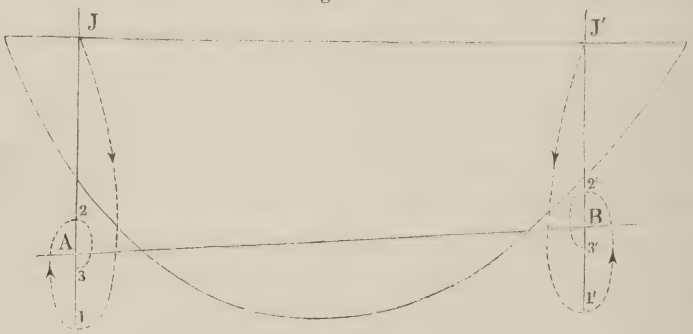
Punkte J_{i-1} und J'_i als Grenzlagen der Inflectionspunkte für die Belastung durch ein einzelnes $\triangle P$ betrachten.

Bewegt sich also eine Last von einem Pfeiler zum andern, so beschreiben die Inflectionspunkte des die Wirkungen dieser Last darstellenden Seilpolygons, in demselben Sinne als wie die Last, die äussern Strecken zwischen den Pfeilern und den festen Inflectionspunkten J und J'.

Alles bisher Gesagte gilt natürlich nur von der Belastung des Balkens durch die einzelne Last und darf durchaus nicht auf die Lage der Inflectionspunkte einer Totalbelastung bezogen werden, indem diese sich beständig von den Pfeilern entfernen können, bis sie zusammenfallen und dann imaginär werden.

Wie sich dies so gestalten kann, wollen wir durch Fig. 131 deutlich zu machen suchen. Stellt in derselben die Curve mit der

Fig. 131.



durch ihre Endpunkte gehenden Schlusslinie das Seilpolygon der Belastung dieser Oeffnung selbst dar, so wird durch die Belastung der vorausgehenden Oeffnungen das Moment in J' in nichts modificirt, die Aenderung des Moments in dieser Oeffnung durch Beifügen der Belastungen der übrigen Oeffnungen wird daher durch die Belastungen der folgenden Oeffnungen allein bestimmt. Durch die Belastung der nächsten Oeffnung kann die Schlusslinie, welche die Grösse der Momente bestimmt, nach $1'$ herunter, durch die der zweiten wieder nach $2'$ hinauf, durch die der dritten nach $3'$ und schliesslich nach B kommen, wobei die Momentenänderungen mit der Entfernung der treffenden Oeffnungen abnehmen.

Ebenso verhält es sich mit den Aenderungen des Moments im

Querschnitt J', die allein durch die Belastung der vorausgehenden Oeffnungen bestimmt werden. Die Schlusslinie kommt nach 1 2 3 .. und schliesslich nach A.

Sind nun die beiderseitigen nächsten Oeffnungen verhältnissmässig sehr stark belastet, so können wohl die Punkte A und B so tief herunter kommen, dass die Schnittpunkte der sie verbindenden Linie mit dem Polygon, d. h. die Inflectionspunkte der Totalbelastung, sich immer mehr nähern, dann zusammenfallen und endlich imaginär werden. Es sind dies Verhältnisse, wie wir sie schon Fig. 128 S. 281 dargestellt haben.

96. Ungünstigste Belastung des continuirlichen Balkens.

Wir sind nun im Stande, die ungünstigste Belastungsart des continuirlichen Balkens zu bestimmen. Wir wollen dies für eine Oeffnung mit reellen Inflectionspunkten, deren Seilpolygon durch Fig. 122 S. 274 dargestellt wird, durchführen.

Für die mittelste Strecke, welche weder einen wirklichen Inflectionspunkt, noch einen der der Aussenbelastungen J und J' enthält, gilt hinsichtlich der Belastung dieser Oeffnung selbst das in Nr. 49 S. 129 Gesagte.

Da laut Fig. 127 S. 281 das von $\triangle P$ herrührende Maximalmoment gleichen Sinnes als die Momente auf der fraglichen Balkenstrecke unter $\triangle P$ selbst sind, so folgt: durch Aufbringen jeder weiteren Last $\triangle P$ nähert sich der Maximalmomentenpunkt dieser Last.

Die grösste Annäherung desselben an ein Widerlager findet also dann statt, wenn die ganze Strecke zwischen demselben und dem Maximalmoment total belastet ist.

Da man sich $\triangle P$ nach der Richtung eines jeden der beiden Inflectionspunkte J und J' (s. Fig. 124 S. 277), durch welche es von den beiden nächsten Pfeilern getrennt ist, in zwei verticale Belastungen zerlegt denken kann, weil in diesen Punkten das Moment der von $\triangle P$ herrührenden Kräfte $= 0$ ist: so wird die Summe der ausserhalb eines Querschnittes der Mittelstrecke wirkenden Kräfte vergrössert oder verkleinert, je

nachdem $\triangle P$ auf der einen oder der andern Seite dieses Querschnittes wirkt. Denn befindet sich auf der einen Seite des Querschnittes nur einer der Punkte J, so reducirt sich die Summe der von $\triangle P$ herrührenden, ausserhalb dieses Querschnittes wirkenden Kräfte auf die im Inflectionspunkt aufwärts wirkende Reaction der Seitenkraft von $\triangle P$. Befindet sich dagegen ausser J auch noch $\triangle P$ selbst auf der Seite dieses Querschnittes, so wirkt die Mittelkraft von $\triangle P$ und der Reaction immer abwärts, weil letztere kleiner als $\triangle P$ ist.

Betrachtungen, die denen von Nr. 49 S. 131 genau gleich sind, beweisen auch: dass diese Summe desto grösser sei, je mehr sich die Last $\triangle P$ dem in Frage stehenden Querschnitt nähert.

Da die Inflectionspunkte der von $\triangle P$ herrührenden Belastung, auf die es hier allein ankam, immer zwischen $\triangle P$ und den beiderseitigen nächsten Pfeilern liegen, so gilt das oben Gesagte nicht allein von dem Querschnitt der innern Mittelstrecke, sondern überhaupt von allen Querschnitten der Oeffnung.

Die Summe der ausserhalb des Querschnittes wirkenden Kräfte ist daher ein Maximum oder ein Minimum, wenn die ganze Strecke zwischen dem Querschnitt und dem einen der nächsten Pfeiler ganz, und zwar derart belastet ist, dass sich die schwersten Lasten in der Nähe des Querschnittes befinden. Bezüglich der ungünstigsten Stellung eines Locomotivzuges gilt daher auch das S. 131 Gesagte.

Endlich genügt es, auf die Uebereinstimmung des Theiles der Fig. 127 S. 281 innerhalb der Inflectionspunkte mit Fig. 82 S. 130 aufmerksam zu machen, um wie dort S. 132 zu beweisen: Das Moment der ausserhalb eines beliebigen Querschnittes der innern Strecke wirkenden Kräfte, wird durch jede innerhalb der Oeffnung zugefügte Kraft $\triangle P$ vergrössert, und zwar desto mehr, je mehr sich diese Kraft dem Querschnitt nähert.

Die ungünstigste Stellung eines Locomotivenzuges bezüglich eines Querschnittes ist ebenfalls die S. 132 angegebene.

Aus Fig. 130 S. 281 geht hervor, dass alle Wirkungen von

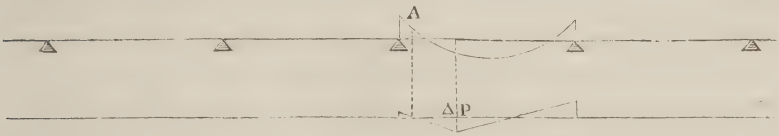
$\triangle P$ auf die Strecke zwischen den Inflectionspunkten von einer Oeffnung zur andern ihren Sinn ändern, und dass diese Wirkung in allen Oeffnungen, welche durch eine gerade Zahl Pfeiler von einander getrennt sind, gleichen Sinnes sei.

Die Belastung in den Seitenöffnungen hat daher streng zu alterniren, mag es sich um Maxima von P oder $\mathfrak{P}$ handeln.

Das Moment der abwärts gebogenen äussersten Balkenstrecken zunächst der Pfeiler wird vergrössert durch Totalbelastung der Strecke zwischen dem $\triangle P$, dessen Inflectionspunkt mit dem treffenden Querschnitt zusammenfällt, und dem gegenüberliegenden Pfeiler.

Wäre z. B. in Fig. 132 die ungünstigste Belastungsart für den Querschnitt A einer äussersten Strecke, auf der der Balken immer abwärts gekrümmt ist, zu bestimmen, so hätte man die Lage von

Fig. 132.



$\triangle P$ zu suchen, deren Inflectionspunkt mit dem Querschnitt A zusammenfällt. Die Strecke zwischen diesem $\triangle P$ und dem folgenden Pfeiler ist dann total zu belasten, weil jede dieser Belastungen das negative Moment in A vergrössert, wie die Figur es andeutet.

Da das vorhin ausgesprochene Abwechseln von belasteten mit unbelasteten Oeffnungen ganz allgemein gilt, so folgt, dass alle folgenden Oeffnungen, welche von dieser belasteten Strecke durch eine gerade Zahl Pfeiler getrennt sind, belastet sein müssen. Dagegen müssen alle vorausgehenden Oeffnungen, welche von der ihnen benachbarten unbelasteten Strecke durch eine ungerade Zahl Pfeiler getrennt sind, unbelastet sein, wie wir es Fig. 132 angedeutet haben.

Nebenbei wollen wir auch noch bemerken, dass die in Fig. 132 dargestellte Belastung die Summe der ausserhalb $\triangle P$ wirkenden Kräfte zum Maximum macht.

Fällt der Punkt A mit dem nächsten Pfeiler zusammen, so

verschwindet auch gleichzeitig die Strecke zwischen diesem und zwischen $\triangle P$.

Das Moment $\mathfrak{P}$ und die Summe P der ausserhalb eines Pfeilerquerschnittes wirkenden Kräfte werden daher ein Maximum, wenn die beiden anstossenden Oeffnungen total belastet sind, und dann belastete und unbelastete Oeffnungen abwechseln.

Will man das oben principiell behauptete Abwechseln der belasteten und unbelasteten Strecken mit dieser letzten Belastungsart in Einklang bringen, so hat man sich nur daran zu erinnern: dass das Zusammenstossen der beiden belasteten Strecken nur daher rührt, dass für den einzigen Punkt über dem Pfeiler die unbelastete Strecke bei A unendlich klein wird.

Ueber die ungünstigste Belastungsart hinsichtlich der Momente auf beiden Strecken zwischen den wirklichen und zwischen den Inflectionspunkten J, J' der Aussenbelastungen lässt sich nichts Bestimmtes sagen, weil innerhalb derselben der Balken bald aufwärts, bald abwärts gebogen sein kann; in jedem gegebenen Falle aber wird man leicht durch Betrachtungen, wie die obigen, die ungünstigste Belastungsart bestimmen können.

Zweites Kapitel.

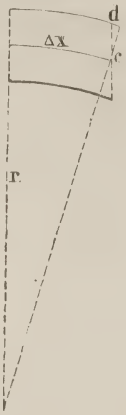
Bestimmung der Pfeilermomente.

97. Momentengleichung des continuirlichen Balkens.

Wir gelangen zu einer Gleichung zwischen den Pfeilermomenten eines continuirlichen Balkens, indem wir ausdrücken, dass die Axe des Balkens als elastische Linie durch die gegebenen Punkte über den Pfeilern gehen müsse. Eine Beziehung zwischen den Momenten der innern Kräfte des Balkens und der Form der Axe erhält man dadurch, dass ϱ, die Spannung in der äussersten Faser: durch ε, den Elasticitätsmodul, und durch den Krümmungshalbmesser r des Balkens ausgedrückt wird.

Bezeichnen wir mit d die Ausdehnung der Faser, welche in der neutralen Axe oder vor der Biegung die Länge $\triangle x$ hatte, so verhält sich offenbar $\frac{\varrho}{\varepsilon} = \frac{d}{\triangle x}$: weil der Elasticitätsmodul die Faser um die eigne Länge $\triangle x$ ausdehnen würde und sich die Ausdehnungen wie die Kräfte verhalten, durch die sie erzeugt werden. Andrerseits ist aber auch (siehe Fig. 133) $\frac{d}{\triangle x} = \frac{c}{r}$, wenn wir, wie früher, mit c die Entfernung der äussersten Faser von der neutralen Axe bezeichnen. Wir haben demnach

Fig. 133.



$$\varrho = \varepsilon \cdot \frac{c}{r} = \varepsilon \cdot c \frac{d^2 y}{dx^2}$$

wenn in dem durch die Coordinaten der Axe x und y ausgedrückten Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot d^2 y}$$

dy gegen dx wegen der ausserordentlich geringen Krümmung des Balkens vernachlässigt wird.

Wir denken uns hierbei als Axe der x eine beliebige horizontale Linie; als Axe der y eine verticale, die durch den Pfeiler i geht; die Richtung gegen den Pfeiler $i + 1$ ist die positive. Bestimmte Werthe von x und y werden wie bisher immer durch Zeiger bezeichnet, insbesondere aber ist $x_{i+1} = l_i$ gleich der Spannweite der Oeffnung nach dem $i$ten Pfeiler.

Es ist obiges die allbekannte Ableitung, die wir nur wiederholten, um sie unsrer Bezeichnungsweise anzupassen, und bezüglich der auch das S. 212 Gesagte gilt.

Laut Nr. 76 S. 215 ist nun das Moment der innern, am Balken wirkenden Kräfte:

$$= \frac{\varrho}{c} \sum y^2 \triangle F = (\varrho\, ab)\, z''' = \frac{\varrho\, k^2 F}{c};$$

und nach Substitution des obigen Werthes von ϱ

$$= (\varepsilon\, ab)\, c\, z''' \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon k^2 F \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \mathfrak{E} \frac{d^2 y}{dx^2},$$

wo $\mathfrak{E}$ das Elasticitätsmoment:

$$\mathfrak{E} = (\varepsilon\, ab)\, c\, z''' = \varepsilon\, k^2 F$$

bezeichnet.

Dem Moment der innern Kräfte muss das Moment der äussern gleich sein.

Bezeichnet $\mathfrak{P}$ das Moment der äussern Kräfte unter der Voraussetzung, dass der Balken nicht continuirlich sei ($\mathfrak{P}$ hat in so fern Nr. 93 S. 275 gegenüber eine beschränkte Bedeutung), so wird das wirkliche Moment des continuirlichen Balkens gleich:

$$\mathfrak{P}_i \cdot \frac{l_i - x}{l_i} + \mathfrak{P}_{i+1} \frac{x}{l_i} + \mathfrak{P}$$

sein; denn laut Fig. 122 S. 274 kann die Aenderung des Momentes $\mathfrak{P}$ in Folge der Continuität durch eine gerade Linie dargestellt werden, muss also durch eine lineäre Gleichung von x sich ausdrücken lassen. Obige Gleichung aber genügt, weil für $x = 0$ diese Aenderung $= \mathfrak{P}_i$ und für $x = l_i$ sie $= \mathfrak{P}_{i+1}$ wird; wo $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{P}_{i+1}$ wie weiter oben die Momente über den Pfeilern i und $i+1$ bezeichnen, welche in der Regel entgegengesetzten Sinnes als wie die Momente $\mathfrak{P}$ sind.

Aus obiger Momentengleichung ergiebt sich dann auch laut Nr. 49 S. 129 die Summe der ausserhalb eines Querschnittes wirkenden Kräfte:

$$P = \frac{1}{l_i} (\mathfrak{P}_{i+1} - \mathfrak{P}_i) + \frac{\triangle P}{\triangle x};$$

wo $\frac{\triangle P}{\triangle x}$ die Summe dieser Kräfte bei nicht continuirlichem Balken, und $\frac{1}{l_i} (\mathfrak{P}_{i+1} - \mathfrak{P}_i)$ die von Continuität herrührende Aenderung ist. In dem Maximalmomentenpunkte ist $P = 0$; ausserdem bezeichnen noch die Pfeiler Maximalmomentenpunkte.

Wir erhalten jetzt durch Gleichsetzen der Momente der innern und äussern Kräfte die Gleichung der Axe:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \mathfrak{P}_i \cdot \frac{l_i - x}{l_i \mathfrak{E}} + \mathfrak{P}_{i+1} \cdot \frac{x}{l_i \mathfrak{E}} + \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{E}}.$$

In dieser Gleichung sind $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{P}_{i+1}$ unbekannte, jedoch von x unabhängige Constanten.

$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{E}$ sind bekannte Funktionen von x. Hier muss berücksichtigt werden, dass weder $\mathfrak{P}$ noch $\mathfrak{E}$ durch ein für die ganze Balkenlänge gültiges Gesetz ausgedrückt werden kann. Die Be-

lastung kann aus concentrirten Lasten bestehen; im Querschnitt können Staffeln vorkommen; durch beide wird das Belastungsgesetz geändert. Es mögen x' und x'' die Anfangs- und Endabscissen einer Strecke bezeichnen, innerhalb deren das Belastungsgesetz sich nicht ändert.

Wird endlich noch mit τ_i der Werth von $\frac{dy}{dx}$ über dem Pfeiler i oder die Axentangente daselbst bezeichnet, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \tau_i + \mathfrak{P}_i \sum_i^x \int_{,}^{''} \frac{(l_i - x)\,dx}{l_i \mathfrak{S}} + \mathfrak{P}_{i+1} \sum_i^x \int_{,}^{''} \frac{x\,dx}{l_i \mathfrak{S}}$$

$$+ \sum_i^x \int_{,}^{''} \frac{\mathfrak{P}\,dx}{\mathfrak{S}}$$

wo wir uns bei den Integrationsgrenzen , und „ statt $x_,$ und $x_{,,}$ zu setzen erlaubt haben.

Für die zweite Integration hat man allgemein

$$\int^x dx \sum_i^x \int_{,}^{''} u\,dx = -\int d\,(l - x) \sum_i^x \int_{,}^{''} u\,dx + C$$

$$= -(l - x) \sum_i^x \int_{,}^{''} u\,dx + \int^x u\,(l - x)\,dx + C$$

$$\text{weil } d \cdot \sum_i^x \int_{,}^{''} u\,dx = u\,dx \text{ ist.}$$

Bei Bestimmung der Constanten C ist nun zu berücksichtigen, dass die Axe des Balkens eine continuirliche Curve bildet und dass daher die y auf den Grenzen x' und x'' in einander übergehen müssen. Bezieht sich daher x auf das Intervall jenseits x'', so muss nothwendiger Weise in der Constanten C das ganze bestimmte Integral $\int_{,}^{''} u\,(l - x)\,dx$ enthalten sein. Da nun dasselbe auch von dem Intervall vor x' und so fort bis zum ersten gesagt werden kann, so folgt, dass C die Summe aller bestimmten Integrale der vorausgehenden Intervalle $\int_{,}^{''} u\,(l - x)\,dx$ enthalten muss. Vereinigt man diese Summe auch noch mit $\int^x u\,(l - x)\,dx$, so erhält man:

$$\int^x dx \sum_i^x{}' \int'' u\,dx = \sum_i^x{}' \left[\int'' u\,(l-x)\,dx - (l-x) \int'' u\,dx \right];$$

$(l-x)$ darf unter $\sum_i^x{}'$ hereingesetzt werden, weil x als obere Grenze von $\sum'$, constant bezüglich desselben ist.

Wird nun auf dieselbe Weise $\frac{dy}{dx}$ integrirt, so erhält man:

$$y = y_i + \tau_i x + \mathfrak{P}_i \sum_i^x{}' \left(\int'' \frac{(l_i - x)^2\,dx}{\mathfrak{S} l_i} - (l_i - x) \int'' \frac{(l_i - x)\,dx}{\mathfrak{S} l_i} \right)$$

$$+ \mathfrak{P}_{i+1} \sum_i^x{}' \left(\int'' \frac{(l_i - x)\,x\,dx}{\mathfrak{S} l_i} - (l_i - x) \int'' \frac{x\,dx}{\mathfrak{S} l_i} \right)$$

$$+ \sum_i^x{}' \left(\int'' \frac{\mathfrak{P}\,(l_i - x)\,dx}{\mathfrak{S}} - (l_i - x) \int'' \frac{\mathfrak{P}\,dx}{\mathfrak{S}} \right).$$

Mittelst dieser Gleichung kann y berechnet werden, wenn τ_i, $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{P}_{i+1}$ bekannt sind.

Um τ_i zu bestimmen, machen wir in dieser Gleichung $x = l_i$ und erhalten:

$$-\tau_i = \frac{y_i - y_{i+1}}{l_i} + \mathfrak{P}_i \sum_i^{i+1}{}' \int'' \frac{(l_i - x)^2\,dx}{\mathfrak{S} l_i^2}$$

$$+ \mathfrak{P}_{i+1} \sum_i^{i+1}{}' \int'' \frac{(l_i - x)\,x\,dx}{\mathfrak{S} l_i^2} + \sum_i^{i+1}{}' \int'' \frac{\mathfrak{P}\,(l_i - x)\,dx}{\mathfrak{S} l_i}.$$

Dieses τ_i können wir aber auch noch erhalten, wenn wir alle bisherigen Operationen gerade so für die Oeffnung zwischen dem $i-1$ten und $i$ten Pfeiler ausführen, wie wir es jetzt für die zwischen dem $i$ten und $i+1$ten gethan haben. Wir vertauschen zu dem Ende die positive Seite der x mit der negativen, was durch die Grenzen der Summenzeichen ganz unzweideutig angedeutet werden kann, indem die x nur mehr unter denselben vorkommen. Es soll also $\sum_i^{i-1}{}'$ andeuten, dass die unter diesem Zeichen vorkom-

menden $+x$ von i gegen $i-1$ hin zu nehmen, ebenso wie die $+x$ unter $\sum_{i}^{i+1}$ von i gegen $i+1$ hin zu nehmen sind.

Wir erhalten dann den Werth der Tangente, welche die Axe mit der Horizontalen gegen $i-1$ hin bildet, genau wie oben:

$$-\tau'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{l_{i-1}} + \mathfrak{P}_i \sum_{i}^{i-1} \int_{,}^{''} \frac{(l_{i-1}-x)^2\,dx}{\mathfrak{E}\,I^2_{i-1}} + \mathfrak{P}_{i-1} \sum_{i}^{i-1} \int_{,}^{''} \frac{(l_{i-1}-x)\,x\,dx}{\mathfrak{E}\,I^2_{i-1}} + \sum_{i}^{i-1} \int_{,}^{''} \frac{\mathfrak{P}\,(l_{i-1}-x)\,dx}{\mathfrak{E}\,I_{i-1}}.$$

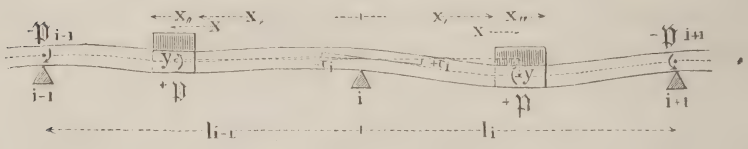
Durch Addition der beiden τ_i erhalten wir die Fundamentalgleichung, welche alle Beziehungen zwischen den Kräften ausdrückt, welche an einem über den Pfeiler i gestreckten continuirlichen Balken wirken:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{P}_{i-1} \sum_{i}^{i-1} \int_{,}^{''} \frac{(l_{i-1}-x)\,x\,dx}{\mathfrak{E}\,I^2_{i-1}} + \mathfrak{P}_i \left[\sum_{i}^{i-1} \int_{,}^{''} \frac{(l_{i-1}-x)^2\,dx}{\mathfrak{E}\,I^2_{i-1}} + \sum_{i}^{i+1} \int_{,}^{''} \frac{(l_i-x)^2\,dx}{\mathfrak{E}\,I^2_i} \right] + \mathfrak{P}_{i+1} \sum_{i}^{i+1} \int_{,}^{''} \frac{(l_i-x)\,x\,dx}{\mathfrak{E}\,I^2_i} \\
&- y_{i-1} \cdot \frac{1}{l_{i-1}} \qquad + y_i \left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i} \right) \qquad - y_{i+1} \cdot \frac{1}{l_i} \\
&\qquad + \sum_{i}^{i-1} \int_{,}^{''} \frac{\mathfrak{P}\,(l_{i-1}-x)\,dx}{\mathfrak{E}\,l_{i-1}} + \sum_{i}^{i+1} \int_{,}^{''} \frac{\mathfrak{P}\,(l_i-x)\,dx}{\mathfrak{E}\,l_i} \\
&\qquad + \tau'_i \qquad\qquad + \tau_i \qquad\qquad = 0.
\end{aligned}$$

Damit keine Zweifel über die Bedeutung und namentlich über das Zeichen der in derselben vorkommenden Grössen bestehen, stellen wir dieselben in Fig. 134 zusammen.

In der Gleichung sind alle vom Pfeiler i aus gemessenen x absolut, also immer mit dem Zeichen, das sie in der Gleichung haben, zu nehmen; ebenso auch l_{i-1} und l_i, welche nichts anderes als besondere Werthe von x sind.

Fig. 134.



$\mathfrak{E}$ das Elasticitätsmoment ist immer positiv.

$+ y$ und $+ \tau$ werden in beiden Oeffnungen abwärts aufgetragen. Wird also, wie in Fig. 134, $y_i = 0$ angenommen, so ist die Ordinate aller Punkte der Balkenaxe, welche tiefer als über dem Pfeiler i liegen, positiv; aller, welche höher liegen, negativ. Endlich haben die Tangenten aller Balkenstrecken das Zeichen $+$ wenn sie von i ausgehend fallen, dagegen das Zeichen $-$ wenn sie aufsteigen.

Gleichungen, wie die obigen, können so viele aufgestellt werden, als Zwischenpfeiler vorhanden sind; wir können daher eben so viele unbekannte Grössen bestimmen.

Immer nimmt man die Form und Belastung des Balkens als gegeben an, so dass also immer $\mathfrak{E}$ und J, mithin auch die Σ bekannt sind. Betrachten wir dann wie gewöhnlich die Pfeilermomente als Unbekannte, so haben wir, weil die Momente über den Widerlagern $= 0$, also bekannt sind, eben so viele Unbekannte als Gleichungen und können daher über die y und τ frei verfügen.

Liegen alle Stützpunkte gleich hoch, so sind alle y für die Pfeiler $= 0$. Wurde der Balken in seiner ganzen Länge auf einem horizontalen Boden zusammengesetzt, so müssen sich τ_i und τ'_i auf ihre gegenseitigen Verlängerungen beziehen (siehe Fig. 134), und es muss dann auch $\tau_i + \tau'_i = 0$ gesetzt werden. In diesem Falle also reducirt sich die Fundamentalgleichung auf die obere Zeile, und die Bestimmung der Pfeilermomente reducirt sich auf die Lösung eines Systems lineärer Gleichungen.

Nimmt man diese Grössen nicht gleich 0 an, so hat man einfach ihre Werthe zu den nicht mit einem $\mathfrak{P}_i$ multiplicirten Σ zu addiren, um die Constante in der lineären Gleichung der $\mathfrak{P}_i$ zu

bilden. $\tau_i + \tau'_i$ wäre z. B. nicht gleich 0, wenn man die Balkenstücke einzeln aufbringen und dann in ihrer Lage über dem Pfeiler zusammennieten würde. Trägt der Balken nur sein Eigengewicht, so ist das Moment über dem Pfeiler $i = 0$; wir können aus diesem Eigengewicht die $\tau_i + \tau'_i$ berechnen. Durch das Zusammennieten wird nun dieses $\tau_i + \tau'_i$ fixirt, und wenn man dann das Verhalten der beiden bei i zusammenstossenden Oeffnungen unter einer weitern zufälligen Belastung durch obige Gleichung ausdrücken wollte, so hätte man das berechnete $\tau_i + \tau'_i$ einzusetzen.

Wir bemerken, dass die $\mathfrak{P}_i$ und die y_i in der Fundamentalgleichung ganz symmetrisch vorkommen. Wir können daher auch umgekehrt über jedes $\mathfrak{P}_i$ disponiren und das betreffende y_i als Unbekannte betrachten; oder überhaupt wir können wegen dieser vollkommenen Symmetrie bei dem einen Pfeiler $\mathfrak{P}_i$, bei dem andern y_i ganz nach Willkür annehmen, und umgekehrt, ohne dadurch das Geringste an der Zahl der Gleichungen und dem Vorkommen der Unbekannten in ihnen zu ändern. Es ändert daher dies auch durchaus nichts an den Lösungen der folgenden Nummer, statt $\mathfrak{P}_i$ y_i zu setzen, mit Vertauschung ihrer Coefficienten, wie es sich von selbst versteht. Auf diese Weise wird z. B. gerechnet, wenn man das Moment $\mathfrak{P}_i$, das über den Pfeilern häufig viel grösser als in der Mitte wird, bei Balken gleichen Querschnittes etwas verändern will; man nimmt dann das $\mathfrak{P}_i$ als gegeben kleiner an und berechnet das entsprechende y_i. In der Regel ist dieses so klein, dass es keinen Uebelstand hinsichtlich der Steigungsverhältnisse bedingt, wenn die Balkenaxe durch das berechnete y_i geführt wird; soll jedoch dies nicht stattfinden und der Balken nach seiner Vollendung geradlinig erscheinen: so kann man auch dem Boden, auf dem er zusammengesetzt wird, an den Pfeilerstellen Ecken geben, die den entgegengesetzt sind, welche die verschiedenen y_i selbst verlangen.

Auch wird mitunter, um $\mathfrak{P}_i$ zu vermindern, jedes Balkenstück gerad gebaut, und dann vor dem Zusammennieten an einem oder an beiden dem Stoss gegenüberliegenden Enden gesenkt oder gehoben, je nachdem die Brücken in der Mitte noch unterstützt oder es nicht mehr sind. Dieses Verfahren ist damit gleichbedeutend, ein gewisses bestimmtes $\tau_i + \tau'_i$ herzustellen. Soll dieses $\tau_i + \tau'_i$ so berechnet werden, dass $\mathfrak{P}_i$ einen bestimmten Werth annehme, so modificirt sich das obige Verfahren dadurch etwas, dass $\tau_i + \tau'_i$

nicht wie y_i und symmetrisch mit $\mathfrak{P}_i$ vorkommt. Da in der Pfeilergleichung i nur $\tau_i + \tau'_i$ und nicht auch $\tau_{i-1} + \tau'_{i-1}$ und $\tau_{i+1} + \tau'_{i+1}$ vorkommen, so kommt auch in der von $i - 1$ und von $i+1$ kein $\tau_i + \tau'_i$ vor. Wird daher der Werth von $\mathfrak{P}_i$ in allen vorausgehenden und in allen folgenden Fundamentalgleichungen als gegeben angenommen, so enthalten beide Gruppen nicht mehr Unbekannte als Gleichungen; aus der einen Gruppe kann daher $\mathfrak{P}_{i-1}$, aus der andern $\mathfrak{P}_{i+1}$ bestimmt werden, und die Substitution der hierfür erhaltenen Werthe in die Pfeilergleichung i giebt $\tau_i + \tau'_i$.

Nachdem wir gezeigt haben, dass alle Forderungen der Praxis bezüglich des continuirlichen Balkens in der obigen Fundamentalgleichung ihren Ausdruck finden können; und dass man dann immer eine genügende Zahl Gleichungen erhält, um alle Unbekannten zu bestimmen: bleibt uns nichts mehr übrig, als die Bestimmung wirklich vorzunehmen.

98. Lösung der Momentengleichungen.

Wir betrachten eine Gruppe von n Oeffnungen. Der bisherigen Bezeichnung entsprechend tragen dann die beiden Widerlager die Zeiger o und n, und die Spannweite der ersten Oeffnung wird mit l_o, die der letzten mit l_{n-1} bezeichnet.

Ferner setzen wir der Abkürzung wegen die nur von der Form des Balkens und von den Belastungen abhängigen Constanten der Fundamentalgleichung gleich:

$$\alpha_i = \sum_{i}^{i-1} \int_{,}^{''} \frac{(l_{i-1} - x)^2 \, dx}{\mathfrak{S} \, l^2_{i-1}} + \sum_{i}^{i+1} \int_{,}^{''} \frac{(l_i - x)^2 \, dx}{\mathfrak{S} \, l^2_i},$$

$$\lambda_i = \sum_{i}^{i+1} \int_{,}^{''} \frac{(l_i - x) \, x \, dx}{\mathfrak{S} \, l^2_i} = \sum_{i+1}^{i} \int_{,}^{''} \frac{(l_i - x) \, x \, dx}{\mathfrak{S} \, l^2_i},$$

$$\mathfrak{S}_i = \sum_{i}^{i-1} \int_{,}^{''} \frac{\mathfrak{P} \, (l_{i-1} - x) \, dx}{\mathfrak{S} \, l_{i-1}} + \sum_{i}^{i+1} \int_{,}^{''} \frac{\mathfrak{P} \, (l_i - x) \, dx}{\mathfrak{S} \, l_i}$$

$$- y_{i-1} \frac{1}{l_{i-1}} + y_i \left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i} \right) - y_{i+1} \cdot \frac{1}{l_i} + \tau'_i + \tau_i;$$

und die Fundamentalgleichung wird:

$$\lambda_{i-1}\,\mathfrak{P}_{i-1} + \alpha_i\mathfrak{P}_i + \lambda_i\mathfrak{P}_{i+1} + \mathfrak{C}_i = 0.$$

Die Gleichungen des ersten und letzten Pfeilers sind dann, weil $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_n = 0$ sind:

$$\begin{aligned} \alpha_1\;\;\mathfrak{P}_1 \;\;+ \lambda_1\;\;\mathfrak{P}_2 \;\;+ \mathfrak{C}_1 \;\;&= 0,\\ \lambda_{n-2}\,\mathfrak{P}_{n-2} + \alpha_{n-1}\,\mathfrak{P}_{n-1} + \mathfrak{C}_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Wären $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_n$ nicht $= 0$, aber bekannt, wie es z. B. der Fall wäre, wenn der Balken ein Stück über die Widerlager vorstände, so wären diese Werthe einfach zu $\mathfrak{C}$ zu schlagen.

Die Determinante des $n-1$ ten Grades des Systems der lineären Gleichungen ist daher:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda_1 & & & & & & \\ \lambda_1 & \alpha_2 & \lambda_2 & & & & & \\ & \lambda_2 & \alpha_3 & \lambda_3 & & & & \\ & & \lambda_3 & . & . & & & \\ & & & . & . & \lambda_{n-4} & & \\ & & & & \lambda_{n-4} & \alpha_{n-2} & \lambda_{n-3} & \\ & & & & & \lambda_{n-3} & \alpha_{n-2} & \lambda_{n-2} \\ & & & & & & \lambda_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{vmatrix}$$

in der alle nicht angeschriebenen Elemente $= 0$ sind.

Zur Bestimmung von $\mathfrak{P}_i$ hat man nun die Gleichung

$$D\,\mathfrak{P}_i + \sum_{k=1}^{k=n-1}{}' (-1)^{i+k}\,\gamma_{ki}\,\mathfrak{C}_k = 0$$

worin γ_{ik} eine Determinante $n-2$ ten Grades ist, die aus D hervorgeht, wenn in dieser die i ten Vertical- und die k ten Horizontalreihen ausgelassen werden. Oder es ist:

$$\gamma_{ki} = \begin{vmatrix} . & . & & & & & & & & \\ . & \alpha_{i-2} & \lambda_{i-2} & & o & & & & & \\ & \lambda_{i-2} & \alpha_{i-1} & & o & o & & & & \\ & o & \lambda_{i-1} & & \lambda_i & o & o & & & \\ & & o & & \alpha_{i+1} & \lambda_{i+1} & o & . & & \\ & & & & \lambda_{i+1} & \alpha_{i+2} & . & o & o & \\ & & & & & . & \alpha_{k-2} & \lambda_{k-2} & o & o \\ & & & & & & \lambda_{k-2} & \alpha_{k-1} & \lambda_{k-1} & o \quad o \\ & & & & & & & o & \lambda_k & \alpha_{k+1}\;\lambda_{k+1}\;. \\ & & & & & & & & o & \lambda_{k+1}\;\alpha_{k+2}\;. \\ & & & & & & & & & . \quad . \end{vmatrix}$$

worin die 6 ausgefallenen Elemente durch starke Punkte angedeutet sind. Theilt man nun alle Elemente von γ_{ki}, sowie es oben angedeutet ist, in drei quadratische Felder, und bemerkt man, dass es nicht möglich ist, irgend zwei Horizontal- oder irgend zwei Verticalreihen zweier verschiedener Felder miteinander zu vertauschen, ohne dass in das eine oder in das andere Feld eine ganze Reihe o käme: so folgt, dass γ_{ki} gleich dem Product der drei durch die Eintheilung bezeichneten Determinanten sei.

Wir wollen $\sum \pm \alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}$ oder die erste Determinante, deren Anfangsglied noch α_{i-1} enthält, mit D_{i-1}, die letzte Determinante $\sum \pm \alpha_{k+1} \ldots \alpha_{n-1}$, deren Anfangsglied mit α_{k+1} beginnt, mit R_{k+1} bezeichnen: dann wird, weil die mittlere Determinante sich auf das Anfangsglied reducirt, indem auf der einen Seite der Diagonalen nur o stehen:

$$\gamma_{ki} = D_{i-1}\, \lambda_i\, \lambda_{i+1} \ldots \lambda_{k-2}\, \lambda_{k-1}\, R_{k+1}.$$

Da in D das Element $(ik) = (ki)$ ist, so ist auch $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$; es werden daher alle γ ganz mechanisch und ganz abgesehen davon, ob k oder i der Zeiger von $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{S}$ ist, gebildet: indem man alle Zeiger von dem dem niedrigsten vorausgehenden bis zu dem dem höchsten folgenden anschreibt, zum niedrigsten D, zum höchsten R, zu allen Zwischenzeigern λ setzt und das höchste λ streicht.

Zu den einzelnen D_i und R_k gelangt man gar leicht, wenn man erstere durch die Elemente der letzten Reihe ausdrückt; man hat dann:

$$D_i = \alpha_i D_{i-1} - \lambda_{i-1} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda_1 & & \\ \lambda_1 & . & \lambda_{i-3} & o \\ & \lambda_{i-3} & \alpha_{i-2} & \lambda_{i-2} \\ & o & o & \lambda_{i-1} \end{vmatrix} = \alpha_i D_{i-1} - \lambda^2_{i-1} D_{i-2}$$

als einfaches Bildungsgesetz aller Determinanten. Beginnt man bei der Berechnung der D vorn, so hat man $D_o = 1$ zu setzen, weil bei der Bestimmung von $\mathfrak{P}_1$ γ_{ik} sich auf das Product der beiden letzten Quadrate reducirt und nicht $= o$ wird.

Alles jetzt von D Gesagte gilt natürlich auch von R, man erhält daher alle zur Bestimmung der $\mathfrak{P}_i$ nothwendigen D und R durch Berechnung des folgenden Schemas:

$$
\begin{array}{lllll}
D_0 = 1, & & & & R_n = 1, \\
D_1 = \alpha_1, & & & & R_{n-1} = \alpha_{n-1}, \\
D_2 = \alpha_2 \ \alpha_1 & - \lambda^2_1, & & & R_{n-2} = \alpha_{n-2}\ \alpha_{n-1} - \lambda^2_{n-2}, \\
D_3 = \alpha_3 \ D_2 & - \lambda^2_2 \ D_1, & & & R_{n-3} = \alpha_{n-3} R_{n-2} - \lambda^2_{n-3} R_{n-1}, \\
\cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
D_i = \alpha_i \ D_{i-1} & - \lambda^2_{i-1} \ D_{i-2}, & & & R_k = \alpha_k \ R_{k+1} - \lambda^2_k \ R_{k+2}, \\
\cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
D_{n-1} = \alpha_{n-1} D_{n-2} & - \lambda^2_{n-2} D_{n-3} = D = R_1 & = \alpha_1 \ R_2 & - \lambda^2_1 \ R_3. &
\end{array}
$$

Ganz nebenbei bemerken wir auch, dass die Zerlegung von D in Partialdeterminanten:

$$D = D_i \, R_{i+1} - \lambda^2_i \, D_{i-1} \, R_{i+2}$$

giebt. Wir werden diese Formel zwar nie benutzen, allein sie leistet gute Dienste, wenn man das Nr. 95 S. 279 geometrisch Bewiesene auch analytisch nachweisen will.

Da die Coefficienten α und λ nur von der Form und der Unterstützung abhängig sind, indem alles die Belastung Betreffende in $\mathfrak{G}$ enthalten ist, so werden die D gleich den R, wenn der Balken symmetrisch gebaut ist. Es ist dann allgemein:

$$\alpha_i = \alpha_{n-i}; \ \lambda_i = \lambda_{n-i-1} \text{ und } D_i = R_{n-i}.$$

Sind durch diese einfachen Rechnungen alle D und R bestimmt, so erhält man unmittelbar $\mathfrak{P}_i$ aus:

$$D\,\mathfrak{P}_i + \sum_{k=1}^{k=n-1} (-1)^{i+k} \, (D_{i-1} \, \lambda_i \, \lambda_{i+1} \, \ldots\ldots \, \lambda_{k-2} \, \lambda_{k-1} \, R_{k+1}) \, \mathfrak{G}_k = 0;$$

wo das i in der Klammer sich nicht mehr auf den Zeiger von $\mathfrak{P}$, und das k sich nicht mehr auf den Zeiger von $\mathfrak{G}$ speciell beziehen, sondern worin i immer den niedrigeren und k den höheren dieser beiden Suffixe bezeichnen.

Dass i und k keiner der Grössen $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{G}$ speciell zugeschrieben zu werden brauchen, geht daraus hervor, dass der Coefficient von $\mathfrak{G}_i$ in der Gleichung des Moments $\mathfrak{P}_k$ gleich dem von $\mathfrak{G}_k$ in der Gleichung des Moments $\mathfrak{P}_i$ oder, wie wir uns oben ausgedrückt haben, $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ ist.

Da man bei Berechnung eines Balkens alle Pfeilermomente braucht, so wollen wir hier dieselben für einige continuirliche Balken anschreiben. Es dienen die folgenden Schemas auch dazu, das Bildungsgesetz der ersteren plastischer hervorzuheben, um einige Bemerkungen daran zu knüpfen.

Man hat bei

2 Oeffnungen:

$$o = \alpha_1 \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{E}_1.$$

3 Oeffnungen:

$$o = D_2 \mathfrak{P}_1 + R_2 \mathfrak{E}_1 - \lambda_1 \mathfrak{E}_2,$$
$$o = D_2 \mathfrak{P}_2 - \lambda_1 \mathfrak{E}_1 + D_1 \mathfrak{E}_2.$$

4 Oeffnungen:

$$o = D_3 \mathfrak{P}_1 + R_2 \mathfrak{E}_1 - \lambda_1 R_3 \mathfrak{E}_2 + \lambda_1 \lambda_2 \mathfrak{E}_3,$$
$$o = D_3 \mathfrak{P}_2 - \lambda_1 R_3 \mathfrak{E}_1 + D_1 R_3 \mathfrak{E}_2 - D_1 \lambda_2 \mathfrak{E}_3,$$
$$o = D_3 \mathfrak{P}_3 + \lambda_1 \lambda_2 \mathfrak{E}_1 - D_1 \lambda_2 \mathfrak{E}_2 + D_2 \mathfrak{E}_3.$$

5 Oeffnungen:

$$o = D_4 \mathfrak{P}_1 + R_2 \mathfrak{E}_1 - \lambda_1 R_3 \mathfrak{E}_2 + \lambda_1 \lambda_2 R_4 \mathfrak{E}_3 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mathfrak{E}_4,$$
$$o = D_4 \mathfrak{P}_2 - \lambda_1 R_3 \mathfrak{E}_1 + D_1 R_3 \mathfrak{E}_2 - D_1 \lambda_2 R_4 \mathfrak{E}_3 + D_1 \lambda_2 \lambda_3 \mathfrak{E}_4,$$
$$o = D_4 \mathfrak{P}_3 + \lambda_1 \lambda_2 R_4 \mathfrak{E}_1 - D_1 \lambda_2 R_4 \mathfrak{E}_2 + D_2 R_4 \mathfrak{E}_3 - D_2 \lambda_3 \mathfrak{E}_4,$$
$$o = D_4 \mathfrak{P}_4 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mathfrak{E}_1 + D_1 \lambda_2 \lambda_3 \mathfrak{E}_2 - D_2 \lambda_3 \mathfrak{E}_3 + D_3 \mathfrak{E}_4.$$

6 Oeffnungen:

$$o = D_5 \mathfrak{P}_1 + R_2 \mathfrak{E}_1 - \lambda_1 R_3 \mathfrak{E}_2 + \lambda_1 \lambda_2 R_4 \mathfrak{E}_3 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 R_5 \mathfrak{E}_4 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \mathfrak{E}_5,$$
$$o = D_5 \mathfrak{P}_2 - \lambda_1 R_3 \mathfrak{E}_1 + D_1 R_3 \mathfrak{E}_2 - D_1 \lambda_2 R_4 \mathfrak{E}_3 + D_1 \lambda_2 \lambda_3 R_5 \mathfrak{E}_4 - D_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \mathfrak{E}_5,$$
$$o = D_5 \mathfrak{P}_3 + \lambda_1 \lambda_2 R_4 \mathfrak{E}_1 - D_1 \lambda_2 R_4 \mathfrak{E}_2 + D_2 R_4 \mathfrak{E}_3 - D_2 \lambda_3 R_5 \mathfrak{E}_4 + D_2 \lambda_3 \lambda_4 \mathfrak{E}_5,$$
$$o = D_5 \mathfrak{P}_4 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 R_5 \mathfrak{E}_1 + D_1 \lambda_2 \lambda_3 R_5 \mathfrak{E}_2 - D_2 \lambda_3 R_5 \mathfrak{E}_3 + D_3 R_5 \mathfrak{E}_4 - D_3 \lambda_4 \mathfrak{E}_5,$$
$$o = D_5 \mathfrak{P}_5 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \mathfrak{E}_1 - D_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \mathfrak{E}_2 + D_2 \lambda_3 \lambda_4 \mathfrak{E}_3 - D_3 \lambda_4 \mathfrak{E}_4 + D_4 \mathfrak{E}_5.$$

7 Oeffnungen:

$$o = D_6 \mathfrak{P}_1 + R_2 \mathfrak{E}_1 - \lambda_1 R_3 \mathfrak{E}_2 + \lambda_1 \lambda_2 R_4 \mathfrak{E}_3 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 R_5 \mathfrak{E}_4 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 R_6 \mathfrak{E}_5 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \mathfrak{E}_6,$$
$$o = D_6 \mathfrak{P}_2 - \lambda_1 R_3 \mathfrak{E}_1 + D_1 R_3 \mathfrak{E}_2 - D_1 \lambda_2 R_4 \mathfrak{E}_3 + D_1 \lambda_2 \lambda_3 R_5 \mathfrak{E}_4 - D_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 R_6 \mathfrak{E}_5 + D_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \mathfrak{E}_6,$$
$$o = D_6 \mathfrak{P}_3 + \lambda_1 \lambda_2 R_4 \mathfrak{E}_1 - D_1 \lambda_2 R_4 \mathfrak{E}_2 + D_2 R_4 \mathfrak{E}_3 - D_2 \lambda_3 R_5 \mathfrak{E}_4 + D_2 \lambda_3 \lambda_4 R_6 \mathfrak{E}_5 - D_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \mathfrak{E}_6,$$
$$o = D_6 \mathfrak{P}_4 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 R_5 \mathfrak{E}_1 + D_1 \lambda_2 \lambda_3 R_5 \mathfrak{E}_2 - D_2 \lambda_3 R_5 \mathfrak{E}_3 + D_3 R_5 \mathfrak{E}_4 - D_3 \lambda_4 R_6 \mathfrak{E}_5 + D_3 \lambda_4 \lambda_5 \mathfrak{E}_6,$$
$$o = D_6 \mathfrak{P}_5 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 R_6 \mathfrak{E}_1 - D_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 R_6 \mathfrak{E}_2 + D_2 \lambda_3 \lambda_4 R_6 \mathfrak{E}_3 - D_3 \lambda_4 R_6 \mathfrak{E}_4 + D_4 R_6 \mathfrak{E}_5 - D_4 \lambda_5 \mathfrak{E}_6,$$
$$o = D_6 \mathfrak{P}_6 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \mathfrak{E}_1 + D_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \mathfrak{E}_2 - D_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \mathfrak{E}_3 + D_3 \lambda_4 \lambda_5 \mathfrak{E}_4 - D_4 \lambda_5 \mathfrak{E}_5 + D_5 \mathfrak{E}_6.$$

Im Werth von $D\,\mathfrak{P}_i$ reducirt sich der Coefficient von $\mathfrak{S}_i$ auf $+\,D_{i-1}\,R_{i+1}$ und enthält demnach kein λ. Da die λ den α und demnach auch den D gegenüber kleine Grössen sind, so ist $+\,D_{i-1}\,R_{i+1}\,\mathfrak{S}_i$ meistens grösser als die Summe aller übrigen Glieder und bestimmt daher das Zeichen von $\mathfrak{P}_i$; das also unter gewöhnlichen Verhältnissen negativ ist.

Von diesem Glied nehmen die Coefficienten nach beiden Seiten hin ab, weil sie immer mehr und mehr λ als Factoren enthalten.

Die sämmtlichen Coefficienten γ_{ii} der $\mathfrak{S}_i$ bilden die abfallende Diagonale des Quadrats derselben; alle Coefficienten γ_{ik} und γ_{ki} welche symmetrisch zu dieser Diagonalen in der Richtung der aufsteigenden Diagonalen gelegen sind, sind identisch. Man hat daher bei Berechnung der Coefficienten für eine Brücke von n Oeffnungen nicht $(n-1)^2$, sondern höchstens nur $^1/_2\,n\,(n-1)$ Coefficienten zu berechnen.

Coefficienten γ_{ik} und $\gamma_{n-k,\,n-i}$ welche symmetrisch zur aufsteigenden Diagonalen in der Richtung der abfallenden liegen, sind auf gleiche Weise gebildet und gehen einer aus dem andern hervor, wenn man die D und R derart miteinander vertauscht, dass ihre Zeiger sich zu n ergänzen; die Coefficienten enthalten die gleiche Zahl λ und ihre Zeiger ergänzen sich zu $n-1$. Ist der Balken symmetrisch gebaut, so sind laut S. 299 solche Coefficienten einander gleich. Die Coefficienten der 4 Dreiecke, in welche ihr Quadrat durch die beiden Diagonalen getheilt wird, sind also in diesem Falle auch einander gleich; man hat daher bei solchen Balken statt $(n-1)^2$ Coefficienten, nur $^1/_4\,n^2$ bei einer geraden Zahl Oeffnungen und $^1/_4\,(n^2-1)$ bei einer ungeraden Zahl Oeffnungen zu berechnen. Für einen Balken von 5 Oeffnungen z. B. gestalten sich die Coefficienten wie folgt:

$$o = D_4\,\mathfrak{P}_1 + \quad D_3\,\mathfrak{S}_1 - \lambda_1\,D_2\,\mathfrak{S}_2 + \lambda_1\,\lambda_2\,D_1\,\mathfrak{S}_3 - \quad \lambda^2_1\,\lambda_2\,\mathfrak{S}_4,$$
$$o = D_4\,\mathfrak{P}_2 - (\lambda_1\,D_2)\,\mathfrak{S}_1 + D_1\,D_2\,\mathfrak{S}_2 - \lambda_2\,D^2_1\,\mathfrak{S}_3 + (\lambda_1\,\lambda_2\,D_1)\,\mathfrak{S}_4.$$

Sodass nicht mehr als die nicht eingeklammerten $^1/_4\,(5^2-1) = 6$ Coefficienten zu berechnen sind, weil sie auch für $\mathfrak{P}_3$ und $\mathfrak{P}_4$ die gleichen sind. Coefficienten von Vertical-und Horizontalreihen, welche dasselbe Glied der abfallenden Diagonale enthalten, sind einander gleich.

Vergleicht man zwei aufeinander folgende Horizontalreihen miteinander, so findet man, dass sie in die folgende Form gebracht werden können:

$$D\,\mathfrak{P}_i + R_{i+1}\,\mathfrak{M} - D_{i-1}\,\lambda_i\,\mathfrak{N} = o,$$
$$D\,\mathfrak{P}_{i+1} - \lambda_i R_{i+2}\,\mathfrak{M} + D_i\,\mathfrak{N} = o;$$

worin $$\mathfrak{M} = \sum_{k=1}^{k=i} (-1)^{i+k} D_{k-1}\,\lambda_k \ldots \lambda_{i-1}\,\mathfrak{G}_k,$$

und $$\mathfrak{N} = \sum_{k=i+1}^{k=n-1} (-1)^{i+k+1}\,\lambda_{i+1} \ldots \lambda_{k-1} R_{k+1}\,\mathfrak{G}_k,$$

und in der Regel positiv sind.

Die von der Continuität herrührende Aenderung des Moments eines Balkens ist nach Nr. 97 S. 290 durch:

$$\mathfrak{P}_i \frac{l_i - x}{l_i} + \mathfrak{P}_{i+1} \frac{x}{l_i},$$

ausgedrückt.

Die Abscisse des Querschnitts, für den diese Aenderung = 0 wird, ist daher:

$$\frac{x}{l_i} = \frac{\mathfrak{P}_i}{\mathfrak{P}_i - \mathfrak{P}_{i+1}} = \frac{-R_{i+1}\,\mathfrak{M} + D_{i-1}\,\lambda_i\,\mathfrak{N}}{-(R_{i+1} + \lambda_i R_{i+2})\,\mathfrak{M} + (D_i + D_{i-1}\,\lambda_i)\,\mathfrak{N}}.$$

Nun ist aber $\mathfrak{M}$ von allen $\mathfrak{G}$, deren Index $\leqq i+1$ ist, unabhängig, mithin wird das von der Belastung irgend einer der auf l_i folgenden Oeffnung herrührende $\mathfrak{M} = 0$ sein, ist aber dies der Fall, so wird:

$$\frac{x}{l_i} = \frac{D_{i-1}\,\lambda_i}{D_i + D_{i-1}\,\lambda_i}. \qquad (J$$

Ebenso wird durch Belastung irgend einer der l_i vorausgehenden Oeffnungen nichts am Moment des Querschnitts geändert, dessen Abscisse durch:

$$\frac{x}{l_i} = \frac{R_{i+1}}{R_{i+1} + \lambda_i R_{i+2}} \qquad (J_1$$

gegeben ist. Es sind dies die von der Belastungsart unabhängigen Abscissen der festen Inflectionspunkte J und J_1, deren Vorhandensein wir schon Nr. 95 S. 282 mittelst reiner statischen Betrachtungen nachgewiesen haben.

Wir schliessen hiermit unsere allgemeinen Entwickelungen. Es hat zwar durchaus keine Schwierigkeiten, mit den erhaltenen Werthen von $\mathfrak{P}$ die analytischen Ausdrücke für die Summe der ausserhalb eines Querschnitts wirkenden Kräfte zu erhalten, allein die Entwickelung derselben kann nimmermehr unser Zweck sein. Es genügt uns, die $\mathfrak{P}$ für die Pfeiler bestimmt zu haben, sobald diese bekannt sind, gelangt man, sowie es Nr. 95 S. 278 angedeu-

tet wurde, gar schnell und leicht graphisch zu allen am Balken wirkenden Kräften. Wir beschränken uns daher, das Obige auf die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fälle anzuwenden und die Anwendung durch einige Beispiele zu erläutern.

99. Der continuirliche Balken constanten Querschnitts.

Ist der Querschnitt des Balkens constant innerhalb einer Oeffnung, so kann in den Gleichungen α, λ, $\mathfrak{G}$ der vorigen Nummer das $\mathfrak{E}$ vor die Integrale und Summenzeichen herausgesetzt werden. Die Summen der beiden erstern reduciren sich auf ein einziges Integral, das ausgeführt werden kann, weil es keine unbestimmte Function von x mehr erhält; man hat also (S. 296), wenn man sich erinnert, dass das x der untern Grenze der Σ und $\int$, $= 0$ ist:

$$\alpha_i = \frac{1}{\mathfrak{E}_{i-1}} \int_i^{i-1} \frac{1}{l^2_{i-1}} (l_{i-1} - x)^2 \, dx + \frac{1}{\mathfrak{E}_i} \int_i^{i+1} \frac{1}{l^2_i} (l_i - x)^2 \, dx$$

$$= \frac{l_{i-1}}{3\,\mathfrak{E}_{i-1}} + \frac{l_i}{3\,\mathfrak{E}_i},$$

und

$$\lambda_i = -\frac{1}{\mathfrak{E}_i} \int_i^{i+1} \frac{1}{l^2_i} (l_i - x)\, x \, dx = \frac{l_i}{6\,\mathfrak{E}_i}.$$

Zu den Σ von $\mathfrak{G}_i$ gelangt man am leichtesten, wenn man sie zuerst für eine einzelne Belastung $\triangle P$ bildet und dann alle $\triangle P$ summirt. Ist b die Abscisse von $\triangle P$, so ändert sich das Belastungsgesetz bei b, und die Summen Σ reduciren sich auf zwei Integrale, eines für die Strecke o bis b, das andere für die Strecke b bis l_i. Innerhalb der ersten Strecke ist:

$$\mathfrak{P} = \frac{x\,(l_i - b) \triangle P}{l_i},$$

innerhalb der zweiten

$$\mathfrak{P} = \frac{b\,(l_i - x) \triangle P}{l_i}$$

Der vom constanten $\triangle P$ herrührende Theil von $\mathfrak{G}_i$ ist daher

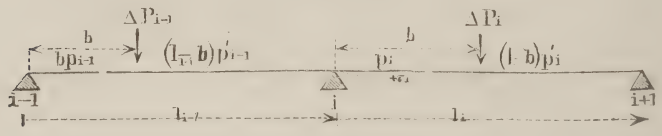
$$\triangle \mathfrak{G}_i = \frac{(l_i - b) \triangle P}{l^2_i\, \mathfrak{E}_i} \int_o^b (l_i - x)\, x \, dx + \frac{b \triangle P}{l^2_i\, \mathfrak{E}_i} \int_b^{l_i} (l_i - x)^2 \, dx$$

$$= \frac{b\,(l_i - b)\,(2\,l_i - b) \triangle P}{6\,l_i\,\mathfrak{E}_i}.$$

Ist nun irgend eine Strecke des Balkens gleichförmig mit p pro Längeneinheit belastet, so hat man nur $\triangle P = p\,d\,b$ zu setzen und innerhalb dieser Strecke zu integriren.

Da laut Nr. 96 S. 285 alle Belastungen, welche für irgend einen Querschnitt die ungünstigsten sind, von einem Pfeiler ausgehen, so werden alle möglicher Weise vorkommende Verhältnisse durch Annahme der durch Fig. 135 dargestellten Belastung der

Fig. 135.



Oeffnung l_i berücksichtigt sein; und man erhält den Theil von $\mathfrak{S}_i$, der sich auf die Oeffnung i bezieht:

$$\mathfrak{S}_i = \frac{1}{6\,l_i\,\mathfrak{S}_i}\int_0^b (2\,l^2_i\,b - 3\,l_i\,b^2 + b^3)\,p_i\,d\,b$$

$$+ \frac{1}{6\,l_i\,\mathfrak{S}_i}\int_b^{l_i} [l^2_i(l_i - b) - (l_i - b)^3]\,p'_i\,d\,p$$

$$= \frac{(2\,l_i - b)^2\,b^2}{24\,l_i\,\mathfrak{S}_i}\,p_i + \frac{(l_i - b)^2[2\,l^2_i - (l_i - b)^2]}{24\,l_i\,\mathfrak{S}_i}\,p'_i$$

Der von der Oeffnung $i-1$ herrührende Theil von l ist genau dem oben entwickelten gleich, sobald man die Abscissen in die von Nr. 97 S. 288 umkehrt. Dieses Vertauschen der positiven Seite derselben mit der negativen hat uns bei der Elimination von z sehr gute Dienste geleistet und bietet auch bei der praktischen Anwendung der Formeln zur Berechnung projectirter Brücken durchaus keine Schwierigkeiten, sondern Erleichterungen dar: doch kann es wünschenswerth sein, auch die Form obiger Gleichungen zu kennen, wenn alle Abscissen b in derselben Richtung, sowie Fig. 135 es andeutet, gemessen werden. Um die Formeln in diesem Sinne zu ändern, hat man nur für die Oeffnung $i-1$ statt b, $l_{i-1} - b$ zu setzen, sowie p' statt p. Bemerkt man endlich noch, dass alle von der Belastung herrührenden Glieder den gemeinschaftlichen Factor $^1/_6$ enthalten, den man daher streichen kann, und dass durch eine Belastungsart die andere nicht ausgeschlossen ist: so erhält man zur Bestimmung der Pfeilermomente $\mathfrak{P}$ für den Fall

dass an die Pfeiler anstossende vertheilte, und innerhalb der Oeffnungen concentrirte Belastungen angenommen werden, die Werthe:

$$\alpha_i = 2\left(\frac{l_{i-1}}{\mathfrak{E}_{i-1}} + \frac{l_i}{\mathfrak{E}_i}\right); \qquad \lambda_i = \frac{l_i}{\mathfrak{E}_i}; \tag{1}$$

$$\mathfrak{E}_i = \frac{(2\,l^2{}_{i-1} - b^2)\,b^2}{4\,l_{i-1}\,\mathfrak{E}_{i-1}}\,p_{i-1} + \frac{(l^2{}_{i-1} - b^2)^2}{4\,l_{i-1}\,\mathfrak{E}_{i-1}}\,p'_{i-1}$$

$$+ \sum_{i-1}^{i} \frac{(l_{i-1}+b)\,(l_{i-1}-b)\,b}{l_{i-1}\,\mathfrak{E}_{i-1}} \triangle P_{i-1} + \frac{(2\,l_i - b)^2\,b^2}{4\,l_i\,\mathfrak{E}_i}\,p_i$$

$$+ \frac{(2\,l^2{}_i - (l_i - b)^2)\,(l_i - b)^2}{4\,l_i\,\mathfrak{E}_i}\,p'_i + \sum_{i}^{i+1} \frac{(2\,l_i - b)\,(l_i - b)\,b}{l_i\,\mathfrak{E}_i} \triangle P_i$$

$$6\left(-\frac{y_{i-1}}{l_{i-1}} + y_i\left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right) - \frac{y_{i+1}}{l_i} + (\tau_i - \tau'_i)\right).$$

worin l und b so zu messen sind, wie es in Fig. 135 angedeutet ist. Die y sind wie früher von oben nach unten, ebenso ist auch τ zu messen, wie es für τ_i eingezeichnet ist.

Da alle Belastungen nur in der ersten Potenz vorkommen, was eine Folge davon ist, dass angenommen wurde, es seien ihre Wirkungen auf die elastische Linie ihren Gewichten proportional, so addiren sich einfach diese Wirkungen: p p' und $\triangle P$ sind daher ganz unabhängig von einander, und es ist durchaus nicht nothwendig, dass der Endpunkt von p, der Anfangspunkt von p' und der Angriffspunkt von $\triangle P$ zusammenfallen, sondern es können diese Belastungen in ganz beliebiger Länge angebracht werden; nur bezeichnet immer p eine auf die Strecke b vertheilte und p' eine auf die Strecke $(l - b)$ vertheilte Belastung, wo b in beiden Fällen nicht identisch zu sein braucht.

Ist der Querschnitt des Balkens nicht nur innerhalb jeder Oeffnung, sondern auf seine ganze Länge constant, so wird in den Formeln 1 $\mathfrak{E}_{i-1} = \mathfrak{E}_i = \mathfrak{E}$ und man erhält durch die Multiplication mit $\mathfrak{E}$:

$$\alpha_i = 2\,(l_{i-1} + l_i); \qquad \lambda_i = l_i; \tag{2}$$

$$\mathfrak{E}_i = \frac{(2\,l^2{}_{i-1} - b^2)\,b^2}{4\,l_{i-1}}\,p_{i-1} + \frac{(l^2{}_{i-1} - b^2)^2}{4\,l_i}\,p'_{i-1}$$

$$+ \sum_{i-1}^{i} \frac{(l_{i-1}+b)\,(l_{i-1}-b)\,b}{l_{i-1}} \triangle P + \frac{(2\,l_i - b)^2\,b^2}{4\,l_i}\,p_i$$

$$+\frac{(2\,l^2_i-(l_i-b)^2)\,(l_i-b)^2}{4\,l_i}\,p'_i+\sum_i^{i+1}\frac{(2\,l_i-b)\,(l_i-b)\,b}{l_i}\triangle P$$

$$+6\,\mathfrak{S}\left(-\frac{y_{i-1}}{l_{i-1}}+y_i\left(\frac{1}{l_{i-1}}+\frac{1}{l_i}\right)-\frac{y_i}{l_i}+\varepsilon_i-\varepsilon'_i\right).$$

Ist eine Belastung p gleichförmig über die ganze Oeffnung vertheilt, so hat man in 1 im Coefficienten von p nur $b=l_{i-1}$ und l_i oder in dem von p', $b=0$ zu setzen, dann wird der von dieser gleichförmig vertheilten Belastung herrührende Theil von $\mathfrak{S}_i$ in 1

$$\mathfrak{S}_i=\frac{1}{4\,\mathfrak{S}_{i-1}}\,p_{i-1}\,l^3_{i-1}+\frac{1}{4\,\mathfrak{S}_i}\,p_i\,l^3_i. \qquad (3$$

Auch hier können natürlich die $\mathfrak{S}$ weggelassen werden, wenn sie constant sind.

Zu demselben Resultat gelangt man natürlich auch, wenn man in 1 und 2, $p=p'$ setzt und ihre Coefficienten addirt. Im Obigen haben wir die Werthe von y und ε nicht besonders für die speciellen vorliegenden Fälle entwickelt, weil sie immer am leichtesten mittelst der allgemein gültigen Formeln der nächsten Nummer S. 309 berechnet werden.

100. Der continuirliche Balken staffelförmigen Querschnitts.

Die Streckbäume der continuirlichen Balken sind in weitaus den meisten Fällen aus Blechplatten zusammengesetzt; dann nimmt ihr Querschnitt, mithin auch $\mathfrak{S}$, nicht successive so ab, dass es als Function von x ausgedrückt werden könnte: sondern, durch das Hinzukommen oder das Abgehen einer Platte ändert er sich plötzlich bei der Abscisse x_r, um auf der Strecke $\triangle x_r=x_{r'}-x_r$ constant zu bleiben. Allen Bedürfnissen der Praxis wird wohl genügt, wenn man annimmt, es bestehe die Belastung aus einer auf eine mehr oder weniger lange Strecke gleichförmig vertheilten p (dem Eigengewicht z. B.) und aus auf einzelne Punkte concentrirten Belastungen $\triangle P$.

Durch alle Punkte, in welchen sich der Querschnitt des Balkens oder die gleichförmig vertheilte Belastung p ändern, und durch die Angriffspunkte von $\triangle P$ kann man sich die Spannweite b in eine Anzahl von $\triangle x_r$ zerlegt denken, innerhalb deren $\mathfrak{S}$ und p constant sind und keine concentrirten Belastungen vorkommen.

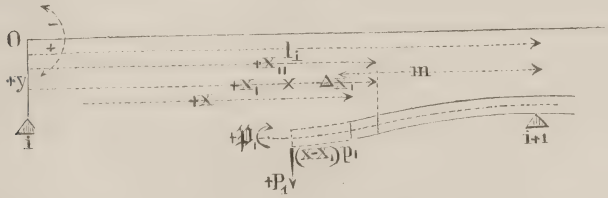
Unter dieser Voraussetzung wird in den Ausdrücken von α λ und $\mathfrak{C}$ Nr. 98 S. 296, $\mathfrak{C}$ innerhalb $\triangle x$, constant, $\mathfrak{P}$ eine einfache Function von x und die sämmtlichen angedeuteten Integrationen werden ausführbar.

Um sie auszuführen, ist noch $\mathfrak{P}$ auszudrücken. Es geschieht dies am einfachsten, wenn die am Anfang der Strecke $\triangle x$, wirkenden Kräfte mittelst eines Seilpolygons, in dem die Pfeilermomente $= 0$ sind, construirt werden.

Es sei dann $\mathfrak{P}$, das Moment und P, die Summe der ausserhalb x, wirkenden Kräfte; ersteres ist die Ordinate des Seilpolygons in x,, multiplicirt mit der Poldistanz und immer positiv. P, wird direct am Kräftepolygon abgegriffen, ist negativ vor dem Maximalmomentenpunkt, weil die Strecke zwischen dem der Schlusslinie und dem x, entsprechenden Strahl aufwärts gerichtet ist; positiv nach dem Maximalmomentenpunkt, weil diese Strecken wie die positiven Kräfte abwärts gerichtet sind.

Bei Aufstellung der allgemeinen Gleichungen Nr. 97 S. 293 war es nicht nothwendig, Voraussetzungen über die Zeichen zu machen, es genügte, dieselben Grössen jederzeit in demselben Sinne zu brauchen. Bei dem Abgreifen und dem Einsetzen derselben aber darf kein Fehler gemacht werden, wir zeigen daher in Fig. 136 den Sinn aller Kräfte und Momente. Wie allgemein üb-

Fig. 136.



lich, fällt die Richtung der positiven P mit den $+ y$ zusammen, und der Sinn, in welchem die $+ P$ an positiven Abscissen $+ x$ um den Ursprung drehen, ist positiv.

Unter dieser Voraussetzung ist das Moment der Kraft P, in Bezug auf den Ursprung $= x$, P, und in Bezug auf jeden beliebigen andern Punkt x gleich $(x, - x)$ P.

Ebenso ist das Moment der auf die Strecke $x - x$, gleichförmig vertheilten und daher bei $\frac{x + x,}{2}$ wirkenden Kraft $(x - x,)$ p,

in Bezug auf den Punkt x gleich $(x - x_r)\, p_r \left(\frac{x + x_r}{2} - x\right)$
$= - {}^1/_2 (x - x_r)^2 p_r$.

Das Moment $\mathfrak{P}$ der ausserhalb des Schnittes x wirkenden Kräfte $\mathfrak{P}_r$, P_r und p_r in Bezug auf denselben Schnitt x ist daher:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_r - (x - x_r)\, P_r - {}^1/_2 (x - x_r)^2 p_r.$$

Wenn die Integration selbst vorgenommen wird, so gelangt man gar häufig zum Ausdruck $l - \frac{x_r + x_{rr}}{2}$ und alle Formeln vereinfachen sich daher bedeutend, wenn man denselben mit einem einzigen Buchstaben m bezeichnet. m ist also, wie es in Fig. 136 angedeutet ist, die Entfernung der Mitte des $\triangle x_r$ von dem dem Ursprung i gegenüberliegenden Pfeiler $i+1$, und man hat

$$l - x_r = m + {}^1/_2 \triangle x_r$$
$$l - x_{rr} = m - {}^1/_2 \triangle x_r$$

Dies vorausgesetzt, geben die Nr. 98 S. 296 angedeuteten Integrationen:

$$\int_r^{rr} (l - x)\, dx = - {}^1/_2 (l - x_{rr})^2 + {}^1/_2 (l - x_r)^2$$
$$= m \triangle x_r;$$
$$\int_r^{rr} (l - x)^2\, dx = - {}^1/_3 (l - x_{rr})^3 + {}^1/_3 (l - x_r)^3$$
$$= (m^2 + {}^1/_{12} \triangle x_r^2) \triangle x_r;$$
$$\int_r^{rr} (l - x)\, x\, dx = l \int_r^{rr} (l - x)\, dx - \int_r^{rr} (l - x)^2\, dx$$
$$= ((l - m)\, m - {}^1/_{12} \triangle x_r^2) \triangle x_r;$$
$$\int_r^{rr} (l - x)(x - x_r)\, dx = (l - x_r) \int_r^{rr} (x - x_r)\, dx - \int_r^{rr} (x - x_r)^2\, dx$$
$$= {}^1/_2 (m + {}^1/_2 \triangle x_r) \triangle x_r^2 - {}^1/_3 \triangle x_r^3 = {}^1/_2 (m - {}^1/_6 \triangle x_r) \triangle x_r^2;$$
$$\int_r^{rr} (l - x)(x - x_r)^2\, dx = (l - x_r) \int_r^{rr} (x - x_r)^2\, dx - \int_r^{rr} (x - x_r)^3\, dx$$
$$= {}^1/_3 (m + {}^1/_2 \triangle x_r) \triangle x_r^3 - {}^1/_4 \triangle x_r^4 = {}^1/_3 (m - {}^1/_4 \triangle x_r) \triangle x_r^3.$$

Diese Werthe in Nr. 98 S. 296 substituirt, geben für $\alpha\lambda$ und $\mathfrak{E}$, wenn wir den innerhalb der Strecke $\triangle x_r$ constanten Werth von $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{E}_r$ bezeichnen:

$$\alpha_i = \sum_{i}^{i-1} (m^2 + {}^1/_{12} \triangle x_,^2) \frac{\triangle x_,}{l^2_{i-1} \mathfrak{E}_,} + \sum_{i}^{i+1} (m^2 + {}^1/_{12} \triangle x_,^2) \frac{\triangle x_,}{l_i \mathfrak{E}_,};$$

$$\lambda_i = \sum_{i}^{i+1} \left((l - m)\, m - {}^1/_{12} \triangle x_,^2 \right) \frac{\triangle x_,}{l_i^2 \mathfrak{E}_,};$$

$$\mathfrak{E}_i = \sum_{i}^{i-1} \Big[m \mathfrak{P}_, - {}^1/_2 (m - {}^1/_6 \triangle x_,) \triangle x_, P_,$$

$$- {}^1/_6 (m - {}^1/_4 \triangle x_,) \triangle x_,^2 p_, \Big] \frac{\triangle x_,}{l_{i-1} \mathfrak{E}_,}$$

$$+ \sum_{i}^{i+1} \Big[m \mathfrak{P}_, - {}^1/_2 (m - {}^1/_6 \triangle x_,) \triangle x_, P_,$$

$$- {}^1/_6 (m - {}^1/_4 \triangle x_,) \triangle x_,^2 p_, \Big] \frac{\triangle x_,}{l_i \mathfrak{E}_,}$$

$$- \frac{y_{i-1}}{l_{i-1}} + y_i \left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i} \right) - \frac{y_{i+1}}{l_i} + \tau'_i + \tau_i.$$

Für die Oeffnung l_{i-1} zwischen $i-1$ und i gilt natürlich dieselbe Bezeichnung als wie für die Oeffnung l_i, namentlich also ist m vor dem Pfeiler $i-1$ zur Mitte des treffenden $\triangle x$, hin zu messen.

Sind alle Pfeilermomente bestimmt und sollte man dann noch die Tangenten τ und die Ordinaten y der Balkenaxe brauchen, so ist es nicht nothwendig, die weiteren Integrationen von y und τ (Nr. 97 S. 292) auszuführen, sondern es ist viel einfacher, sogleich die Schlusslinie mit Berücksichtigung von $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{P}_{i+1}$ zu ziehen, d. h. diese Momente mit dem Moment $\mathfrak{P}$, und der Kraft P, zu vereinigen, wodurch sich die Σ von y und τ auf eine einzige reduciren und man erhält:

$$- \tau_i = \sum_{i}^{i+1} \int_{,}^{''} \frac{\mathfrak{P} (l_i - x)\, dx}{\mathfrak{E}\, l_i} + \frac{y_i - y_{i+1}}{l_i};$$

$$\frac{dy}{dx} = \tau = \tau_i + \sum_{i}^{x} \int_{,}^{''} \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{E}}\, dx;$$

$$y = y_i + \tau_i x + \sum_{i}^{x} \left(\int_{,}^{''} \frac{\mathfrak{P} (l_i - x)\, dx}{\mathfrak{E}} - (l_i - x) \int_{,}^{''} \frac{\mathfrak{P}\, dx}{\mathfrak{E}} \right);$$

worin wie oben das modificirte $\mathfrak{P}$ durch

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_, - P, (x - x_,) - {}^1/_2 p, (x - x_,)^2$$

dargestellt wird.

Ganz genau wie oben integrirend, erhält man dann

$$-\tau_i = \sum_i^{i+1} \Big[m\,\mathfrak{P}_r - {}^1/_2\,(m - {}^1/_6 \triangle x_r) \triangle x_r\, P_r$$

$$- {}^1/_6\,(m - {}^1/_4 \triangle x_r) \triangle x_r^2\, p_r \Big] \frac{\triangle x_r}{l_i\,\mathfrak{S}_r} + \frac{y_i - y_{i+1}}{l_i};$$

$$\tau = \tau_i + \sum_i^x \Big[\mathfrak{P}_r - {}^1/_2 \triangle x_r\, P_r - {}^1/_6 \triangle x_r^2\, p_r \Big] \frac{\triangle x_r}{\mathfrak{S}_r};$$

$$y = \sum_i^x \Big[m\,\mathfrak{P}_r - {}^1/_2\,(m - {}^1/_6 \triangle x_r) \triangle x_r\, P_r$$

$$- {}^1/_6\,(m - {}^1/_4 \triangle x_r) \triangle x_r^2\, p_r \Big] \frac{\triangle x_r}{\mathfrak{S}_r}$$

$$+ y_i + \tau_i\, x - (l_i - x) \sum_i^x \Big[\mathfrak{P}_r - {}^1/_2 \triangle x_r\, P_r - {}^1/_6 \triangle x_r^2\, p_r \Big] \frac{\triangle x_r}{\mathfrak{S}_r}.$$

Setzt man in obigen Formeln $m = {}^1/_2\, l$, $\triangle x = l$ etc., so gelangt man gehörig reducirend zu den Formeln der vorigen Nummern; es muss ja auch der Balken gleichförmigen Querschnitts nur als ein specieller Fall des Balkens staffelförmigen Querschnitts erscheinen, man braucht nur anzunehmen, die eine Staffel erstrecke sich über die ganze Spannweite. Da jedoch die Reductionen complicirter sind als die directen Ableitungen in Nr. 99, so haben wir es vorgezogen, die α λ und $\mathfrak{S}$ für alle einfachern speciellen Fälle direct zu entwickeln. Dagegen aber wird die Berechnung der y und τ für Zwischenpunkte immer am leichtesten mittelst der letzten allgemeinen Formeln ausführbar werden.

101. Der über mehre gleichweite Oeffnungen gestreckte und innerhalb jeder gleich und symmetrisch gebaute continuirliche Balken.

In diesem Falle werden alle α und λ gleich, sodass sich die Reihe der D_0 D_1 .... D_i der Nr. 98 S. 299 in eine recurrirende Reihe verwandelt; man ist dann im Stande, das allgemeine Glied D_i derselben nach den gewöhnlichen Regeln zu bestimmen.

In der That überzeugt man sich leicht durch Multiplication, dass die Coefficienten von x in der Entwickelung des Bruches

$$\frac{D_1 - \lambda^2 D_0\, x}{1 - \alpha\, x + \lambda^2 x^2} = D_1 + D_2\, x + D_3\, x^2 + \ldots . D_i\, x^{i-1}$$

mit den Determinanten:

$$\begin{aligned} D_2 &= \alpha\, D_1 \quad - \lambda^2 D_o, \\ D_3 &= \alpha\, D_2 \quad - \lambda^2 D_1, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ D_i &= \alpha\, D_{i-1} - \lambda^2 D_{i-2}, \end{aligned}$$

identisch sind.

Derselbe Bruch ist aber auch, wenn er in Partialbrüche zerlegt wird:

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}} \left[\frac{{}^1/_2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2})\, D_1 - \lambda^2 D_o}{1 - {}^1/_2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2})\, x} - \frac{{}^1/_2(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2})\, D_1 - \lambda^2 D_o}{1 - {}^1/_2(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2})\, x} \right].$$

Führt man die in der Klammer angedeuteten Divisionen aus, und bemerkt man, dass $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots\ldots$ ist, so folgt, dass der Coefficient von x^{i-1} das heisst:

$$D_i = \frac{D_1}{\sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}} \left(\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}}{2} \right)^i - \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}}{2} \right)^i \right) - \frac{\lambda^2 D_o}{\sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}} \left(\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}}{2} \right)^{i-1} - \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}}{2} \right)^{i-1} \right) \text{ ist.}$$

Dieser Ausdruck von D_i ist eigentlich von keinem praktischen Werth, weil die directe Berechnung der Determinanten nach dem Schema von Nr. 98 S. 299 immer viel einfacher als die mittelst der obigen Formel ist, allein er giebt bei Vernachlässigung der $\left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}}{2} \right)^i$, die gegenüber von $\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda_2}}{2} \right)^i$ immer sehr klein sind, das Verhältniss zweier aufeinander folgender Determinanten, denn dann ist:

$$\frac{D_i}{D_{i-1}} = {}^1/_2 \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2} \right);$$

mittelst dessen man das Verhältniss der aufeinander folgenden Coefficienten von $\mathfrak{G}$ in Nr. 98 S. 296 und die Lage der Inflectionspunkte Nr. 99 S. 303 in Zahlen zur Anschauung gebracht hat, für Balken constanten Querschnitts.

In der That ist das Verhältniss zweier aufeinander folgender Coefficienten vor der abfallenden Diagonale und das der Seg-

mente, in welche einer der beiden festen Inflectionspunkte die Spannweite theilt:

$$= \frac{D_i}{\lambda D_{i-1}} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda} = \frac{2\lambda}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda^2}}.$$

Sind nun alle Spannweiten gleich gross und der Balken constanten Querschnitts, so sind alle $\frac{l_i}{\mathfrak{E}_i}$ (Nr. 99 S. 305) einander gleich und es wird $\frac{\alpha}{\lambda} = 4$ und:

$$\frac{D_i}{\lambda D_{i-1}} = \frac{4 + \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= 3{,}732 = \frac{1}{0{,}268};$$

von denen 4, $\frac{11}{3}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{41}{11}$, $\frac{56}{15}$ aufeinander folgende Näherungswerthe sind.

Es folgt also hieraus, dass die Coefficienten der $\mathfrak{E}$ in den Momentengleichungen Nr. 98 S. 296 ungefähr im Verhältniss von 1 : 4 gegen die abfallende Diagonale hin zunehmen, dass demnach die Wirkung irgend einer Belastung auf die zu beiden Seiten liegenden Oeffnungen im umgekehrten Verhältniss abnimmt; dass ferner die festen Inflectionspunkte $J J_1'$ Fig. 130 S. 282 im Fünftel der Spannweite liegen, woraus ebenfalls das gerade Gesagte geschlossen werden kann.

Später werden wir zeigen, dass die Aussenöffnungen da enden müssen, wo die Inflectionspunkte unter der Voraussetzung liegen würden, dass noch mehrere Oeffnungen folgen. Wird nun, was annähernd richtig ist, angenommen, dass die festen und die wirklichen Inflectionspunkte nicht weit auseinander liegen, so kann weiter gefolgert werden, dass das zweckmässigste Verhältniss einer Aussenöffnung zu einer Mittelöffnung

$$= 4 : 5 \left(= \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = {}^1/_2 + {}^1/_6 \sqrt{3} = 0{,}789 \right) \text{ sei.}$$

Alle eben berechneten Verhältnisse sind nur annähernd richtig, weil sie Balken constanten Querschnitts und gleichförmiger Belastung für alle Oeffnungen voraussetzen, was in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Diese Verhältnisse sind daher nicht bestimmt, Anhaltspunkte für Rechnungen und Constructionen zu liefern, son-

dern nur dazu, die Form des continuirlichen Balkens und der Polygone, welche die an ihm wirkenden Kräfte darstellen, zur Anschauung zu bringen, wie dies auch schon weiter oben bemerkt wurde.

Wir wollen nun das bisher Entwickelte an einigen Beispielen erläutern.

Drittes Kapitel.

Kräftepläne verschiedener continuirlicher Balken.

102. Der Kräfteplan eines continuirlichen Balkens constanten Querschnitts mit vier Oeffnungen.

Es seien die an einem über vier Oeffnungen von 52, 65, 65, 52 Meter Spannweite gestreckten continuirlichen Balken constanten Querschnitts wirkenden Kräfte zu bestimmen. Der Balken soll eine Eisenbahn tragen, deren Verkehrsbelastung höchstens 4,5 Tn. beträgt. Vorläufige approximative Rechnungen ergaben ein Eigengewicht von 2,2 Tn.

In diesem Falle ist $n = 4$ und es tragen die beiden Widerlager die Zeiger 0 und 4; die drei Pfeiler die Zeiger 1, 2, 3; die vier Oeffnungen die Zeiger 0, 1, 2, 3, und man hat laut Nr. 99 S. 305, $\lambda_0 = \lambda_3 = 52$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 65$ und $\alpha_1 = \alpha_3 = 2\,(l_0 + l_1) = 234$; $\alpha_2 = 2\,(l_1 + l_2) = 260$.

Berechnete man nun mit diesen λ und α alle D und Coefficienten der Pfeilermomente, so würde man sehr grosse und nicht einmal besonders übersichtliche Zahlen erhalten; es ist daher zweckmässig, dieselben durch irgend eine Grösse so zu dividiren, dass die D sich nicht weit von 1 entfernen. Am einfachsten werden in allen Fällen die Rechnungen, wenn mit der Länge α_1, also im vorliegenden Falle mit 2 3 4 Meter dividirt wird, wir setzen daher:

$$\lambda_0 = \lambda_3 = \frac{52}{234} = \frac{4}{18}\,;\ \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{65}{234} = \frac{5}{18}\,;$$

und $$\alpha_1 = \alpha_3 = 2\,.\,\frac{4+5}{18} = 1\,;\ \alpha_2 = 4\,.\,\frac{5}{18} = \frac{20}{18}.$$

Hieraus ergiebt sich für D und R laut Nr. 98 S. 299 die Werthe:

$$R_1 = D_0 = 1 \qquad = 1,$$

$$R_3 = D_1 = \alpha_1 \qquad = 1,$$

$$R_2 = D_2 = \alpha_2\,\alpha_1 - \lambda^2_1 \quad = \frac{20}{18} - \frac{5^2}{18^2} = \frac{335}{324},$$

$$D = R_1 = D_3 = \alpha_3\,D_2 - \lambda^2_2\,D_1 = \frac{335}{324} - \frac{25}{324} = \frac{310}{324}.$$

Die R und D sind einander gleich, weil die Oeffnungen symmetrisch sind; aus demselben Grunde hat man auch laut Nr. 98 S. 301 nur die folgenden $^1/_4\,.\,n^2 = 4$ Coefficienten der $\mathfrak{G}$ zu berechnen:

$$R_2 = \frac{335}{324},$$

$$\lambda_1\,R_3 = \frac{90}{324},$$

$$\lambda_1\,\lambda_2 = \frac{25}{324},$$

$$D_1\,R_3 = 1.$$

Die Gleichungen der drei Pfeilermomente von Nr. 98 S. 300, die wir noch durch $D = \frac{310}{324}$ dividiren, indem wir den gemeinschaftlichen Nenner 324 der obigen Coefficienten mit 310 vertauschen, werden daher:

$$\mathfrak{P}_1 = -\frac{335}{310}\,\mathfrak{G}_1 + \frac{90}{310}\,\mathfrak{G}_2 - \frac{25}{310}\,\mathfrak{G}_3,$$

$$\mathfrak{P}_2 = +\frac{90}{310}\,\mathfrak{G}_1 - \frac{324}{310}\,\mathfrak{G}_2 + \frac{90}{310}\,\mathfrak{G}_3,$$

$$\mathfrak{P}_3 = -\frac{25}{310}\,\mathfrak{G}_1 + \frac{90}{310}\,\mathfrak{G}_2 - \frac{335}{310}\,\mathfrak{G}_3.$$

Wegen der Symmetrie der Oeffnungen müssen auch die Gleichungen von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ symmetrisch sein und die gleichen Zahlencoefficienten enthalten. Ueberhaupt werden auch wegen derselben an der ersten Brückenhälfte dieselben Kräfte, wie an der zweiten wirken, und man wird nur $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zu berechnen haben; $\mathfrak{P}_3$

haben wir hier nur der Vollständigkeit und Uebersichtlichkeit wegen beigefügt.

Da die obigen Coefficienten nur die Verhältnisszahlen der Spannweiten enthalten, so bleiben sie dieselben für alle, über vier Oeffnungen, deren Weiten sich wie 4 : 5 : 5 : 4 verhalten, gestreckten Balken constanten Querschnittes, und haben daher in dieser Beziehung eine allgemeine Bedeutung; erst von jetzt an differiren daher die Rechnungen für continuirliche Balken verschiedener Spannweite und Belastung.

Da bisher immer angenommen wurde, es seien die Spannungen in den Balken einfach den Belastungen proportional, und da in Folge dessen die $\mathfrak{S}$ die Belastungen nur in der ersten Potenz enthalten, so können wir den von dem Eigengewicht des Balkens herrührenden Theil von $\mathfrak{P}$ ganz von dem Theile trennen, der von der zufälligen Belastung herrührt, und berechnen daher zuerst den vom Eigengewicht herrührenden Theil von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$.

Laut Nr. 99 S. 306 ist

$$\mathfrak{S}_i = {}^1/_4 p \, (l^3_{i-1} + l^3_i),$$

während die Momente $\mathfrak{P}$ von der Form $p l^2$ sind. Wir dürfen daher der Homogenität wegen bei Berechnung dieser letzteren nur für l^2 die wirklichen Längen in Metern (52^2 oder 65^2) in Rechnung bringen, und müssen für das dritte l die Verhältnisszahl ${}^4/_{18}$ oder ${}^5/_{18}$ einsetzen.

Man gelangt auch zu demselben Resultate, wenn man unmittelbar die Dimensionen der einzelnen Coefficienten von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$ in den Momentengleichungen abzählt. Es zählt D, der Coefficient von $\mathfrak{P}$, $n-1$ lineäre Dimensionen von l, alle Coefficienten von $\mathfrak{S}$ aber nur $n-2$ derselben. Indem wir aber bei Berechnung von D statt der l nur ihr Verhältniss zu einer bestimmten Reductionslänge (234 Meter im vorliegenden Falle) einführen, dividiren wir die Gleichung durch diese Länge in der $n-1$ten Potenz. $n-2$ Dimensionen derselben dienen dann dazu, die l der Coefficienten von $\mathfrak{S}$ in Verhältnisszahlen zu verwandeln, während eine Dimension übrig bleibt; diese erscheint dann als Nenner von $\mathfrak{S}$ und verwandelt eines seiner l in eine Verhältnisszahl.

Für die beiden Aussenöffnungen ist daher:

$${}^1/_4 p \, l^3_0 = {}^1/_4 \cdot 2^t{,}2 \cdot {}^4/_{18} \cdot 52^2 = 330{,}49 \text{ Mtn.}$$

und für die Mittelöffnungen:

$$^1/_4 p l_1^3 = {}^1/_4 \cdot 2^t{,}2 \cdot {}^5/_{18} \cdot 65^2 = 645{,}49 \text{ Mtn.}$$

und $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_3 = 975{,}98$ „

$\mathfrak{G}_2 = 2 \cdot 645{,}49 = 1290{,}97$ „

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung der Pfeilermomente, so erhält man:

$$\mathfrak{P}_1 = -\frac{335}{310} \cdot 976{,}0 + \frac{90}{310} \cdot 1291{,}0 - \frac{25}{310} \cdot 976{,}0 = -758{,}6 \text{ Mtn.},$$

$$\mathfrak{P}_2 = +\frac{90}{310} \cdot 976{,}0 - \frac{324}{310} \cdot 1291{,}0 + \frac{90}{310} \cdot 976{,}0 = -782{,}6.$$

Für den von der zufälligen Belastung einer Aussenöffnung herrührenden Theil von l hat man:

$$^1/_4 p l_0^3 = {}^1/_4 \cdot 4^t{,}5 \cdot {}^4/_{18} \cdot 52^2 = 676{,}0 \text{ Mtn.}$$

für den Theil einer Mittelöffnung:

$$^1/_4 p l_1^3 = {}^1/_4 \cdot 4^t{,}5 \cdot {}^5/_{18} \cdot 65^2 = 1320{,}3 \text{ Mtn.}$$

Mittelst dieser Werthe kann man nun, gerade wie oben, für jede Combination total belasteter Oeffnungen die Pfeilermomente bestimmen. Für die Totalbelastung der zweiten und vierten Oeffnung (l_1 und l_3) z. B. hat man

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2 = 1320{,}3 \text{ und } \mathfrak{G}_3 = 676{,}0,$$

und diese $\mathfrak{G}$ geben durch Substitution in die Pfeilermomentengleichungen, und Addition des vom Eigengewicht herrührenden Momentes $\mathfrak{P}_1 = -758{,}6$ und $\mathfrak{P}_2 = -782{,}6$, die dieser Belastung entsprechenden Totalpfeilermomente:

$$\mathfrak{P}_1 = -758{,}6 - \frac{335}{310} \cdot 1320{,}3 + \frac{90}{310} \cdot 1320{,}3 - \frac{25}{310} \cdot 676{,}0 =$$
$$-1856{,}6 \text{ Mtn.}$$

$$\mathfrak{P}_1 = -782{,}6 + \frac{90}{310} \cdot 1320{,}3 - \frac{324}{310} \cdot 1320{,}3 + \frac{90}{310} \cdot 676{,}0 =$$
$$-1582{,}9 \text{ Mtn.}$$

Auf dieselbe Weise erhält man für die Belastung der dritten Oeffnung (l_2) allein

$$\mathfrak{G}_1 = 0 \quad \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_3 = 1320{,}3 \text{ und:}$$

$$\mathfrak{P}_1 = -758{,}6 + \frac{90}{310} \cdot 1320{,}3 - \frac{25}{310} \cdot 1320{,}3 = -481{,}8,$$

$$\mathfrak{P}_2 = -782{,}6 - \frac{324}{310} \cdot 1320{,}3 + \frac{90}{310} \cdot 1320{,}3 = -1779{,}2.$$

Endlich für Belastung der beiden Aussenöffnungen (l_0 und l_3)

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_3 = 676{,}0 \qquad \mathfrak{G}_2 = 0 \text{ und:}$$

$$\mathfrak{P}_1 = -758{,}6 - \frac{335}{310} \cdot 676{,}0 \qquad - \frac{25}{310} \cdot 676 = -1543{,}6,$$

$$\mathfrak{P}_2 = -782{,}6 + \frac{90}{310} \cdot 676{,}0 \qquad + \frac{90}{310} \cdot 676 = -390{,}0.$$

Die Berechnung solcher Pfeilermomente bei der totalen Belastung einzelner Oeffnungen genügt wohl, um das Maximum der ausserhalb eines beliebigen Querschnittes wirkenden Momente $\mathfrak{P}$ zu bestimmen, allein nicht zur Bestimmung des Maximums der Summe der ausserhalb eines Querschnittes wirkenden verticalen Kräfte P. Um diese zu erhalten, müssen laut Nr. 96 S. 286 noch die Pfeilermomente für Partialbelastung berechnet werden, welche von einem Pfeiler oder Widerlager bis zu dem Querschnitt des Balkens reichen, für den das Maximum dieser Kräfte, die man häufig die scheerenden Kräfte nennt, bestimmt werden soll.

Die Curve dieser Kräfte ist, wie aus Taf. 12, wo die am Balken, den wir eben rechnen, wirkenden Kräfte dargestellt sind, ersehen werden kann, sehr flach; und es dürften daher im vorliegenden Falle zur Construction derselben vier Punkte für jede Curve innerhalb einer Oeffnung genügen. Wir wollen daher hier noch die Pfeilermomente für Partialbelastungen berechnen, welche von einem Pfeiler oder Widerlager bis zum ersten, zweiten, dritten Viertel reichen.

Laut der zweiten Gleichung von Nr. 99 S. 305 ist der Einfluss einer an dem Pfeiler i anstossenden Partialbelastung $b\,p_i$ (siehe Fig. 135 S. 304) auf das Moment

$$\mathfrak{G}_i = \frac{(2\,l_i - b)^2\,b^2}{4\,l_i}\,p_i = \left(2 - \frac{b}{l_i}\right)^2 \cdot \frac{b^2}{l^2_i} \cdot {}^1/_4\,p_i\,l^3_i,$$

und der Einfluss einer vom $i$ten Pfeiler abstehenden Partialbelastung $b\,p_{i-1}$ (siehe Fig. 135) auf dasselbe

$$\mathfrak{G}_i = \frac{(2\,l^2_{i-1} - b^2)\,b^2}{4\,l_{i-1}} \cdot p_{i-1} = \left(2 - \frac{b^2}{l^2_{i-1}}\right)\frac{b^2}{l^2_{i-1}} \cdot {}^1/_4\,p_{i-1}\,l^3_{i-1};$$

${}^1/_4\,p\,l^3$ ist der für die Totalbelastung der treffenden Oeffnung bereits berechnete und bekannte Theil von $\mathfrak{G}_i$, den man nur mit den Werthen von:

$$\left(2 - \frac{b}{l}\right)^2 \frac{b^2}{l^2} \text{ und } \left(2 - \frac{b^2}{l^2}\right)\frac{b^2}{l^2} \text{ für } \frac{b}{l} = {}^1/_4,\ {}^1/_2 \text{ und } {}^3/_4,$$

zu multipliciren hat, um den entsprechenden Theil von $\mathfrak{G}$ für die treffende Partialbelastung zu erhalten.

Die Substitution giebt für das (die)

	anstehende	abstehende
$^1/_4$	$\frac{49}{256} = 0{,}19140625$,	$\frac{31}{256} = 0{,}12109375$,
$^1/_2$	$\frac{9}{16} = 0{,}5625$,	$\frac{7}{16} = 0{,}4375$,
$^3/_4$	$\frac{225}{256} = 0{,}87890625$,	$\frac{207}{256} = 0{,}80859375$.

Aus der algebraischen Form dieser Werthe, sowie aus der Natur der Sache geht hervor, dass

das anstehende $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$,
und das abstehende $^3/_4$, $^1/_2$, $^1/_4$,

zur Einheit sich ergänzen müssen.

Da diese Werthe nur die Verhältnisszahl $\frac{b}{l}$ enthalten, so gelten sie nicht allein für den vorliegenden continuirlichen Balken, sondern für alle gleichförmig belasteten Balken constanten Querschnittes; da man demnach mit diesen sechs Zahlen viele Grössen zu multipliciren hat, so kann die folgende kleine Multiplicationstabelle häufig gute Dienste leisten:

	anstehende			abstehende			
	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	
1	,191406	,5625	,878906	,121094	,4375	,808594	1
2	,382813	1,1250	1,757813	,242188	,8750	1,617188	2
3	,574219	1,6875	2,636719	,363281	1,3125	2,425781	3
4	,765625	2,2500	3,515625	,484375	1,7500	3,234375	4
5	,957031	2,8125	4,394531	,605469	2,1875	4,042969	5
6	1,148438	3,3750	5,273438	,726563	2,6250	4,851563	6
7	1,339844	3,9375	6,152344	,847656	3,0625	5,660156	7
8	1,531250	4,5000	7,031250	,968750	3,5000	6,468750	8
9	1,722656	5,0625	7,910156	1,089844	3,9375	7,277344	9

Die scheerende Kraft im $^1/_4$ der ersten Oeffnung ist laut Nr. 96 S. 287 ein Maximum, wenn dieses $^1/_4$ dann die zweite und vierte Oeffnung ($^1/_4 l_0$, l_1 und l_3) belastet sind; es ist dies die erste, im unten folgenden Schema dargestellte Belastungsart. Den vom Eigengewicht und von der zufälligen Belastung von l_1 und l_3 her-

rührenden Theil der Pfeilermomente $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ haben wir oben schon gleich — 1856,6 und — 1582,9 gefunden. Wir haben daher nur mehr den von der Belastung des $^1/_4$ der ersten Oeffnung herrührenden Theil zu addiren. Wenn die erste Oeffnung ganz belastet wäre, so würde der Einfluss davon auf $\mathfrak{G}_1$ gleich $^1/_4 p l^3_0 =$ 676,0 sein; da jedoch nur das abstehende $^1/_4$ belastet ist, so ist er nur $\frac{31}{256}$. 676; da endlich diese Belastung auf l_2 und l_3 keinen Einfluss ausübt, so hat man einfach in diesem Falle das ganze Pfeilermoment, für den Fall 1 des Schemas:

1) $\mathfrak{P}_1 = -1856{,}6 - \frac{335}{310} . 0{,}12109 . 676{,}0 = -1945$ Mtn.

Auf dieselbe Weise weiter rechnend, erhält man für die sieben folgenden Fälle:

2) $\mathfrak{P}_1 = -1856{,}6 - \frac{335}{310} . 0{,}4375 . 676{,}0 = -2176$ Mtn.
3) „ „ „ . 0,80859 . „ = — 2447 „
4) „ „ „ . 1 „ = — 2587 „
5) „ = — 481,8 — „ . 0,19141 . „ = — 622 „
6) „ „ „ . 0,5625 . „ = — 893 „
7) „ „ „ . 0,87891 . „ = — 1124 „
8) „ „ „ . 1 „ = — 1212 „

Die Partialbelastung der zweiten Oeffnung übt nicht nur auf $\mathfrak{G}_1$, sondern auch auf $\mathfrak{G}_2$ einen Einfluss aus, im Uebrigen aber bleiben die Rechnungen die gleichen und man hat für die übrigen Fälle des Schemas:

9) $\mathfrak{P}_1 = -481{,}8 - \frac{335}{310} . 0{,}19141 . 1320{,}3 + \frac{90}{310} . 0{,}12109 . 1320{,}3 = -708$ Mtn.

10) $\mathfrak{P}_1 = -481{,}8 - \frac{335}{310} . 0{,}5625 . 1320{,}3 + \frac{90}{310} . 0{,}4375 . 1320{,}3 = -1117$ Mtn.

11) $\mathfrak{P}_1 = -481{,}8 - \frac{335}{310} . 0{,}87891 . 1320{,}3 + \frac{90}{310} . 0{,}80859 . 1320{,}3 = -1426$ Mtn.

12) $\mathfrak{P}_1 = -481{,}8 - \frac{335}{310} . 1 . 1320{,}3 + \frac{90}{310} . 1 . 1320{,}3 = -1525$ Mtn.

13) $\mathfrak{P}_1 = -1543{,}6 - \frac{335}{310} \cdot 0{,}1210{,}9 \cdot 1320{,}3 + \frac{90}{310} \cdot 0{,}19141 \cdot 1320{,}3 = -1643$ Mtn.

14) $\mathfrak{P}_1 = -1543{,}6 - \frac{335}{310} \cdot 0{,}4375 \cdot 1320{,}3 + \frac{90}{310} \cdot 0{,}5625 \cdot 1320{,}3 = -1952$ Mtn.

15) $\mathfrak{P}_1 = -1543{,}6 - \frac{335}{310} \cdot 0{,}87891 \cdot 1320{,}3 + \frac{90}{310} \cdot 0{,}80859 \cdot 1320{,}3 = -2360$ Mtn.

Die Momente des zweiten Pfeilers werden natürlich genau auf dieselbe Weise berechnet. Wir setzen auch diese hier an, indem wir bemerken, dass für die Fälle 1, 2, 3, 5, 6, 7 des Schemas diese Momente nie aufgetragen und daher auch nicht berechnet zu werden brauchen. Für die übrigen Fälle hat man:

4) $\mathfrak{P}_2 = -1582{,}9 - \frac{90}{310} \cdot 1 \cdot 676{,}0 = -1387$ Mtn.

8) $\mathfrak{P}_2 = -1779{,}2 + \frac{90}{310} \cdot 1 \cdot 676{,}0 = -1583$ Mtn.

9) $\mathfrak{P}_2 = -1779{,}2 + \frac{90}{310} \cdot 0{,}19141 \cdot 1320{,}3 - \frac{324}{310} \cdot 0{,}12109 \cdot 1320{,}3 = -1873$ Mtn.

10) $\mathfrak{P}_2 = -1779{,}2 + \frac{90}{310} \cdot 0{,}5625 \cdot 1320{,}3 - \frac{324}{310} \cdot 0{,}4375 \cdot 1320{,}3 = -2167$ Mtn.

11) $\mathfrak{P}_2 = -1779{,}2 + \frac{90}{310} \cdot 0{,}87891 \cdot 1320{,}3 - \frac{324}{310} \cdot 0{,}80859 \cdot 1320{,}3 = -2558$ Mtn.

12) $\mathfrak{P}_2 = -1779{,}2 + \frac{90}{310} \cdot 1 \cdot 1320{,}3 - \frac{324}{310} \cdot 1 \cdot 1320{,}3 = -2776$ Mtn.

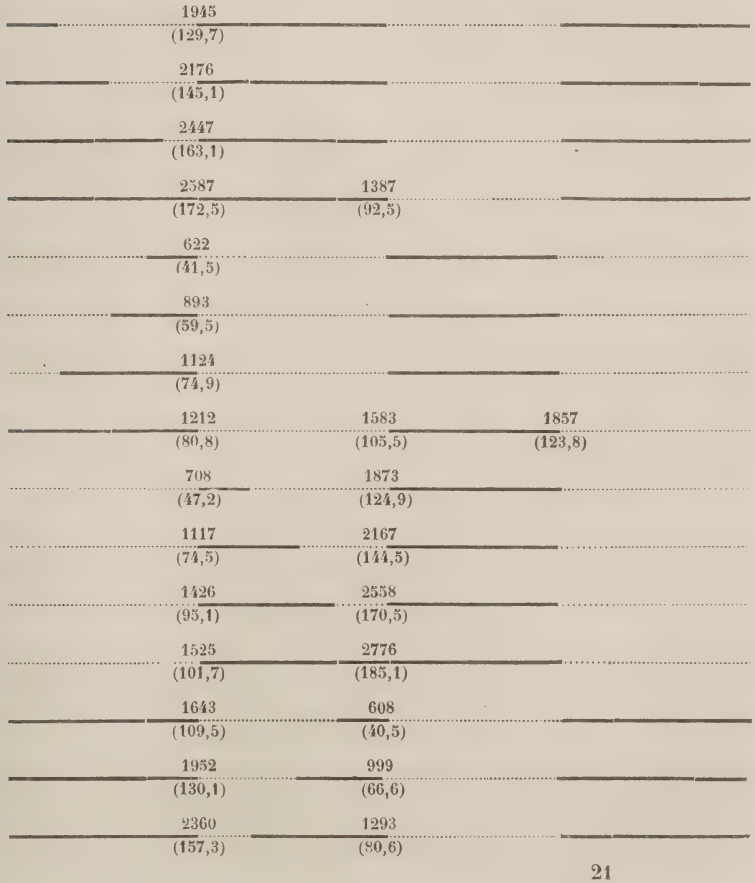
13) $\mathfrak{P}_2 = -390{,}0 + \frac{90}{310} \cdot 0{,}12109 \cdot 1320{,}3 - \frac{324}{310} \cdot 0{,}19141 \cdot 1320{,}3 = -608$ Mtn.

14) $\mathfrak{P}_2 = -390{,}0 + \frac{90}{310} \cdot 0{,}4375 \cdot 1320{,}3 - \frac{324}{310} \cdot 0{,}5625 \cdot 1320{,}3 = -999$ Mtn.

15) $\mathfrak{P}_2 = -390{,}0 + \frac{90}{310} \cdot 0{,}80859 \cdot 1320{,}3 - \frac{324}{310} \cdot 0{,}87891 \cdot 1320{,}3 = -1293$ Mtn.

Die bis jetzt berechneten Pfeilermomente genügen, um die an dem Balken wirkenden Maximalkräfte bei den verschiedenartigsten Belastungen zu construiren. Der Uebersichtlichkeit wegen und um Irrungen bei dem Auftragen derselben zu vermeiden, stellen wir sie in dem folgenden Schema zusammen. In demselben sind die unbelasteten Oeffnungen und Strecken durch punktirte, die belasteten aber durch voll ausgezogene Linien angedeutet. Die Grösse der entsprechenden Momente des ersten und zweiten Pfeilers sind bei jedem Pfeiler eingedruckt worden, und zwar ohne ihr Zeichen, weil alle Momente negativ sind. Es braucht wohl kaum noch erinnert zu werden, dass sie alle in Metertonnen angegeben sind.

Zusammenstellung der Pfeilermomente bei den verschiedenen Belastungsarten.



Mit den in dieser Tabelle berechneten Momenten schliessen die Rechnungen, die genügen, um alle am Balken wirkenden Kräfte zu construiren, was auf Taf. 12 geschehen ist. Die Construction entspricht ganz dem in Nr. 93 S. 274 Entwickelten.

Da der Balken symmetrisch ist, so genügt es, die an den Constructionstheilen seiner zwei ersten Oeffnungen wirkenden Maximalkräfte zu bestimmen. Der Maassstab der Länge wurde daher zu ,002 = 1^m so gewählt, dass auf Taf. 12 gerade die zwei ersten Oeffnungen von 52^m und 65^m Spannweite Platz finden.

Vor allem sind die Kräfte- und Seilpolygone der verschiedenen vorkommenden Belastungen zu construiren. Da dem obigen Schema entsprechend für jedes $^1/_4$ jeder Oeffnung das Maximum der scheerenden Kräfte P bestimmt werden soll, so construirten wir die Polygone unter der Voraussetzung, es seien die vier $^1/_4$ des Gewichtes jeder Oeffnung im $^1/_8$, $^3/_8$, $^5/_8$ und $^7/_8$ der Oeffnung concentrirt.

Diese Gewichte betragen:

$^1/_4 . 2^t,2 . 52^m = 28,6^{tn}$ für $^1/_4$ der unbelasteten kleinen Oeffnung.
$^1/_4 . 6,7 . 52 = 87,1$ „ „ „ belasteten „ „
$^1/_4 . 2,2 . 65 = 35,75$ „ „ „ unbelasteten grossen „
$^1/_4 . 6,7 . 65 = 108,875$ „ „ „ belasteten „ „

Im Maassstabe ,03 = 100^{tn} der Belastungsgewichte wurden diese (Taf. 12_{15}) unter P viermal aufgetragen, und bilden die Kräftepolygone. Jede Oeffnung hat nur ein Kräftepolygon; das der belasteten und das der unbelasteten Oeffnung liegen so aufeinander, dass ihre Mitten zusammenfallen; die beigeschriebenen Gewichte beugen jeder Zweideutigkeit vor.

Die Poldistanz wurde zu 15^{mt} angenommen; wir denken uns unter derselben die dreifache Höhe des Balkens oder des Fachwerks (= $3h$ von Nr. 77 S. 222). Da laut Nr. 48 S. 127 die auf dem Maassstab der Belastungen abgegriffenen Segmente zwischen den Seilpolygonseiten, die wir mit dieser Poldistanz construiren werden, gleich den Momenten der zwischen diesen Seiten wirkenden Kräfte getheilt durch die Poldistanz von 15^m sind; die in den oberen und unteren Streckbäumen des Balkens wirkenden Kräfte aber gleich denselben Momenten getheilt durch die Balkenhöhe, d. h. $^1/_3$ der Poldistanz: so folgt, dass die Segmente gleich dem $^1/_3$ der in den Streckbäumen wirkenden Kräfte sind. Wir erhalten

diese unmittelbar, wenn wir sie auf einem dreimal kleinern Maassstab von ,01 = 100^{tn}, dem Maassstab der am Balken wirkenden Kräfte, abgreifen.

Indem wir den Pol der Mitte der Kräftepolygone senkrecht gegenüberliegend annehmen und die Seilpolygone construiren, erhalten wir für jede Oeffnung zwei symmetrische Polygone (Taf. $12_{2\,6}$). Die dem gleichförmig vertheilten Eigengewicht von 2,2^{tn} entsprechenden Polygone wurden punktirt; die dem auch gleichförmig vertheilten Totalgewicht von 6,7^{tn} entsprechenden Polygone wurden voll ausgezogen.

Diese Polygone stellen eigentlich keine vertheilte, sondern im $^1/_8$, $^3/_8$, $^5/_8$ und $^7/_8$ der Oeffnung concentrirte Belastungen dar; vertheilten Belastungen aber entsprechen nach Nr. 35 S. 99 Parabeln, welche die Seilpolygonseiten im $^1/_4$, $^1/_2$ und $^3/_4$ der Oeffnung berühren; sie können demnach leicht eingezeichnet werden. Wie bei den Polygonen wurden auch die dem unbelasteten Balken entsprechenden Parabeln punktirt, und die dem belasteten entsprechenden voll ausgezogen.

Bei der Symmetrie der Belastungen war es leicht zu erreichen, dass die Endpunkte aller Polygone und Parabeln auf eine Horizontale zu liegen kamen.

Nach Nr. 48 S. 128 sind die Pfeile der beiden Parabeln des unbelasteten Balkens gleich $\frac{2{,}2 \,.\, 52^2}{2 \,.\, 15} = 49{,}57^{tn}$ und gleich $\frac{2{,}2 \,.\, 65^2}{2 \,.\, 15} = 77{,}46^{tn}$, und die der Parabeln des belasteten Balkens gleich $\frac{6{,}7 \,.\, 52^2}{2 \,.\, 15} = 150{,}97^{tn}$ und gleich $\frac{6{,}7 \,.\, 65^2}{2 \,.\, 15} = 235{,}90^{tn}$.

Wenn nur die am Balken wirkenden Momente, und nicht auch die scheerenden Kräfte bestimmt werden sollten, wegen deren mittelst des Kräftepolygons Tangenten an die $^1/_4$ der Parabel gezogen werden müssen, so würde es genügen: mittelst dieser Pfeile, die in der Mitte jeder Oeffnung aufzutragen wären, die Parabeln zu construiren, die Schlusslinien mittelst der berechneten Pfeilermomente aufzutragen und die Momente für jeden Querschnitt der Oeffnung wären laut Nr. 93 S. 276 durch die Abstände zwischen der Schlusslinie und der Parabel gegeben.

Die Totalbelastung der ersten und dritten Oeffnung (l_0 und l_3) giebt das Maximum der positiven Momente für die erste und das

Maximum der negativen Momente für die Mitte der zweiten Oeffnung. Der 8. Fall des oben berechneten Momentenschemas giebt das Moment über dem ersten und zweiten Pfeiler = 1212 und 1583 Mtn. an. Von den Enden der Parabeln abwärts sind diese Momente getheilt durch die Poldistanz von 15^{m}, d. h. 80,8 und 105,5^{tn} aufzutragen (diese sowie alle andern reducirten Momente des Momentenschemas sind in Klammern dem treffenden Moment beigefügt), und die dadurch erhaltenen Punkte bestimmen die Schlusslinie 8. In der ersten belasteten Oeffnung bezieht sie sich auf die voll ausgezogene Parabel und wurde, wie diese, auch ausgezogen. In der zweiten unbelasteten Oeffnung wurde sie punktirt, wie die ihr entsprechende Parabel.

Der Uebersichtlichkeit wegen wurden die verticalen Abstände zwischen den Schlusslinien und den Parabeln an den Stellen, wo sie Maximalmomente darstellen (Taf. $12_{3\,7}$), als Ordinaten von einer horizontalen Abscissenaxe aus aufgetragen; und zwar als positive Ordinaten abwärts, da wo die Parabeln unter der Schlusslinie liegen, und negativ aufwärts, wo sie über derselben liegen. Die Schlusslinie 8 giebt, wie oben schon bemerkt wurde, mit den gleichartig ausgezogenen Parabeln die ganze Curve der positiven Maximalmomente für die erste Oeffnung, und den mittleren Theil der Curve der negativen Maximalmomente für die zweite Oeffnung. Das positive Maximalmoment der zweiten und das negative Maximalmoment des mittleren (linkseitigen) Theiles der ersten Oeffnung erhält man durch Totalbelastung der zweiten und vierten Oeffnung (l_1 und l_3), während die erste und dritte Oeffnung unbelastet sind. Da diese Belastungsart auch aus Nr. 8 des Schemas hervorgeht, wenn man die Oeffnungen von hinten zu zählen beginnt, so ergiebt sich die dieser Belastungsart entsprechende und mit 8′ bezeichnete Schlusslinie dadurch, dass bei dem ersten Pfeiler 123,8^{tn} und bei dem zweiten 105,5^{tn} abwärts aufgetragen werden. Im Uebrigen gilt von dieser Belastungsart Alles, was so eben von der Belastungsart 8 gesagt wurde.

Auch über die Belastungsarten 4 und 12 der Totalbelastung der beiden ersten und der beiden mittleren Oeffnungen ist weiter nichts zu bemerken, als dass sie das negative Maximalmoment bei dem ersten und bei dem zweiten Pfeiler geben.

Es sind jetzt noch die Maxima der scheerenden Kräfte zu bestimmen. Wir begnügen uns damit, die auszuführende Construc-

tion für den einen Querschnitt im $^3/_4$ der zweiten Oeffnung zu erläutern. Die Belastungsart, welche die Summen der ausserhalb dieses Querschnittes wirkenden Kräfte zum Maximum macht, ist durch Nr. 11 des Momentenschemas angedeutet. Die Belastungen der ersten, dritten und vierten Oeffnungen üben nur auf die im Schema berechneten Momente Einfluss aus, und die Constructionen beschränken sich auf die Belastungen der zweiten Oeffnung; die drei ersten $^1/_4$ derselben sind total, das letzte nur mit dem Eigengewicht belastet, und das Kräftepolygon besteht daher, von oben beginnend, aus den mit den Belastungen bezeichneten Strecken 108,9, 108,9, 108,9 und 35,75. Die vier ersten Seiten des Seilpolygons dieser Belastungen fallen mit den der Totalbelastung zusammen, und nur die letzte Seite, welche mit dem auf die Belastung 35,75 folgenden Strahle des Kräftepolygons parallel läuft, weicht von der letzten Seite des vorhandenen Seilpolygons ab; diese letzte Seite jenseits des Schwerpunktes (der Mitte) des letzten unbelasteten $^1/_4$ der Oeffnung, also jenseits der $^7/_8$ derselben, wurde als einer unbelasteten Strecke entsprechend punktirt und mit 11 bezeichnet. Die Enden dieses Polygons fallen bei dem ersten Pfeiler mit dem Ende der Parabeln, und bei dem dritten Pfeiler mit dem dieser punktirten Linie 11 zusammen, und man erhält die Schlusslinie des Polygons dadurch, dass man die im Schema reducirten Pfeilermomente 95,1 und 170,5 von diesen Enden abwärts abträgt. Von diesen Schlusslinien sind nur kurze Strecken in der Nähe der Pfeiler punktirt, weil sie der letzten punktirten Seilpolygonseite 11 entsprechen, sie wurden auch mit 11 bezeichnet. Um nun die scheerende Kraft zu erhalten, hat man nach Nr. 93 S. 276 durch den Pol des Kräftepolygons (Taf. 12_5) zwei Parallelen zu ziehen; eine zur Schlusslinie, die andere zur Seilpolygonseite des treffenden Querschnittes, für den die scheerende Kraft bestimmt werden soll und welche die Parabel in ihm im vorliegenden Falle bei $^3/_4$ der Oeffnung berührt. Das Segment der das Kräftepolygon tragenden Verticallinie zwischen den zwei gezogenen Parallelen ist die gesuchte scheerende Kraft.

Von der Parallelen zur Schlusslinie wurde eine kleine Strecke in der Nähe des Kräftepolygons ausgezogen und auch mit 11 bezeichnet. Der Strahl, der zur Seilpolygonseite parallel läuft, ist schon vorhanden, er hat ja zur Construction derselben gedient und wurde (Taf. 12_5) ebenfalls mit (11) bezeichnet. Das Segment

zwischen den beiden mit 11 bezeichneten Punkten des Kräftepolygons stellt also die scheerende Kraft am Endpunkte der durch den Fall 11 des Schemas dargestellten Partialbelastung dar, und ist für diesen Punkt ein Maximum.

Für die übrigen Querschnitte wurden diese Kräfte auf dieselbe Weise bestimmt und eben so bezeichnet. Zu bemerken ist nur: dass in den Fällen 1, 5, 9 und 13, wo belastete $^1/_4$ vorkommen, die ersten vier Seiten der Polygone benutzt wurden, welche den unbelasteten Oeffnungen entsprechen. Die beigefügten fünften Seiten der totalbelasteten $^1/_4$ wurden, wie die dazu gehörigen Schlusslinien, ausgezogen. Aus selbstverständlichen Gründen laufen die Polygonseiten 1 und 7, 3 und 5, 11 und 13, endlich 9 und 15 miteinander parallel; ebenso sind die Polygonseiten 2, 6, 10 und 14 parallel zu den Endtangenten der punktirten Parabeln.

Der Uebersichtlichkeit wegen wurden auch diese scheerenden Kräfte in Taf. $12_{3\,7}$ als Ordinaten der punktirten Curve der P bei dem treffenden Querschnitte aufgetragen, und zwar ab- oder aufwärts (+ oder —), je nachdem im Kräftepolygon die sie darstellenden Segmente unter oder über dem Parallelstrahl zur Schlusslinie lagen. Diese scheerenden Kräfte sind auf dem Maassstabe der Belastungen von ,003 = 10 ^{tn} abzugreifen, der auch den Kräftepolygonen zu Grunde liegt. Betrachtet man aber in der Weise, wie wir es oben auseinander gesetzt haben, die Ordinaten der Curven der Maximalmomente als Darstellungen der Kräfte, welche an den Streckbäumen des Balkens wirken, so müssen diese, wie schon gesagt, auf einem dreimal kleinern Maassstabe abgegriffen werden, und erscheinen dann nicht mehr im richtigen Verhältniss zu den oben construirten scheerenden Kräften. Um daher keine falschen Vorstellungen zu erregen, haben wir (Taf. $12_{4\,8}$) diese Kräfte auf das Drittel reducirt, und sie geben daher in demselben Maassstabe, in welchem (Taf. $12_{3\,7}$) die an den Streckbäumen eines über die vier Oeffnungen gelegten, 5 Meter hohen Balkens wirkenden Kräfte geben: die scheerenden Kräfte, welche sich auf ein Stück Wand vertheilen, das der Höhe des Balkens gleich ist (die Höhe ist hier im Sinne von Nr. 77 S. 222 zu nehmen), oder die verticalen Seitenkräfte aller den Balken tragenden Streben, wenn der Balken ein Fachwerk sein sollte. Der Maassstab ist ,001 = 10 ^{tn}.

Die vier Figuren (Taf. $1_{3\,4\,7\,8}$) geben einen vollständigen Ueberblick aller am Balken wirkenden Kräfte.

Wir ersehen aus diesen Figuren:

a) Bezüglich der Inanspruchnahme der Streckbäume, des untern z. B. (beim obern finden genau die entgegengesetzten Spannungen statt). Innerhalb der Strecke *AB* (Taf. $12_{3,4}$), auf der nur positive Momente vorkommen, wird derselbe durch die Belastungen nur gespannt; innerhalb der Strecken *CD* und *EF*, wo nur negative Momente vorkommen, wird er nur gedrückt. An allen übrigen Stellen also innerhalb der Strecken *BC* und *DE*, wo positive und negative Momente vorkommen, und die zusammen 0,6 der ganzen Länge ausmachen, ist er bald gespannt, bald gedrückt. Auf dieser Strecke kann also der Querschnitt des Streckbaums der Art der Inanspruchnahme nicht angepasst werden, wie es bei allen feineren Constructionen dadurch geschieht, dass man dem gespannten Streckbaume einen band- oder kettenförmigen Querschnitt, dem gepressten aber einen gespreizten kastenförmigen Querschnitt giebt.

b) Bezüglich der verticalen Seitenkraft *P*. Das Maximum dieser Kraft, welche die scheerende Kraft in einer Blechwand, oder die verticale Seitenkraft der Streben in einem Fachwerke darstellt, ist dem nicht continuirlichen Balken gegenüber über den Widerlagern erheblich vermindert, über jedem der drei Pfeiler aber bedeutend vergrössert worden. Da es nun im vorliegenden Falle mehr Pfeiler als Widerlager giebt, so kostet die Füllung dieses continuirlichen Balkens mehr, als die der vier einzelnen nicht continuirlichen. Ferner sind durch die Continuität die Strecken *AB* und *CD* (Taf. $12_{4,5,8}$), innerhalb deren die scheerenden Kräfte bald positiv, bald negativ in Anspruch genommen werden, innerhalb deren daher Gegenstreben vorhanden sein müssten, wenn der Balken aus Fachwerk gebildet wäre, bedeutend vergrössert. Diese Strecken sind 21 und 24 Meter lang; sie wären nur 14,1 und 17,7 Meter lang, wenn der Balken nicht continuirlich wäre. Die Streben werden also auch wegen den Gegenstreben mehr Material in Anspruch nehmen, wenn der Balken continuirlich ist, als wenn er es nicht ist. Auf die Füllung des Balkens hat also die Continuität entschieden ungünstig gewirkt.

c) Bezüglich der Reduction der Spannweite. Häufig denkt man sich, wie wir es auch oben (Fig. 124 S. 277) andeuteten, die Spannweiten des continuirlichen Balkens durch die

Continuität auf die grösste Distanz, welche zwischen zwei Inflectionspunkten entstehen kann, reducirt. Im vorliegenden Fall wäre demnach die Spannweite einer Seitenöffnung von 52 Meter auf die Länge $AC = 45^{m}$, und die einer Mittelöffnung von 65 Meter auf $DE = 46^{m}$ reducirt worden. Da alle auf die Totalbelastung sich beziehenden Parabeln gleiche Parameter haben, so entsprechen die Spannungen in der Mitte genau diesen reducirten Weiten; man beabsichtigt, diese Spannungen und demnach auch diese Weiten AC und DE dadurch gleich gross zu machen, dass man den Aussenöffnungen nur $^{4}/_{5}$ der Weite einer Mittelöffnung giebt. Man sieht, dass dieser Zweck im vorliegenden Fall nur nahezu, nicht ganz erreicht worden ist. AC ist um einen Meter kleiner als DE. Für die im Beispiel angenommenen Belastungen mussten also die Aussenöffnungen etwa einen Meter grösser, d. h. zu 53 Metern (,816 . 65) angenommen werden, um diesen Zweck zu erreichen.

Ueber den Pfeilern sind die Momente viel grösser; sie würden Spannweiten von 55 und von 57 Metern entsprechen. Wenn der Querschnitt des Balkens den an ihm wirkenden Kräften nicht angepasst werden soll, so muss der Balken natürlich Dimensionen erhalten, welche diesen grösseren Spannungen auf den Pfeilern entsprechen. Um diese etwas zu vermindern, kann man die Stützpunkte auf den Mittelpfeilern etwas senken, oder man kann, wenn der Balken nur dadurch continuirlich gemacht wird, dass dessen einzelne Stücke auf den Pfeilern zusammengenietet werden, diese etwas weniger gegen einander neigen, als es geschehen müsste, wenn der Balken ganz continuirlich werden soll. Die in diesen Fällen auszuführenden Rechnungen sind rein analytischer Natur, und gehören nicht mehr in das Reich der graphischen Statik; wir durften uns damit begnügen, in Nr. 99 S. 305 die dazu nothwendigen Formeln aufzustellen.

103. Der Kräfteplan eines ungleichförmig belasteten continuirlichen Balkens mit fünf Oeffnungen.

Es seien die an einem über fünf Oeffnungen von 56, 70, 72, 70, 56 Meter Spannweite gestreckten continuirlichen Balken wirkenden Kräfte zu bestimmen. Der Balken soll eine Eisenbahn tragen, und es soll

die von einem Zug Engerth'scher Locomotiven von 10,6 Meter Länge herrührende Ungleichförmigkeit der Belastung in der Art berücksichtigt werden, dass in den Abscissen von 2,5, 3,6, 4,7, 5,9, 8,4 Meter Belastungen von 13, 13, 13, 8,5, 8,5 Tn. anzunehmen sind. Das Gewicht des Balkens beträgt 4,2, 4,9 und 5 Tn. für den lf. Meter der drei Oeffnungen von 56, 70 und 72 Meter Spannweite.

Für die erste Bestimmung der Kräfte wird angenommen, der Querschnitt des Balkens, also auch $\mathfrak{E}$ sei constant; es sind dann der Berechnung der D (Nr. 99 S. 305), wie im vorigen Beispiel, einfach die Spannweiten getheilt durch: $a_1 = 2\,(56+70) = 252$, der Berechnung zu Grunde zu legen, und man hat:

$$\lambda_0 = \lambda_4 = \frac{28}{126};\ \lambda_1 = \lambda_3 = \frac{35}{126};\ \lambda_2 = \frac{36}{126}.$$

$$\alpha_1 = \alpha_4 = 1;\quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{142}{126}.$$

Sobald man die Determinanten für mehrere Oeffnungen zu berechnen hat, geschieht es am einfachsten mittelst der Gaus'schen Summen- und Differenzenlogarithmen auf die folgende Weise:

		Differenzen.
$lg\ \alpha_1\,\alpha_2 =$	,05192	1,16452
$lg\ \lambda^2_1 =$	8,88740	
Der Differenz entsprechender $lg\ Gauss =$	$\bar{0}$,03080	
$lg\ D_2 = lg\ R_3 = lg\ \alpha_1\,\alpha_2 - lg\ Gs =$	$\bar{0}$,02112	
$lg\ \alpha_3 =$	0,05192	
$lg\ \alpha_3\ D_2 =$	$\bar{0}$,07304	1,16113
$lg\ \lambda^2_2\ D_1 = lg\ \lambda^2_2 =$	8,91186	
$lg\ Gs =$	$\bar{0}$,03105	
$lg\ D_3 = lg\ R_2 = lg\ \alpha_3\ D_2 - lg\ Gs =$	$\bar{0}$,04199	1,13347
$lg\ \lambda^2_3\ D_2 = lg\ \lambda^2_1\ D_2 =$	8,90852	
$lg\ Gs =$	$\bar{0}$,03318	
$lg\ D_4 = lg\ R_1 = lg\ 1\ .\ D_3 - lg\ Gs =$	0,00881	

Mittelst dieser lg der Determinanten bildet man nun durch einfache Addition und Subtraction die Coefficienten der Pfeilermomentengleichungen (Nr. 98 S. 300):

$$0 = +D_4\,\mathfrak{P}_1 + R_2\,\mathfrak{E}_1 - \lambda_1 R_3\,\mathfrak{E}_2 + \lambda_1\lambda_2 R_4\,\mathfrak{E}_3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\,\mathfrak{E}_4$$
$$0 = +D_4\,\mathfrak{P}_2 + \lambda_1 R_3\,\mathfrak{E}_1 + D_1 R_3\,\mathfrak{E}_2 - D_1\lambda_2 R_4\,\mathfrak{E}_3 + D_1\lambda_2\lambda_3\,\mathfrak{E}_4$$

Nämlich:

$$\begin{aligned}
lg\ R_2 &: D_4 = 0{,}03318; \quad \text{Num.} = 1{,}07940\\
lg\ \lambda_1 R_3 &: D_4 = 9{,}45600; \quad \text{„} \quad ,28576\\
lg\ \lambda_1 \lambda_2 &: D_4 = 8{,}89081; \quad \text{„} \quad ,07777\\
lg\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &: D_4 = 8{,}33452; \quad \text{„} \quad ,02163\\
lg\ D_1 R_3 &: D_4 = 0{,}01231; \quad \text{„} \quad 1{,}02874\\
lg\ D_1 \lambda_2 R_4 &: D_4 = 9{,}44712; \quad \text{„} \quad ,27996
\end{aligned}$$

Und die Pfeilermomentengleichungen werden:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_1 &= -1{,}0794\ \mathfrak{S}_1 + 0{,}2858\ \mathfrak{S}_1 - 0{,}0778\ \mathfrak{S}_3 + 0{,}0216\ \mathfrak{S}_4,\\
\mathfrak{P}_2 &= +0{,}2858\ \mathfrak{S}_1 - 1{,}0287\ \mathfrak{S}_2 + 0{,}2800\ \mathfrak{S}_3 - 0{,}0778\ \mathfrak{S}_4,\\
\mathfrak{P}_3 &= -0{,}0778\ \mathfrak{S}_1 + 0{,}2800\ \mathfrak{S}_2 - 1{,}0287\ \mathfrak{S}_3 + 0{,}2858\ \mathfrak{S}_4.
\end{aligned}$$

Unsere Rechnungen beschränken sich auf die Berechnung der obigen Gleichungen und auf die der $\mathfrak{S}$ für die unbelasteten Balken, für die man das

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S} \text{ der ersten Oeffnung} &= {}^1/_4 p l^3 = {}^1/_4 \cdot 4^t{,}2 \cdot \frac{28}{126} \cdot 56^2\\
&= 731{,}7,\\
\mathfrak{S} \text{ der zweiten Oeffnung} &= {}^1/_4 p l^3 = {}^1/_4 \cdot 4^t{,}9 \cdot \frac{35}{126} \cdot 70^2\\
&= 1667{,}4,\\
\mathfrak{S} \text{ der dritten Oeffnung} &= {}^1/_4 p l^3 = {}^1/_4 \cdot 5^t \cdot \frac{36}{126} \cdot 72^2\\
&= 1851{,}4.
\end{aligned}$$

Die übrigen $\mathfrak{S}$ werden wir, wegen der grossen Zahl der zu berücksichtigenden Belastungen, construiren. Wir beginnen die Constructionen mit der der Seilpolygone für den nicht continuirlichen Balken. Um das Kräftepolygon für die Totalbelastung aufzutragen, schlagen wir zum Druck eines jeden einzelnen Rades noch das Gewicht des Balkenstückes unter ihn.

Und zwar zum ersten Rad das Gewicht eines Balkenstücks

	Mtr.
von der Länge der folgenden Raddistanz, die wir uns halb vor, halb hinter dem Rad liegend denken . . .	1,1
Ebenso zum zweiten Rad	1,1
Zum dritten Rad die Hälfte der vorausgehenden und die Hälfte der folgenden Distanz 0,55 + 0,60 = . . .	1,15
Zum vierten ebenso 0,60 + 1,25 = ...	1,85
Zum fünften die vorausgehende Raddistanz	2,50
Für sich allein rechnen wir das noch fehlende Stück von	2,90
Summa, Totallänge der Locomotive:	10,60

Hätten wir die 4,5 Mtr. lange Strecke zwischen dem letzten und dem ersten Rad der folgenden Locomotive, halb zum letzten Rade der ersten und halb zum folgenden Rad der zweiten Locomotive schlagen wollen, so hätte sich der Schwerpunkt dieses Balkenstücks merklich von dem Rad entfernt, unter dem wir uns dieses Balkengewicht vereinigt denken. Auch bei dem dritten und dem vierten Rad fällt die Mitte des zu jedem einzelnen Rad gerechneten Balkenstücks nicht genau mit der Radabscisse zusammen; allein die Entfernung dieser beiden Räder vom Schwerpunkt der Totallast ist so gering, dass sie im Maassstab, in dem wir construiren, füglich vernachlässigt werden kann. Indem man die Länge der obigen Balkenstücke für die verschiedenen Oeffnungen mit ihren Gewichten 4,2, 4,9 und 5 Tn. pro lf. Meter multiplicirt und zu jedem der drei ersten Räder 13 Tn., zum dritten und vierten aber 8,5 Tn. addirt, erhält man die die Totallast bildenden Gewichte, welche bei den Radabscissen concentrirt gedacht werden:

	Gewichte der		
Radabscissen.	ersten	zweiten	dritten Oeffnung.
0,55 Mtr.	17,62	18,39	18,50 Tn.
1,65 „	17,62	18,39	18,50 „
2,75 „	17,83	18,635	18,75 „
3,95 „	16,27	17,565	17,75 „
6,45 „	19,00	20,75	21,00 „
9,15 „	12,18	14,21	14,50 „
10,60 „	100,52	107,94	109

Der Ursprung der Abscissen ist natürlich der Anfang des ersten Balkenstücks von 1,1 Mtr. Länge, auf dessen Mitte das Rad steht; und die Abscisse des ersten Rades der folgenden Locomotiven ist 11,15 Mtr.

Zur Bildung der Kräftepolygone $P' P'' P'''$ Taf. $13_{4\,5\,6}$ wurden die obigen Gewichte im Maassstab von ,012 = 100 Tn. so oft nacheinander aufgetragen, als entsprechende Räder in jeder der treffenden Spannweiten Taf. $13_{4\,5\,6}$ enthalten sind. In diesen letzten Figuren sind die Abscissen der Radaxen durch kurze Striche angedeutet. Diese Abscissen sind nicht numerirt; dagegen wurden von der Linken zur Rechten fortschreitend feine Verticallinien durch die Nullpunkte der obigen Abscissen, also durch den Anfangspunkt des Balkenstücks unter dem ersten Rad, gezogen und fortlaufend numerirt; es sind deren drei bei der ersten und vier bei den zwei folgenden

Oeffnungen. Ferner wurden noch solche Verticallinien von der Rechten zur Linken fortschreitend, mitten zwischen das vierte und fünfte Rad gezogen und ebenfalls numerirt; mit 4, 5, 6 bei der ersten Oeffnung, mit 5, 6, 7, 8 bei den folgenden zwei Oeffnungen. Diese Verticallinien bezeichnen die Schnitte, für welche wir das Maximum der scheerenden Kräfte bestimmt haben. Nach Nr. 96 S. 286 sollen sie möglichst nahe bei dem schwersten Theil der Belastung liegen, sie wurden demnach unmittelbar vor dem Balkenstück des ersten oder unmittelbar nach dem des dritten stärkst belasteten Locomotivrades angenommen, je nachdem die Maxima der negativen oder positiven scheerenden Kräfte bestimmt werden sollten. Ausserdem dienen sie auch dazu, die Räder der einzelnen Locomotiven zu gruppiren, und die entsprechende Numerirung des Trennungsstrichs der Lasten zwischen dem dritten und vierten und zwischen dem ersten und letzten Rad in den Kräftepolygonen $P' P'' P'''$ genügt vollständig, um jede Last ganz unzweideutig auf die entsprechende Verticallinie zu beziehen. Der Deutlichkeit wegen wurden die numerirten Theilstriche auch etwas länger als die übrigen gehalten.

Die Poldistanzen wurden zu 25^m angenommen, unter denen man sich die fünffache Constructionshöhe denken kann; die Pole sind mit $O' O'' O'''$ bezeichnet worden. Die Construction der voll ausgezogenen Seilpolygone Taf. $13_{4\,5\,6}$ für die Totalbelastung bedarf keiner weitern Erläuterung; wir bemerken nur, dass mit der Construction des Polygons für die zweite und dritte Oeffnung da begonnen wurde, wo man mit dem ersten und zweiten geendet hatte, sodass die drei Polygone eine continuirliche Linie bilden.

Die drei Schlusslinien dieser Polygone bilden auch die der Parabeln für den unbelasteten Balken, die Pfeile derselben über der Mitte der Schlusslinie betragen:

$$\tfrac{1}{2} \cdot 4{,}2 \cdot 28^2 : 25 = 65{,}86;\ \tfrac{1}{2} \cdot 4{,}9 \cdot 35^2 : 25 = 120{,}05$$
$$\text{und } \tfrac{1}{2}\, 5 \cdot 36^2 : 25 = 129{,}6 \text{ Tn.},$$

mittelst der sie leicht construirt werden können.

Für die Polygone der Partialbelastungen zur Construction der scheerenden Kräfte ausserhalb der numerirten Querschnitte, wurde jederzeit das vorhandene Polygon der Totalbelastung benutzt und das Eigengewicht gerade so wie in der vorigen Aufgabe mit einem Mal beigefügt, indem man sich dasselbe in der Mitte des unbelasteten Theiles concentrirt dachte. Gerade Linien, die auf dem

einen Pfeiler convergiren und auf dem andern das totale Eigengewicht jedes der drei Balken von 235,2, 343 und 360 Tn. abschneiden würden: gaben auf jeder numerirten Verticalen das Eigengewicht zwischen ihnen und dem ihnen im Sinn der Numerirung vorausgehenden Pfeiler. Diese Gewichte wurden in den Kräftepolygonen $P'\ P''\ P'''$, den zugeordneten Totalbelastungen folgend, aufgetragen und am Ende mit der entsprechenden accentuirten Ziffer versehen. So bezeichnet z. B. 2′2 das Eigengewicht zwischen dem vorausgehenden Pfeiler und der Verticalen 2, worauf die Totalbelastungen folgen. Die zwei Polygonseiten der Partialbelastung laufen mit den Strahlen O) 2, 2′ parallel. Die erste ist bis zum Schwerpunkt des Eigengewichts punktirt, die zweite nur am Ende der Oeffnung am linkseitigen Widerlager oder Pfeiler und trägt auch dort ihre Nummer.

Um an den construirten Polygonen die Pfeilermomente abtragen zu können, müssen wir vorher noch diese und die $\mathfrak{G}$ construiren.

Laut Formel 2 von Nr. 99 S. 305 erhält man den Einfluss der Belastungen der $i$ten Oeffnungen auf das $\mathfrak{G}$ des vorausgehenden Pfeilers, den wir hier mit $\mathfrak{G}_i$ bezeichnen wollen, aus:

$$\frac{4\,\mathfrak{G}_i}{a\,h} = \frac{2\,l-b}{{}^1/_4\,a}\cdot\frac{l-{}^1/_2\,b}{l}\cdot\frac{{}^1/_2\,b}{h}\cdot b\,p$$
$$+\frac{l\sqrt{2}+(l-b)}{{}^1/_4\,a}\cdot\frac{{}^1/_2\,(l-b)}{l}\cdot\frac{l\sqrt{{}^1/_2}-{}^1/_2\,(l-b)}{h}\cdot(l-b)\,p'$$
$$+\sum_{i}^{i+1}\frac{2\,l-b}{{}^1/_4\,a}\cdot\frac{l-b}{l}\cdot\frac{b}{h}\cdot\triangle P;$$

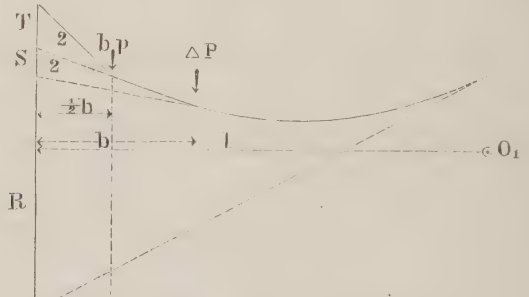
und den derselben Belastungen auf das $\mathfrak{G}$ des folgenden $i+1$ten Pfeilers, den wir mit $\mathfrak{G}_{i+1}$ bezeichnen, aus:

$$\frac{4\,\mathfrak{G}_{i+1}}{a\,h} = \frac{l\sqrt{2}+b}{{}^1/_4\,a}\cdot\frac{l\sqrt{{}^1/_2}-{}^1/_2\,b}{l}\cdot\frac{{}^1/_2\,b}{h}\cdot b\,p$$
$$+\frac{l+b}{{}^1/_4\,a}\cdot\frac{{}^1/_2\,(l-b)}{l}\cdot\frac{{}^1/_2\,(l+b)}{h}\cdot(l-b)\,p'$$
$$+\sum_{i}^{i+1}\frac{l+b}{{}^1/_4\,a}\cdot\frac{l-b}{l}\cdot\frac{b}{h}\,\triangle P;$$

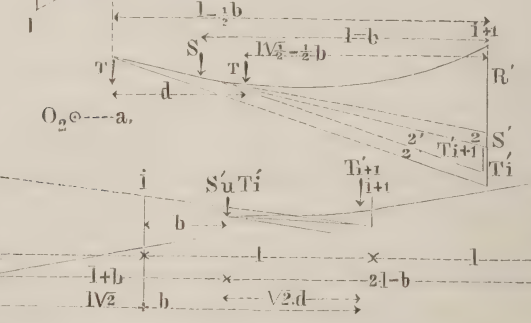
wo l überall die Weite der Oeffnung i, p eine am $i$ten Pfeiler, p' eine am $i+1$ten Pfeiler anstehende, pro 1 Meter vertheilte und, wie früher $\triangle P$, eine concentrirte Belastung bezeichnen.

Wir denken uns in jedem der einzelnen Glieder den letzten Factor bp, $(l-b)p$ und $\triangle P$ als Gewicht aufgetragen. Diese Gewichte sind dieselben als wie die der Kräftepolygone P' P'' P''', die daher auch hierzu dienen können. An den bereits construirten Seilpolygonen der Total- und der Partialbelastungen können dann die zwei letzten Producte aller einzelnen Lasten, die von der Form $\frac{b}{h} \triangle P$; $\frac{\frac{1}{2}b}{h} \cdot bp$ und $\frac{\frac{1}{2}(l+b)}{h} (l-b)p'$ sind, abgegriffen werden; sie werden durch die Segmente des linkseitigen Pfeilers jeder treffenden Oeffnung dargestellt. Um besser entnehmen zu können, wo all diese einzelnen Segmente abzugreifen sind, haben wir in Fig. 137, 138 und 139 die nothwendigen Constructionen für

Figur 137.



Figur 138.



Figur 139.

eine am $i$ten Pfeiler anstehende, und Fig. 140, 141 und 142 für eine abstehende vertheilte und für eine concentrirte Belastung $\triangle P$ besonders herausgezeichnet. Nach Nr. 48 S. 127 ist in Fig. 137 dem Seilpolygon: S das Moment der Kraft $\triangle P$ in Bezug auf den ersten Pfeiler, also $S = \frac{b}{h} \cdot \triangle P$. R möge ferner die Momentensumme der $\triangle P$ vorausgehenden Lasten darstellen, und T das Moment der

auf die Strecke b vertheilten zufälligen Last bp, die am Hebelsarm $^1/_2\ b$ wirkt. Betrachtet man nun, Nr. 60 S. 161 entsprechend, R, S und T als neues Kräftepolygon, und nimmt man dessen Pol O_1 in der Distanz l an, so werden die Seiten des mit ihm construirten Seilpolygons Fig. 138 auf der Verticalen des $i+1$ten Pfeilers Segmente $R'\,S'$ und T'_i abschneiden, die den Momenten von R, S, T in Bezug auf diese Verticale, also:

$$S' = \frac{(l - b)}{l} \cdot S = \frac{(l-b)\,b}{l\,h} \triangle P,$$

$$T'_i = \frac{l - {}^1/_2\,b}{l} \cdot T = \frac{l - {}^1/_2\,b}{l} \cdot \frac{{}^1/_2\,b}{h} \cdot b\,h$$

gleich sind.

Das Moment der $\triangle P$ vorausgehenden Lasten ist dann wieder dem Obigen entsprechend in Fig. 138 mit R' bezeichnet.

Um das zu 6_{i+1} gehörige T'_{i+1} zu bilden, braucht man nur den Angriffspunkt des T, dessen Entfernung vom Pfeiler $i+1 = l - {}^1/_2\,b$ ist, in die Entfernung $l\sqrt{{}^1/_2} - {}^1/_2\,b$ zu verschieben, was einer Verrückung desselben um $d = (1 - \sqrt{{}^1/_2})\ l$ gleichkommt, wie es Fig. 138 angedeutet ist. d ist gleich der Differenz zwischen der Spannweite l und der Diagonale eines Quadrats, dessen Seite $= {}^1/_2\ l$ ist und kann daher leicht construirt werden. Es versteht sich von selbst, dass dieses d, welches von der Länge der Partialbelastung unabhängig ist, für alle Lasten das gleiche bleibt; es wird dann:

$$T'_{i+1} = \frac{l\sqrt{{}^1/_2} - {}^1/_2\,b}{l} \cdot T = \frac{l\sqrt{{}^1/_2} - {}^1/_2\,b}{l} \cdot \frac{{}^1/_2\,b}{h} \cdot b\,p.$$

Wie in Fig. 137, bezeichnet auch in Fig. 138 R' die Summe der $\triangle P$ vorausgehenden, concentrirten Lastenmomente.

Zum letzten Mal betrachten wir R', S', T'_i und R', S', T'_{i+1} als Kräftepolygone, nehmen den Pol O_2 in der Entfernung $^1/_4\ a$, wo a den gemeinschaftlichen Nenner bezeichnet, mittelst dessen bei Berechnung der Determinanten alle Spannweiten reducirt wurden (252 Mtr. im vorliegenden Beispiel) und zeichnen mit diesem das letzte Seilpolygon Fig. 139. Da dieses letzte Polygon dreimal so lang als die Weite l ist, so wurde es im halben Maassstabe gezeichnet und der eigentlichen Spannweite noch eine Länge l vor i und eine andere nach $i+1$ beigefügt. Die Entfernung des bei b wirkend angenommenen S' und T'_i vom Ende der letztern beträgt

$2\,l - b$, und die ihnen entsprechenden Strahlen schneiden auf der äussersten Verticalen rechts Segmente ab, die gleich sind:

$$\frac{2\,l-b}{{}^1/_4\,a}\cdot\frac{l-{}^1/_2\,b}{l}\cdot\frac{{}^1/_2\,b}{h}\cdot bp \text{ und } \frac{2\,l-b}{{}^1/_4\,a}\cdot\frac{(l-b)}{l}\cdot\frac{b}{h}\triangle P,$$

und die sich auf ihr zu $\mathfrak{G}_i$ summiren.

Die beiden auf S' sich kreuzenden Polygonseiten der Belastung $\triangle P$ schneiden auf der Verticalen, die um die Länge l vom Pfeiler i absteht, den treffenden Theil von $\mathfrak{G}_{i+1}$ oder

$$\frac{l+b}{{}^1/_4\,a}\cdot\frac{l-b}{l}\cdot\frac{b}{h}\triangle P$$

ab, weil die Entfernung des Angriffspunktes von S' von jener Verticalen $= l + b$ ist. Um zur Bildung von

$$\frac{l\sqrt{2}+b}{{}^1/_4\,a}\cdot T'_{i+1} = \frac{l\sqrt{2}+b}{{}^1/_4\,a}\cdot\frac{l\sqrt{{}^1/_2}-{}^1/_2\,b}{l}\cdot\frac{{}^1/_2\,b}{h}\cdot bp,$$

den Angriffspunkt von T'_{i+1} zu erhalten, hat man nur den von T'_i, der bei $l + b$ liegt, um $l\,(\sqrt{2}-1)$, d. h. um $\sqrt{2}\,d$ gegen $i+1$ zu verschieben, und man erhält den eben angeschriebenen noch fehlenden Theil von $\mathfrak{G}_{i+1}$. Da der Maassstab von Fig. 139 halb so gross als der der beiden vorausgehenden Figuren ist, so ist das $\sqrt{2}\,d$ von Fig. 139 in Wirklichkeit $= {}^1/_2\sqrt{2}\,d = \sqrt{{}^1/_2}\,d = 0{,}71\,d$ der Fig. 138.

Da auf Fig. 139 kein Polygon mehr folgt, so brauchen nicht alle Seiten desselben verlängert zu werden, um die Unterabtheilungen von $\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}_{i+1}$, R'' S'' und T'' zu markiren, es genügt, diejenigen zu verlängern, welche das totale $\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}_{i+1}$ abschneiden.

Wir brauchen nicht erst darauf aufmerksam zu machen, dass in Fig. 139 $\frac{l_{i+1}}{{}^1/_4\,a\,h}$ und $\frac{\mathfrak{G}_i}{{}^1/_4\,a\,h}$ statt l_{i+1} und $\mathfrak{G}_i$ zu lesen ist, und dass auf dem Maassstab der Kräfte die mit diesen Buchstaben bezeichneten Längen $2\,.\,\frac{\mathfrak{G}_{i+1}}{a\,h}$ und $2\,.\,\frac{\mathfrak{G}_i}{a\,h}$ wegen des kleinern Maassstabs der Fig. 139 messen.

Was bisher von der Construction des, von der i anliegenden vertheilten Belastung lp gesagt wurde, gilt auch von der $i+1$ anliegenden $(l-b)\,p'$, wenn, wie die obigen Formeln es andeuten, alle Hebelsarme entsprechend geändert werden; wir glauben uns daher damit begnügen zu dürfen, für die Construction der:

$$T'_i = \frac{^1/_2(l-b)}{l} \cdot T_i = \frac{^1/_2(l-b)}{l} \cdot \frac{l\sqrt{^1/_2} - ^1/_2(l-b)}{h} \cdot (l-b)\,p',$$

$$T'_{i+1} = \frac{^1/_2(l-b)}{l} \cdot T_{i+1} = \frac{^1/_2(l-b)}{l} \cdot \frac{^1/_2(l+b)}{h} \cdot (l-b)\,p',$$

und der:

$$T''_i = \frac{l\sqrt{2}+l-b}{^1/_4\,a} \cdot T'_i$$

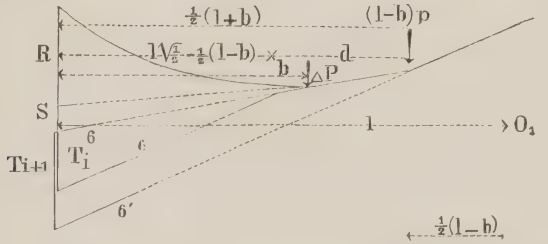
$$= \frac{l\sqrt{2}+l-b}{^1/_4\,a} \cdot \frac{^1/_2(l-b)}{l} \cdot \frac{l\sqrt{^1/_2} - ^1/_2(l-b)}{h} \cdot (l-b)\,p',$$

$$T''_{i+1} = \frac{l+b}{^1/_4\,a} \cdot T'_{i+1}$$

$$= \frac{(l+b)}{^1/_4\,a} \cdot \frac{^1/_2(l-b)}{l} \cdot \frac{^1/_2(l+b)}{h} \cdot (l-b)\,p',$$

die Lage aller Hebelsarme in den folgenden Figuren 140, 141, 142 anzudeuten, in denen jedoch, wie in den früheren Figuren, die in $\mathfrak{S}_i$

Figur 140.



Figur 141.

Figur 142.

und $\mathfrak{S}_{i+1}$ aufgehenden T''_i und T''_{i+1} nicht besonders angegeben sind.

An den von $\triangle P$ herrührenden Momenten R, S, R', S' und R'', S'' ändert sich natürlich gar nichts und die Lage der Hebelsarme bleibt dieselbe als wie in den früheren Figuren.

Die Constructionen von Fig. 137 und 140 repetiren sich auf Taf. $13_{4\,5\,6}$. Die verlängerten Polygonseiten geben auf den linken

Pfeilern die S, die sich dort summiren, die einzelnen ausgezogenen Theilstriche entsprechen den einzelnen Radgewichten und die etwas längeren numerirten Theilstriche den feinpunktirten und numerirten Lamellengrenzen, für welche die Bestimmung der scheerenden Kräfte unternommen wird. Die bei diesen Theilstrichen mündenden Polygonseiten des anliegenden Eigengewichts Nr. 1, 2, 3 und 4 bei der zweiten und dritten Oeffnung wurden bis zur Abscisse $^1/_2 b$ punktirt, wo man sich das Eigengewicht bp vereinigt denkt. Der zweite, das T von Fig. 137 projicirende Schenkel ist auf dem linkseitigen Pfeiler auch punktirt und mit der entsprechenden accentuirten Nummer versehen. Die Polygonseiten 5, 6, 7, 8 bei Taf. 13_5, auf welche das abstehende Eigengewicht $(l-b)\,p'$ folgt, sind innerhalb der Strecke d punktirt und tragen an beiden Enden ihre Nummer. Die Entfernung dieser Enden vom linken Pfeiler sind $\sqrt{^1/_2} - ^1/_2\,(l-b)$ und $^1/_2\,(l+b)$. Zwei mit dem entsprechenden Strahl der Kräftepolygone P parallele Strahlen schneiden auf dem linken Pfeiler unter der Polygonseite die T_i und T_{i+1} ab; für Nr. 6 z. B. die Strecken $6\,6' = T_i$ und $6\,6'' = T_{i+1}$.

Auf Taf. $13_{7\,8\,9}$ wurden die Fig. 138 und 141 entsprechenden Constructionen gerade so wie die von Taf. $13_{4\,5\,6}$ behandelt. Alle Polygonseiten laufen parallel mit den Strahlen der Büschel, welche von den Punkten $O_1'\ O_1''\ O_1'''$ aus die oben construirten T projiciren, und schneiden auf den rechtseitigen Pfeilern die S' ab, die sich dort summiren. Für die Trennungslinien 1...4 des abstehenden Eigengewichts sind die Polygonseiten innerhalb der Strecke d punktirt worden, sodass ihre Enden, welche die zugeordneten Nummern tragen, bei $l - ^1/_2 b$ und $l\sqrt{^1/_2} - ^1/_2 b$ liegen. Parallele zu dem accentuirten Strahl O_1 schneiden auf den rechtseitigen Pfeilern, über den S', die T'_i und die T'_{i+1} ab. Die das erstere abschneidende Seite, von der ein kleines Stück nur punktirt ist, trägt einen Accent, die das zweite abschneidende zwei Accente. Die Polygonseiten bei den Trennungslinien 5, 6, 7, 8 des abstehenden Eigengewichts sind bis zur Entfernung $^1/_2\,(l-b)$ vom rechtseitigen Pfeiler verlängert. Die Parallelen zu den accentuirten Strahlen von T_i und T_{i+1} durch diesen einen Endpunkt schneiden auf dem rechtseitigen Pfeiler die entsprechenden T' ab. Wie oben also ist z. B. $3\,3' = T'_i$ und $3\,3'' = T'_{i+1}$.

Taf. $13_{10\ 11\ 12}$ sind die Fig. 139 und 142 entsprechenden Constructionen ausgeführt. Aus den oben schon angeführten Gründen wurden diese Constructionen nur im halben Maassstabe ausgeführt und im Uebrigen wie in Taf. $13_{4\ldots9}$ behandelt. Alle Polygonseiten, welche den numerirten Lamellengrenzen entsprechen, sind innerhalb der Strecke $d\sqrt{2}$ punktirt. Die Endpunkte derselben liegen daher für die $\triangle P$ und das anliegende Eigengewicht, in der Entfernung $2l - b$ von den Linien auf welche die $\mathfrak{G}_i$, und in der Entfernung $l\sqrt{2} + b$ von denen, auf welchen die $\mathfrak{G}_{i+1}$ projicirt werden; und für die $\triangle P$ und das abstehende Eigengewicht, in der Entfernung $l\sqrt{2} + l - b$ von der Linie der $\mathfrak{G}_i$ und $l + b$ von der der $\mathfrak{G}_{i+1}$. Da alle obigen Constructionen nur ausgeführt wurden, um die summirten Längen von $\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}_{i+1}$ zu erhalten, so war es nicht, wie auf Taf. $2_{4\ldots9}$, nothwendig, die Verlängerungen jeder einzelnen Polygonseiten auf den Linien der $\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}_{i+1}$ anzugeben.

Für die erste Oeffnung fehlen alle Constructionen, die zu $\mathfrak{G}_i$ gehören, weil dieses für den ersten Pfeiler (das Widerlager) nicht in die Formeln tritt; für die dritte Oeffnung fehlen die letzten Lamellengrenzen 5 6 7 8, weil wegen der vollkommen symmetrischen Gestalt des Balkens, die ersten vier die gleichen Resultate geben müssen.

Nach Obigem haben wir jetzt nur den Theil von $2\,\frac{\mathfrak{G}}{a\,h}$ für jede Oeffnung construirt, der von dieser Oeffnung herrührt. Wir haben daher diese durch 2 zu dividiren und bei den $\mathfrak{G}_i$ den von der vorausgehenden, und bei den $\mathfrak{G}_{i+1}$ den von der folgenden Oeffnung herrührenden Theil zu addiren. Zur Division durch 2 wurden durch alle Endpunkte der $\mathfrak{G}$ Linien gezogen, die einen Winkel von 30^0 mit ihr bilden, die Perpendikel von den Punkten $1 \ldots 8$ sind dann die halbirten $\mathfrak{G}$. Der die vorausgehende oder folgende Oeffnung betreffende Theil wurde dann noch ganz einfach mittelst einer zweiten Linie, die auch 30^0 mit der Verticalen bildet, addirt. Diese Oeffnungen sind immer entweder ganz belastet oder ganz unbelastet. Im ersten Fall geben die Totallängen der $\mathfrak{G}$ Taf. $13_{10\,11\,12}$ direct ihre Längen; für unbelastete Oeffnungen haben wir S. 330 schon die $\frac{\mathfrak{G}}{a}$ berechnet, indem wir dieselben noch durch die Pol-

distanz $h = 25$ Mtr. dividiren, erhalten wir den Theil von $\frac{\mathfrak{G}}{ah}$, der von den unbelasteten Oeffnungen herrührt, = 292,7; 667,0 und 740,6 Tn.

Für die Lamellengrenzen 1 2 3, welche eine Totalbelastung auf der Seite des folgenden Pfeilers $i + 1$ voraussetzen, muss wegen der strengen Abwechselung der belasteten und der unbelasteten Strecken die vorausgehende Oeffnung belastet, die folgende aber unbelastet sein. Bei Zusammensetzung der $\mathfrak{G}$ verlangen daher die $\mathfrak{G}_i$ das Beifügen eines von der Totalbelastung der vorausgehenden, und die $\mathfrak{G}_{i+1}$ das Beifügen eines von der nicht belasteten folgenden Oeffnung herrührenden $\mathfrak{G}$. Für die letzten Lamellengrenzen 5 6 7 8 ist es gerade umgekehrt. Die von belasteten Oeffnungen herrührenden Theile von $\mathfrak{G}$ wurden voll ausgezogen, die von den unbelasteten aber herrührenden nur punktirt. Aus der ganzen Anordnung der Zeichnung geht dann noch hervor, dass auf allen abfallenden Linien, auf denen die Totale $\mathfrak{G}$ abzugreifen sind, punktirte der unbelasteten, auf allen aufsteigenden aber ausgezogene $\mathfrak{G}$ der totalbelasteten Oeffnungen zu addiren sind.

Diesen Taf. $13_{10\,11\,12}$ können nun alle $\mathfrak{G}$, deren man zur Zusammensetzung der Momente S. 330 bedarf, entnommen werden. Ausser den von Partialbelastungen herrührenden $\mathfrak{G}$, für die diese Figuren eigentlich construirt wurden, kann man auf allen aufsteigenden Linien als grösste Ordinate das $\mathfrak{G}$ von zwei aufeinander folgenden totalbelasteten, und auf allen abfallenden ebenso das $\mathfrak{G}$ zwischen einer totalbelasteten und einer gar nicht belasteten Oeffnung abgreifen. Kein Irrthum aber ist möglich, wenn man darauf achtet, dass die Indexe in den Figuren sich immer auf die belasteten Oeffnungen beziehen.

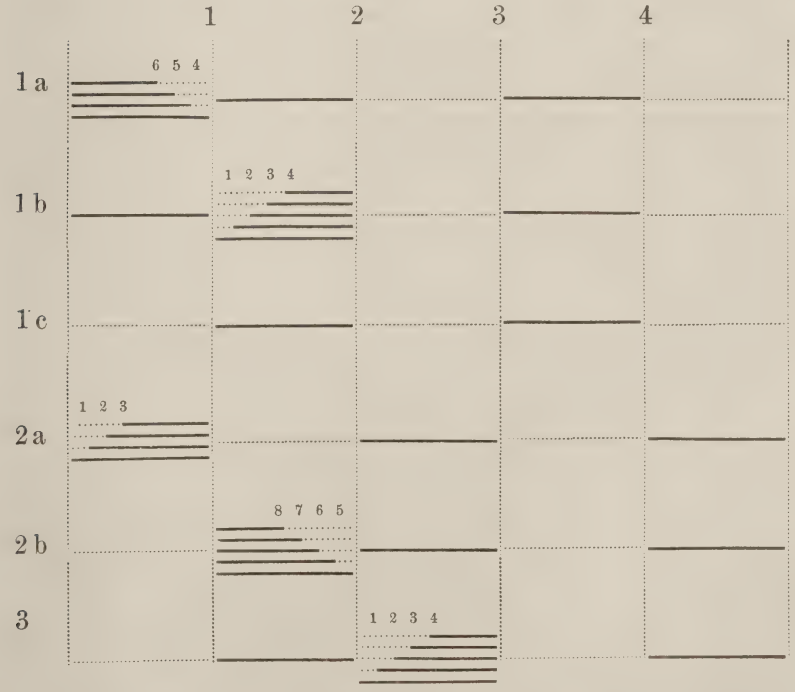
Um diese $\mathfrak{G}$ zur Bildung der $\mathfrak{P}$ S. 330 mit den dort zusammengestellten positiven und negativen Zahlencoefficienten zu multipliciren und die Producte zu addiren, wären die rechnerischen Methoden der Nr. 102 S. 319 allzu weitläufig gewesen: wir haben daher auch diese Operationen graphisch nach Nr. 4 S. 22 gerade so, wie wir es auf Taf. 2_1 dargestellt haben, ausgeführt.

Alle vorkommenden Combinationen der verschiedenen $\mathfrak{G}$ sind Taf. 13_{13} auf drei verticalen Linien aneinander gereiht. Als Einheit für die Coefficienten, mit welchen sie zu multipliciren sind, wurde eine Poldistanz von 5 Ctm. angenommen und mittelst der

Pole O'_3 O''_3 O'''_3 die Seilpolygone Taf. 13_{14} construirt. Jedem der drei ersten Pfeiler ist zur Construction der $\mathfrak{P}$ eine Verticale $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3$ zugewiesen. Die Entfernungen der Ecken der dort verzeichneten Polygone von der mit einem Sternchen bezeichneten Verticalen sind im Maassstab von 5 Ctm. = 1 gleich den Coefficienten der $\mathfrak{S}$ in der Gleichung der $\mathfrak{P}$. Da nun die Poldistanzen Taf. $13_{13} = 1$ sind, so schneiden die äussersten Polygonseiten Taf. 13_{14} auf den Verticallinien die Pfeilermomente $\mathfrak{P}$ ab.

Zum Verständniss dieser Figuren bemerken wir hier noch, dass die Ecken, deren Entfernungen gleich — 1,079 und — 1,029 sind, in die zweite Brückenöffnung fallen; dass die dort sich schneidenden Seiten bei dem Pfeiler 1 unterbrochen sind, und stellen Fig. 143 schematisch die Belastungsarten dar, auf welche sich die verschiedenen Polygone beziehen. Durch starke Striche sind die belasteten Strecken, durch punktirte die unbelasteten angedeutet:

Fig. 143.



Auf der Verticalen 1 Taf. 13_{13} sind die Fälle 1 a b c der Fig. 143 vereinigt, für alle diese Belastungsarten sind die $\mathfrak{S}_3$ und $_4$ constant,

die $\mathfrak{G}_1$ und $_2$ variabel; werden sie daher so aneinander gereiht, dass erstere in die Mitte kommen, so brauchen nur die Längen der äussersten $\mathfrak{G}_1$ und $_2$ geändert zu werden, um alle diese Fälle auf einer einzigen Linie zu vereinigen. Die Striche rechts mit den beigeschriebenen Ziffern entsprechen den Belastungen 1 a, die Striche links den Belastungen 1 b und die Ringchen in der Mitte der einzigen Belastungsart 1 c. Die Linie 2 Taf. 13_{13} ist die Trägerin der Belastungsarten 2 a b Fig. 143. Wie in 1, sind die $\mathfrak{G}_3$ und $_4$ constant, aber nicht die gleichen bei diesen Belastungsarten, $\mathfrak{G}_1$ und $_2$ variabel, die $\mathfrak{G}$ können daher auch auf dieselbe Weise aneinander gereiht werden. Die linke Seite der Linie ist den $\mathfrak{G}$ der Belastungen 2 b, die rechte den 2 a zugewiesen, ausserdem sind noch die Enden dieser letztern $\mathfrak{G}$ durch Ringchen angegeben, um besser hervorzuheben, dass das gerade Gebilde rechts kürzer als wie das links ist.

Bei den Belastungsarten 3 Fig. 143 sind $\mathfrak{G}_1$ und $_4$ constant, $\mathfrak{G}_2$ und $_3$ variabel; sie wurden daher in der Folge $\mathfrak{G}_{2\,4\,1\,3}$ aneinander gereiht. Träger dieser $\mathfrak{G}$ ist in Taf. 13_{13} die Linie 3. Da sie nur ein einziges gerades Gebilde trägt, so sind keine besondern Unterscheidungsmerkmale nothwendig. Specieller wird die Folge 2 4 1 3, sowie auch die Folge 1 3 4 2 dadurch bestimmt, dass die Coefficienten der $\mathfrak{G}$ in den Gleichungen der $\mathfrak{P}$ wachsen: man hat also mit dem $\mathfrak{G}$ begonnen, das in $\mathfrak{P}$ den grössten negativen, und mit dem geendet, das den grössten positiven Coefficienten hat.

Die Construction der einzelnen Seilpolygone auf Taf. 13_{14} bedarf keiner weitern Erklärung; die Anordnung ist wie oben schon bemerkt wurde, so getroffen, dass alle denselben Pfeiler betreffende $\mathfrak{P}$ auch auf einer und derselben Verticalen abgegriffen werden können; und die Bezeichnung ist derart, dass für jede Belastungsart die entsprechenden $\mathfrak{P}$ schnell und sicher gefunden werden können.

Die so construirten $\mathfrak{P}$ entsprechen nun ganz den im vorigen Beispiel berechneten und auf der schematischen Tafel der S. 321 mit Klammern eingetragenen Momenten. Die Benutzung derselben zur Construction der Maximalmomente und der Maxima der scheerenden Kräfte ist genau dieselbe wie dort, und wir haben zum Verständniss der Construction nichts weiter als die Bezeichnung zu erklären.

Die Schlusslinien, welche die Maximalmomente in der Mitte der Oeffnungen geben, sind wie auf Taf. 12_{26} ganz durchgezogen und

gestricht oder ausgezogen, je nachdem sie einer unbelasteten oder belasteten Oeffnung entsprechen. Da diese zwei Schlusslinien mit keiner andern verwechselt werden können, haben sie gar kein Zeichen erhalten; die Belastungsarten, welche zur Bestimmung der dazu gehörigen Momente dienten, sind Fig. 143 durch die Fälle 1 c und die Totalbelastung von 2 a dargestellt.

Die Schlusslinien, welche die Maximalmomente auf und in der Nähe der Pfeiler darstellen, sind nur zwischen diesen und der Momentencurve ausgezogen; auch diese Schlusslinien haben kein Zeichen erhalten, und die Momente wurden durch die Totalbelastungen von 1 b und 2 b Fig. 143 bestimmt.

Von den übrigen Schlusslinien, die nur dazu dienen, die Maxima der scheerenden Kräfte dadurch zu ermitteln, dass durch die Pole der Kräftepolygone $P' P''$ und P''' Parallellinien zu ihnen und zu den entsprechenden Seiten der Momentencurven gezogen werden, sind nur kurze Strecken in der Nähe der Pfeiler ausgezogen worden. Diese Schlusslinien tragen die Zeiger 1 2 ... 7 8 wie die dazu gehörigen Belastungsarten der Fig. 143. Dieselben Zeiger tragen auch die Enden der zu ihnen parallel durch die Pole $O' O'' O'''$ gezogenen Linien auf der rechten Seite der $P' P'' P'''$. Ganz wie auf Taf. $12_{1\,5}$, ist daher auch hier die scheerende Kraft durch das Segment zwischen den Strahlen mit den gleichen Zeigern 1 1, 2 2, ... dargestellt.

Taf. $13_{1\,2\,3}$ wurden nun die sämmtlichen Maxima der Momente und der scheerenden Kräfte aufgetragen, erstere im gleichen Maassstab wie in Taf. $13_{4\,5\,6}$, letztere halb so gross wie die Construction auf $P' P'' P'''$ ergab. Wie auf Taf. $12_{3\,7}$, wurden die Curven der positiven und negativen Maximalmomente auf entgegengesetzten Seiten, wie die Construction sie ergab, aufgetragen.

Bei dem Auftragen der scheerenden Kräfte der letzten Oeffnung ergab sich in der Curve ein Bruch bei dem ersten und letzten Rad, indem sich die scheerenden Kräfte bei den Pfeilern kleiner ergaben, als der Verlauf der Curven es verlangt. Der Grund ist einfach der, dass die Stellung des Zuges über dieser Oeffnung zufälliger Weise nicht so ist, wie sie sein müsste, wenn die scheerenden Kräfte über den Pfeilern ein Maximum sein sollen; es müssten nämlich dann die drei schwersten Räder gerade vor den Pfeilern stehen, was bei der angenommenen, bezüglich der Mitte der Oeffnung symmetrischen Belastung gerade nicht der Fall ist. Wir

glaubten uns übrigens enthalten zu dürfen, das Maximalmoment für den Pfeiler besonders zu construiren, und begnügten uns damit, die durch die vorausgehenden Punkte bestimmte Curve bis zu den Pfeilern zu verlängern.

Unter der Voraussetzung, dass die Streckbäume aus Blechplatten construirt werden, haben wir die Momentencurve mit Staffeln umhüllt, deren Höhe die Kraft darstellen mag, der eine Platte widerstehen kann. Sollte angenommen werden, dass für die absolut angegriffenen Theile ein grösserer Tragmodul als für die rückwirkend angegriffenen angewendet werden dürfe: so widersteht eine Platte und auch der constante Querschnitt, unter den aus technischen Gründen nicht heruntergegangen werden darf, Kräften, welche um das Verhältniss der Tragmodul grösser sind als die, welchen die gleichen, rückwirkend angegriffenen Theile widerstehen können. Für diese erhält man daher eine zweite Reihe solcher umhüllenden Staffeln.

Auf Taf. $13_{1\,2\,3}$ wurde vorausgesetzt, es sei das Verhältniss der beiden Tragmodul $= 5:6$ und dann die Staffeln für den obern Streckbaum ausgezogen, die für den untern aber gestricht.

Die Frage nun, wie werden die an den einzelnen Theilen des continuirlichen Balkens wirkenden Kräfte dadurch modificirt, dass man den Querschnitt nicht constant annimmt, wie es in den bisherigen Rechnungen vorausgesetzt wurde, sondern ihn den Ordinaten der umhüllenden Staffeln proportional macht, wollen wir in der nächsten Nummer untersuchen.

104. Kräfteplan eines ungleichförmig belasteten continuirlichen Balkens mit fünf Oeffnungen bei veränderlichem Querschnitt.

Es seien die Kräfte zu bestimmen, welche an einem ungleichförmig belasteten continuirlichen Balken von fünf Oeffnungen wirken, dessen Spannweiten und Belastungen (zufällige und Eigengewicht) die gleichen, als wie bei dem Balken von Nr. 11 S. 39 sind, dessen Querschnitte an den verschiedenen Stellen aber den Ordinaten der staffelförmigen Linie (Taf. $13_{1\,2\,3}$) proportional sind.

Unter der Voraussetzung, dass die Höhe des Balkens constant sei, sind die $\mathfrak{E}$ der Fundamentalformel den Querschnitten proportional, und die Ordinaten der staffelförmigen Linie (Taf. 13_{123}) sind demnach auch den $\mathfrak{E}$ proportional. Wäre dies aus irgend einem Grunde nicht der Fall, so müssten diese Ordinaten den $\mathfrak{E}$ proportional gemacht werden, denn nur diese brauchen wir zu unserer Construction.

Wir multipliciren nun die Fundamentalgleichung des Balkens mit staffelförmigem Querschnitt (Nr. 100 S. 309) mit einem der $\mathfrak{E}$ dem grössten $\mathfrak{E}_m$ z. B., und setzen das Verhältniss $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_m} = \eta$; dann fallen alle $\mathfrak{E}$ aus der Gleichung, wenn die y und $z + z'$ gleich 0 sind, wie wir bisher vorausgesetzt haben, und in der, wie früher auch noch mit a_1 dividirten Fundamentalgleichung:

$$\lambda_{i-1}\,\mathfrak{P}_{i-1} + \alpha_i\,\mathfrak{P}_i + \lambda_i\,\mathfrak{P}_{i+1} + \mathfrak{E}_i = 0,$$

sind die folgenden Ausdrücke zu construiren:

$$\alpha_i = \frac{1}{a_1} \sum_{i-1}^{i+1} \frac{(m^2 + {}^1/_{12} \triangle x^2) : \eta\, l}{l} \cdot \triangle x,$$

$$\lambda_i = \frac{1}{a_1} \sum_{i}^{i+1} \frac{(l\,m - m^2 - {}^1/_{12} \triangle x^2) : \eta\, l_i}{l} \cdot \triangle x,$$

$$\mathfrak{E}_i = \sum_{i-1}^{i+1} \frac{l - x}{a_1} \cdot \frac{\triangle x}{\eta\, l} \cdot \frac{\mathfrak{P}}{h}.$$

In α und λ werden die $\triangle x$ so lang, als jede Stufe ist, angenommen; die ${}^1/_{12} \triangle x^2$ dürfen daher bei der Construction derselben nicht vernachlässigt werden. Bei der Construction der $\mathfrak{E}$ dagegen darf $\triangle x$ nicht so gross angenommen werden, weil $\mathfrak{P}$ zu sehr auf die Länge desselben variirt. Nimmt man aber $\triangle x$ so klein an, dass innerhalb desselben der Werth von $\mathfrak{P}$ constant angenommen werden darf, so wird es gestattet sein, auf die Differentialgleichung der Fundamentalgleichung (Nr. 98 S. 296) zurückzukehren, und

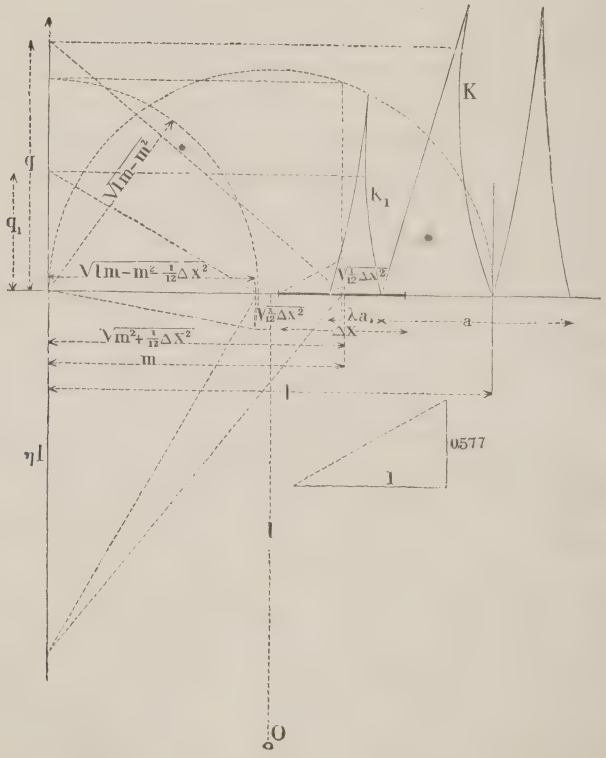
$$a_1\, h\, \mathfrak{E}_i = \sum_{i-1}^{i+1} \int \frac{\mathfrak{P}\,(l - x)\,dx}{\eta\, l}$$

statt des obigen Ausdrucks zu setzen.

Um die Construction dieser Ausdrücke deutlich erklären zu können, haben wir sie in Fig. 144 und 145 heraus gezeichnet. Taf. 14 ist dann nichts, als eine oftmalige Wiederholung derselben.

Fig. 144 enthält die Construction des α und λ für die Strecke $\triangle x$, deren Mitte von dem vorausgehenden Pfeiler um die Länge m absteht. $\sqrt{{}^1/_{12} \triangle x^2} = 0{,}577 \cdot \frac{\triangle x}{2}$ erhält man auf der Mitte der Strecke $\triangle x$, wenn man durch deren Endpunkt eine Parallele zur Hypothenuse des unten verzeichneten Dreiecks zieht, dessen Katheten 1 und 0,577 sind. Wird der Endpunkt dieses $\sqrt{{}^1/_{12} \triangle x^2}$

Fig. 144.



vom Endpunkt von m aus auf die Horizontale heruntergeschlagen, so erhält man in dieser $\sqrt{m^2 + {}^1/_{12} \triangle x^2}$. Eine Senkrechte zu der Hypothenuse des Dreiecks, das mit dieser Länge $\sqrt{m^2 + {}^1/_{12} \triangle x^2}$ und $\eta\, l$ construirt wird, schneidet in der Verlängerung der letzten die Länge:

$$q = (m^2 + {}^1/_{12} \triangle x^2) : \eta\, l.$$

Um $\frac{q \cdot \triangle x}{l}$ zu erhalten, verbinden wir nach Nr. 4 S. 22 alle Horizontallinien, welche durch die Endpunkte von q gezogen werden, durch ein Polygon K, dessen Seiten mit den Strahlen des Büschels O parallel laufen, der die entsprechenden $\triangle x$ aus einem Punkte projicirt, dessen Entfernung von der Horizontalen der $\triangle x = l$ ist. Die äussersten Seiten dieses Polygons schneiden auf der Horizontalen der $\triangle x$ den Theil der Länge a ab, welcher von der Spannweite l herrührt. Die gleiche Construction in der nächsten Oeffnung ausgeführt, giebt durch Aneinanderreihen das a des treffenden Pfeilers.

Die Construction der λa_1 unterscheidet sich von der der a nur dadurch, dass statt m die Länge $\sqrt{lm - m^2}$ als Ordinate des Halbkreises über der Spannweite l auf der Horizontalen aufgetragen und mit ihr die Länge $\sqrt{lm - m^2 - {}^1/_{12} \triangle x^2}$ als Länge der Tangente construirt wird, die an den von ihrem Endpunkte als Mittelpunkt aus mit dem Radius $\sqrt{{}^1/_{12} \triangle x^2}$ beschriebenen Kreis gezogen wird. Der Perpendikel auf die Hypothenuse des Dreiecks $\sqrt{lm - m^2 - {}^1/_{12} \triangle x^2}$ und ηl schneidet in der Verlängerung der letztern Linie q_1 ab, und $\lambda a_1 = \Sigma \frac{q_1}{l} \cdot \triangle x$ construirt sich gerade so mittelst des Polygons K_1, als wie a mittelst K. Beide Curven K und K_1 haben Rückkehrpunkte, weil die q der höchsten Indexe wieder kleiner als die der mittleren sind.

Auf Taf. 14_1 sind die Längen der $\triangle x$ durch die Längen der Stufen, welchen die $\mathfrak{E}$ oder ηl proportional sind, angedeutet und numerirt. Dieselben Nummern tragen auch die Enden der ηl auf den Verticallinien durch die Pfeiler. Diese sind, wie Eingangs bemerkt wurde, den $\mathfrak{E}$ proportional und es ist, wenn die y und $\tau + \tau'$ gleich 0 sind, ganz einerlei, in welchem Maassstabe sie aufgetragen werden. In unserm Beispiel mussten wir sie ziemlich lang annehmen, damit die q und q_1 nicht zu lang wurden. Bei der zweiten und dritten Oeffnung wurden sie länger als das Blatt, und es wurde daher der untere Theil der ηl rechtwinkelig gebrochen und an den untern Rand des Blattes gezeichnet.

Die gleiche zur Stufe gehörige Nummer tragen dann auch (Taf. 14_1) die Ecken der Polygone K und K_1. Um die Endpunkte der q und q_1 auf den Pfeilerverticalen von einander unterscheiden

zu können, wurden die Horizontallinien, welche durch die letzteren gehen, ganz, dagegen die, welche durch die der ersteren gehen, nur auf eine kurze Strecke gestricht. Die Pole, die zur Construction der Polygone mittelst der Linien der $\triangle x$ dienten, und die um eine der Spannweite gleiche Länge unter ihr liegen, sind mit O'_1 O''_1 O'''_1 bezeichnet.

Die Basen der Polygone K und K_1 auf dem Maassstabe $a_1 = 1$ abgegriffen, geben die Längen α und λ. Statt einen besondern Maassstab anzufertigen, wurden sie (Taf. 15) auf dem einen Schenkel eines Winkels, in der untern Ecke rechts, aufgetragen und so auf den andern projicirt, dass $a_1 = 0{,}5$ Ctm. wurde; mit dem prismatischen Metermaassstabe konnte man dann direct lesen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_4 = 1, \\ \alpha_2 &= \alpha_3 = 1{,}090, \\ \lambda_1 &= \lambda_4 = 0{,}243, \\ \lambda_1 &= \lambda_3 = 0{,}286, \\ \lambda_2 &= 0{,}287. \end{aligned}$$

Mit diesen Werthen ganz wie in Nr. 103 S. 329 nach demselben Schema rechnend, erhält man die Momentengleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= -1{,}088\ \mathfrak{E}_1 + 0{,}309\ \mathfrak{E}_2 - 0{,}088\ \mathfrak{E}_3 + 0{,}025\ \mathfrak{E}_4, \\ \mathfrak{P}_2 &= +0{,}309\ \mathfrak{E}_1 - 1{,}080\ \mathfrak{E}_2 + 0{,}307\ \mathfrak{E}_3 - 0{,}088\ \mathfrak{E}_4, \\ \mathfrak{P}_3 &= -0{,}088\ \mathfrak{E}_1 + 0{,}307\ \mathfrak{E}_2 - 1{,}080\ \mathfrak{E}_3 + 0{,}309\ \mathfrak{E}_4, \\ \mathfrak{P}_4 &= +0{,}025\ \mathfrak{E}_1 - 0{,}088\ \mathfrak{E}_2 + 0{,}309\ \mathfrak{E}_3 - 1{,}088\ \mathfrak{E}_4. \end{aligned}$$

Es sind jetzt nur mehr die $\mathfrak{E}$ mittelst des Ausdrucks:

$$\mathfrak{E}_i = \sum_{i-1}^{i+x} \frac{l-x}{a_1} \cdot \frac{\triangle x}{\eta l} \cdot \frac{\mathfrak{P}}{h}$$

zu construiren. In ihm ist $\frac{\mathfrak{P}}{h}$ die mittlere Höhe der Lamelle $\triangle x$ in den Seilpolygonen der Belastungen des Balkens unter der Voraussetzung, dass dieser nicht continuirlich sei. Ist daher die Curve (Fig. 145) das Seilpolygon für irgend eine Belastungsart mit einer Schlusslinie, die für die Pfeiler $\mathfrak{P} = 0$ macht, so ist die mittlere Höhe der Lamelle $\triangle x$ gleich $\frac{\mathfrak{P}}{h}$. Zieht man dann durch das Ende von $\frac{\mathfrak{P}}{h}$ eine Parallele zur Hypothenuse des Dreiecks, dessen Katheten $\frac{1}{8}\eta l$ und $\frac{1}{2}\triangle x$ sind (siehe die Figur), so

schneidet diese auf der Horizontalen durch das obere Ende von $\frac{\mathfrak{P}}{h}$ die Länge $\frac{4\triangle x}{\eta l} \cdot \frac{\mathfrak{P}}{h}$ ab.

Es wurde das vierfache $\frac{4\triangle x}{\eta l} \cdot \frac{\mathfrak{P}}{h}$ statt des einfachen construirt, weil dieses gar zu klein geworden wäre. Alle diese Abschnitte wurden nun auf der Verticallinie $\Sigma' \frac{4\triangle x}{\eta l} \cdot \frac{\mathfrak{P}}{h}$ aneinander gereiht und (Fig. 146) ein Polygon construirt, dessen Seiten mit den

Fig. 145.

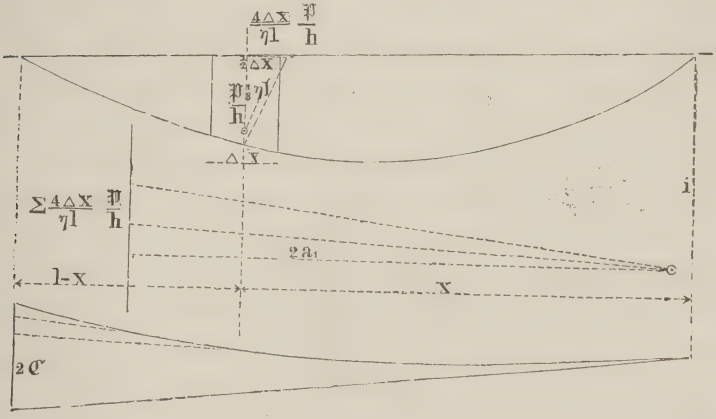


Fig. 146.

Strahlen eines Büschels parallel laufen, der die Verticale aus einem um $2a_1$ entfernten Punkte projicirt; dann schneiden laut Nr. 4 S. 22 die äussersten Polygonseiten auf den i gegenüberliegenden Pfeilerverticalen, den von der Oeffnung herrührenden Theil von

$$2\mathfrak{C}_i = \sum_{i}^{i+1}{}' \frac{l-x}{2a} \cdot \frac{4\triangle x}{\eta l} \cdot \frac{\mathfrak{P}}{h}$$

ab.

Taf. 14_2 sind die der Fig. 145 entsprechenden Polygone. Die Kräftepolygone, die zu ihrer Construction dienten, sind, wie früher, mit $P'\ P''\ P'''$, und ihre Pole mit $O'\ O''\ O'''$ bezeichnet. Die Lamelleneintheilung zur Bestimmung der $\frac{\mathfrak{P}}{h}$ wurde mehr mit Berücksichtigung der Stufenlängen, als der Belastungen durch die einzelnen Locomotivräder, vorgenommen.

Für die ungleichförmige Belastung zur Bestimmung des Maximums der scheerenden Kräfte wurde das vorhandene Polygon der Maximalbelastung benutzt, bis zur Belastung durch das Eigengewicht allein, und dann die dem letztern entsprechende Parabel eingezeichnet. Da man im vorliegenden Falle die Ordinaten $\frac{\mathfrak{P}}{h}$ für alle Lamellen braucht, so konnte es nicht genügen, dieses Eigengewicht mit einem einzigen Male in seinem Schwerpunkte beizufügen, sondern es musste die dem vertheilten Eigengewichte entsprechende Parabel gezeichnet werden. Diese Parabeln sind mit römischen Ziffern bezeichnet; ihr Eigengewicht ist auf den P' P'' und P''' dem Totalgewicht der vorausgehenden oder folgenden Strecken beigefügt, und der Endpunkt dieses Eigengewichts mit der gleichen römischen Ziffer bezeichnet worden. Die lamellenweise Eintheilung dieses Eigengewichts war nicht nothwendig, weil es voraus bekannt ist, dass die Curve des gleichförmig vertheilten Eigengewichts eine Parabel sei, zu deren Construction ihre bekannten Endtangenten genügen.

Die Verticallinien der $\Sigma' \frac{4 \triangle x}{\eta l} \cdot \frac{\mathfrak{P}}{h}$ sind auch mit der ihrer Belastungsart entsprechenden römischen Ziffer bezeichnet, wobei zu bemerken, dass 0 die unbelastete, I die totalbelastete Oeffnung bezeichnet; und ebenso auch die ihnen zugeordneten Pole, deren Distanz von der entsprechenden Verticalen $= 2\,a_1$ ist. Alle diese zu einer Oeffnung gehörigen Pole sind zusammengeklammert.

Mittelst dieses Strahlenbüschels wurden endlich die Polygone der 2 $\mathfrak{S}$ (Taf. 14_3) construirt. Sie und die auf der Pfeilerverticalen angegebenen Enden ihrer äussersten Seite tragen ebenfalls die entsprechende römische Ziffer, so dass die Enden eines jeden der construirten 2 $\mathfrak{S}$ mit der gleichen Ziffer bezeichnet sind.

Nach der Construction der $\mathfrak{S}$ sind alle übrigen identisch mit den in der vorigen Nummer schon erläuterten Constructionen von Taf. 13. Die ganze Taf. 15 ist daher nur eine Wiederholung schon bekannter Constructionen; sie sind hier, da der Raum es gestattete, der Deutlichkeit wegen nur etwas weiter auseinander gezogen.

Die Zusammensetzung und Halbirung der $\mathfrak{S}$ ist genau wie auf Taf. 13 ausgeführt und bezeichnet. Die Polygone zur Construction der $\mathfrak{P}$ sind über das ganze Blatt zerstreut und tragen die Zeichen des Schemas Fig. 143 S. 341.

Zur Construction der Momente und der scheerenden Kräfte mittelst der $\mathfrak{P}$ wurden neue Momentencurven (Taf. 15_2) mittelst der ebenfalls neu aufgetragenen P' P'' P''' gezeichnet.

Auf der letztern wurden die scheerenden Kräfte construirt, und endlich diese sowie auch die Momente in Taf. 15_1 zusammengestellt.

Des Vergleiches wegen wurden auch daselbst die Resultate von Taf. $13_{1\,2\,3}$ punktirt eingetragen.

105. Vergleich der Resultate und der Constructionen.

Auf Taf. 15_1 wurden des Vergleiches wegen die auf Taf. 13 erhaltenen Momente und scheerenden Kräfte mittelst punktirten Linien eingetragen.

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass durch Anpassen des Balkenquerschnittes an die Momentencurve, die unter der Voraussetzung construirt wurde, dass der Balken einen constanten Querschnitt habe: das Moment über den Pfeilern entschieden vergrössert, das in der Mitte der Oeffnungen ebenso entschieden verkleinert worden sei; und es erreichen die hiervon herrührenden Aenderungen im vorliegenden Beispiel $^1/_{10}$ der Totalkräfte, welche an den Streckbäumen wirken.

Es ist nicht schwer, es zur Anschauung zu bringen, dass dies immer der Fall sein muss. Bei dem continuirlichen Balken constanten Querschnitts wird das Moment über den Pfeilern immer grösser, als in der Mitte der Oeffnungen sein, denn bei den Pfeilern wirken concentrirte Reactionen aufwärts, während die gleich grossen, abwärts wirkenden Belastungen über die Spannweiten vertheilt sind; es wird daher bei dem Anpassen des Querschnittes an die Momentencurve der Pfeilerquerschnitt mehr als der Querschnitt in der Mitte der Oeffnungen im Verhältniss zu dem constanten Querschnitt vergrössert, und in Folge dessen der Krümmungshalbmesser der Balkenaxe, als elastische Linie betrachtet, mehr über den Pfeilern, als in der Mitte der Oeffnungen vergrössert. Die wirklichen Inflectionspunkte entfernen sich also von den Pfeilern und nähern sich den Mitten der Oeffnungen.

Im Sinne von Fig. 124 S. 277 wird auch die Länge der Balkenstücke über den Pfeilern vergrössert, dagegen die in den Mitten

der Oeffnungen verkleinert, also auch das Moment über den Pfeilern vergrössert, in der Mitte der Oeffnungen verkleinert.

Es ist bekannt, dass viele französische Ingenieure den Streckbäumen ihrer Brücken einen constanten Querschnitt geben, weil sie nicht wagen wollen, einen andern Balken herzustellen, als der Balken constanten Querschnittes ist, der ihren Rechnungen zu Grunde gelegt worden war.

Die deutschen Ingenieure, so namentlich Laissle und Schübler, haben ohne Zaudern den Querschnitt ihres Balkens der Momentencurve angepasst.

Aus dem Vergleich von Taf. 13 und 15 geht hervor, dass letztere das Material mit circa einem $^1/_{10}$ mehr über den Pfeilern, weniger in der Mitte der Oeffnungen in Anspruch nehmen, als sie vorausgesetzt hatten. Die im Vorstehenden entwickelten Methoden setzen uns in den Stand, ohne allzu grosse Mühe genau zu ermitteln, wie gross die Kräfte sind, die in den Streckbäumen wirken; allein wenn man sich diese Mühe nicht geben will, sondern approximativ mit Benutzung der von Laissle und Schübler berechneten Tafeln, oder der Methoden von Taf. 12 vorgehend, sich mit einmaliger Bestimmung der Kräfte begnügen will: so hat man bei Berechnung der Querschnittsdimensionen über den Pfeilern einen um $^1/_{10}$ grössern Tragmodul als in der Mitte der Oeffnungen zur Anwendung zu bringen.

In Nr. 101 S. 312 waren wir zum Resultat gelangt, dass die äussersten Oeffnungen des Balkens nur circa 0,8 der Spannweite der übrigen erhalten müssen, wenn die Maximalmomente in der Mitte der Oeffnungen ungefähr gleich gross werden sollen. Dem entsprechend wurden die Verhältnisse der Spannweiten auf Taf. 12 und 13 auch wirklich so angenommen. Wir erhielten dann auf Taf. 12 ziemlich gleich grosse Momente, auf Taf. 13 und 15 dagegen grössere bei den grösseren Oeffnungen. Es rührt dies daher, dass bei Bestimmung dieses Coefficienten vorausgesetzt wurde, es sei das laufende Brückengewicht in allen Oeffnungen das gleiche; eine Voraussetzung, die auf Taf. 12, nicht aber auf Taf. 13 und 15 erfüllt wurde, weil für die Balken derselben grössere Gewichte für die Mittelöffnungen angenommen wurden. Im Allgemeinen wird man sagen können, dass die äusserste Oeffnung immer etwas grösser als 0,8 der Mittelöffnungen wird sein müssen; allein genauer wird dieses Verhältniss nur durch Probiren bestimmt werden

können, und dies gehört in die Brückenbaukunde, nicht in die graphische Statik, die sich nur mit dem Auseinandersetzen der Methoden zu befassen hat.

Um das Moment über den Pfeilern durch Aenderung in der Höhenlage der Stützpunkte oder durch ungenügendes Heben vor dem Zusammennieten der einzelnen Balkenstücke über den Widerlagern zu vermeiden, müsste so gerechnet werden, wie es Nr. 97 S. 294 angedeutet worden ist; wir glauben jedoch die Ausführung solcher Rechnungen um so mehr übergehen zu dürfen, als die Verminderung des Momentes über den Pfeilern eigentlich keinen rechten Zweck hat: denn über diesen kann das Anpassen durch Vergrösserung der Querschnittsfläche um so anstandsloser vorgenommen werden, als die dazu nothwendigen Materialmassen, wegen der unmittelbaren Unterstützung durch den Pfeiler, die Momente der äusseren Kräfte am wenigsten vergrössern. Uebrigens sind auch alle zu diesen Berechnungen nothwendigen Elemente auf Taf. 12 bis 15 construirt worden, und es hat durchaus keine Schwierigkeit, diese Constructionen auch bei den Rechnungen zu verwerthen.

Ebenso verhält es sich auch mit der Berechnung der Einbiegung des Balkens unter einer auf ihm ruhenden zufälligen Belastung.

Bezüglich der Form der elastischen Linie wollen wir hier nur noch bemerken, dass sie gegen Parabeln convergiren muss, wenn die Querschnitte der Streckbäume dem Moment der an ihr wirkenden Kräfte angepasst werden, denn in diesem Falle würden die zweiten Differentialcoefficienten der Curvenordinaten constant sein. Erinnert man sich jedoch daran, dass bei Aufstellung der allgemeinen Momentengleichung der zweite Differentialcoefficient statt des reciproken Krümmungshalbmessers gesetzt wurde, und dass demnach dieser constant ist, wenn der Querschnitt dem Moment der ausser ihm wirkenden Kräfte angepasst wird: so folgt, dass streng genommen die elastische Linie in diesem Falle gegen eine aus Kreisbogen gleicher Radien zusammengesetzte Linie convergire.

Wegen der vollkommenen Symmetrie der Curven liegen in diesem Falle die Inflectionspunkte in dem $^1/_4$ der Spannweite, weil im Sinne der Fig. 124 alle Balkenstücke gleich lang sind. Von diesem Standpunkte aus betrachtet müsste man einer Aussenöffnung 0,75 (statt 0,8) der Mittelöffnungen geben. Allein auch dieser

Fall kommt nicht rein vor, weil er nur eine einzige, ein für alle Mal der Rechnung zu Grunde gelegte Belastung voraussetzt; daraus aber, dass alle diese auf verschiedene Weise bestimmten Verhältnisse in die Nähe von 0,8 fallen, kann man doch schliessen, dass diese Zahl das Verhältniss ungefähr ausdrücke. In jedem speciellen Fall aber kann es, wie eben schon bemerkt wurde, nur durch Probiren bestimmt werden.

Was schliesslich die verschiedenen Methoden und Annahmen betrifft, die in den vorstehenden Nummern zur Anwendung kamen, so glauben wir nicht, dass es praktisch sei, ungleichförmige Belastungen vorauszusetzen. Die Momentencurve weicht so ausserordentlich wenig von einer Parabel ab, dass man unter gewöhnlichen Verhältnissen sie füglich als solche betrachten kann; dann aber reducirt sich die erste Bestimmung der am Balken wirkenden Kräfte auf die einfachen Constructionen von Nr. 102 auf Taf. 12, und nur dann, wenn untersucht werden soll, ob durch Anpassen des Querschnittes an die Momentencurve die an ersterem wirkenden Kräfte nicht bedeutend modificirt wurden, müssen Constructionen wie auf Taf. 14 und 15 ausgeführt werden, die sich aber auch bedeutend vereinfachen, wenn alle Belastungscurven Parabeln sind. Man braucht zur Construction derselben nicht auf das Kräftepolygon zurückzugreifen, und das letztere kann auf das einfachere gerade Gebilde beschränkt werden, das man erhält, wenn man die Totallasten für drei oder vier einseitige Belastungsarten zur Bestimmung der scheerenden Kräfte an so vielen verschiedenen Stellen aufträgt. Wir haben jedoch von diesen Vereinfachungen keinen Gebrauch gemacht, weil wir zeigen wollten, was die graphische Statik vermag, wie allgemein die Aufgaben gestellt werden können, und weil nach ihrer Lösung die Lösung einfacherer durchaus keine Schwierigkeiten mehr darbieten kann.

Nach Bestimmung der an einem Schnitt eines continuirlichen Balkens wirkenden endlichen und unendlich fernen Kräfte, können auch nach Nr. 82 S. 236 die Richtungen construirt werden, nach welchen das Material nur absolut oder rückwirkend, nicht scheerend in Anspruch genommen ist, sobald der Querschnitt des Balkens gegeben ist. Statt der Form Fig. 107 S. 236 für den nicht continuirlichen Balken erhält man dann Formen ähnlich wie Fig. 147. Diese Form müsste der Pauli'sche Träger annehmen, wenn er continuirlich gemacht werden sollte, und sie müsste über-

haupt nachgeahmt werden, wenn man die möglichst grössten Spannweiten zu überbrücken trachten wollte.

Auf der letzten Londoner Industrieausstellung fanden wir eine Fig. 147 ähnliche Idee in dem Modell einer Brücke von grosser

Fig. 147.

Spannweite über den Lorenzstrom in Canada ausgeprägt; der mittlere Theil der Oeffnung war aus einem colossalen Bogenhängewerk gebildet, dessen Enden mittelst Ketten an Pfeilern aufgehangen waren, die dreimal weiter auseinander standen, als das Hängewerk lang war.

Wenn man hier noch die Fahrbahn unter den Ketten als untere Streckbäume gelten lässt und davon abstrahirt, dass die neutrale Axe nicht in der Mitte der Höhe liegt, wenn man also nur die Constructionshöhe in's Auge fasst, so stimmt dies ganz mit Fig. 147 überein.

FÜNFTER ABSCHNITT.

DAS FACHWERK.

Erstes Kapitel.

Die Theorie des Fachwerks.

106. Die Definition des Fachwerks.

Bisher haben wir die innern Kräfte bestimmt, welche an den einzelnen Querschnittselementen eines Balkens wirken, ohne bezüglich der Richtung der äussern Kräfte eine andere Bedingung zu stellen als die, dass durch diese Kräfte keine Torsion erzeugt werde. Bei dem gewöhnlichen Balken hatten wir die Wirkungen von Kräften untersucht, die senkrecht auf seiner Längenrichtung stehen, und bei dem Krahn bilden sie beliebige Winkel mit der Axe an den verschiedenen Stellen desselben. In der Praxis jedoch muss man es möglichst vermeiden, Balken solchen Kräften auszusetzen, deren Richtung bedeutend von der der Axe des Balkens abweicht: denn nur dann, wenn diese Richtungen vollkommen oder doch nahezu zusammenfallen, kann den äusseren Kräften mit einem Minimum von Material Widerstand geleistet werden.

Das Zusammenfallen der Balkenrichtungen mit den Richtungen der an ihnen wirkenden Kräfte kann auf verschiedene Weise bewirkt werden.

Hat man den ausserhalb eines Querschnitts wirkenden Kräften nur ein einziges Constructionselement entgegenzusetzen, so muss die Längenrichtung desselben nothwendiger Weise mit der der Mittelkraft aller ausserhalb wirkenden Kräfte zusammenfallen, es muss also für die fortschreitenden Querschnitte die Richtung des

Elemente sder Richtung der jener Mittelkräfte angepasst werden; es entsteht eine Curve, ein Bogen. Die Dimensionen des gesprengten Bogens und des Gewölbes müssen so stark (hoch) gegriffen werden, dass auch bei etwas sich verändernder zufälliger Belastung, die Mittelkraft der ausserhalb eines Querschnitts wirkenden Kräfte, diesen doch immer innerhalb des Centralkerns schneide. Der Hängebogen der Ketten- und Drahtbrücke dagegen ist flexibel und kann sich bei Aenderung der Belastungsart der Mittelrichtung den an ihm wirkenden Kräften anschmiegen; sein Querschnitt dürfte daher, wenn wir die Aufgabe vom mathematischen Standpunkt aus auffassen, ein Punkt sein.

Hat man den ausserhalb eines Querschnitts wirkenden Kräften zwei Constructionselemente entgegen zu setzen, so müssen die Richtungen derselben sich auf der Mittelkraft schneiden, der sie entgegen zu wirken haben, im Uebrigen aber kann ihre Richtung eine beliebige sein. Das Pechmann'sche Bogenhängewerk und der Laves'sche Balken widerstehen in dieser Weise. Auch die tragenden Theile dieser Constructionen müssen wegen der wechselnden zufälligen Belastung eine gewisse Dicke erhalten.

Hat man endlich den ausserhalb eines Querschnitts wirkenden Kräften drei Constructionselemente entgegen zu setzen, so können die Richtungen derselben ganz beliebige sein, insofern sie sich nicht in einem Punkte schneiden und die Querschnittsdimensionen der Constructionselemente werden nur dadurch bestimmt, dass sie den sie nur spannenden oder pressenden Kräften zu widerstehen haben. Bei unendlich grossen Festigkeitscoefficienten könnten ihre Dimensionen unendlich klein sein, sie könnten sich auf eine Linie beschränken. Wegen der sich ändernden Belastungsart braucht die Form der Construction nicht geändert zu werden, weil jede Kraft nach der Richtung von drei bestimmten Linien zerlegt werden kann. Constructionen, die in jedem Schnitt, den man durch sie führen kann, drei Elemente oder ein Element und einen Knotenpunkt, der nach allen Richtungen hin widerstehen kann, darbieten, um die ausserhalb wirkenden Kräfte aufzuheben, heissen Fachwerke.

Bei dem Bogen und dem Pechmann'schen Bogenhängwerk, dem starke Dimensionen gegeben werden müssen, damit die ausserhalb eines Schnittes wirkenden Kräfte sicher in sie hineinfallen, sind diese Kräfte gar häufig unbestimmt, weil man den Angriffspunkt

derselben in den äussersten Schnitten (bei den Widerlagern) nicht kennt, und man muss zu verschiedenen Voraussetzungen greifen, die bald auf die Theorie der Elasticität, bald auf reine Betrachtungen der Form sich gründen, um diese Kräfte zu bestimmen; es entstehen hieraus verschiedene Theorien, z. B. Gewölbetheorien, die mehr oder weniger mit der Wirklichkeit übereinstimmen. Ganz dasselbe findet statt, wenn ein Schnitt mehr als drei Constructionselemente darbietet, die gleichzeitig widerstehen sollen. Man weiss dann nicht, wie man die Kräfte auf dieselben vertheilen soll und ist ebenfalls genöthigt, allerlei vorauszusetzen. Bei Gitterbrücken z. B. nimmt man an, dass sich die ausserhalb des Schnittes wirkenden endlichen Kräfte gleichförmig auf die verschiedenen geschnittenen Stäbe vertheilen: während man auch geneigt sein könnte, anzunehmen, dass die Stäbe in der Nähe der neutralen Axe weniger stark als an weit von derselben entfernten Stellen in Anspruch genommen seien. Alle diese Zweideutigkeiten können nicht mehr stattfinden, sobald die äussern Kräfte durch drei Elemente aufgehoben werden sollen, die nach mathematisch genau gegebenen Richtungen zu widerstehen haben. Ebenso genau als diese Richtungen gegeben sind, ebenso genau können auch die in ihnen wirkenden Kräfte bestimmt werden. Auf diese Bestimmung kann sich der Constructeur vollkommen verlassen, bei gegebenen Belastungen ist es unmöglich, die Kräfte auf eine andere Weise zu vertheilen, und man braucht nicht zu fürchten, dass bei richtiger Ausführung unvorhergesehene Torsionen oder Biegungen entstehen, man ist sicher, dass das Element nur mit den vorausbestimmten Kräften gedehnt oder gepresst wird, und man kann bei Festsetzung der Dimensionen die grössten für das Material zulässigen Coefficienten anwenden.

In jeder Beziehung erscheint daher das Fachwerk als die vollkommenste Construction; und in neuerer Zeit ist es gar fein ausgebildet worden und hat an Verbreitung ausserordentlich gewonnen. Da ausserdem noch die Bestimmung der an ihm wirkenden Kräfte einfacher als bei jeder der andern ist, weil keine theoretischen Voraussetzungen zu berücksichtigen sind, so wollen wir hier damit beginnen, die am Fachwerk wirkenden Kräfte zu bestimmen, um dann zum Bogen und Bogenhängewerk überzugehen. Zuvor schicken wir jedoch die Erklärung einiger technischen Ausdrücke voraus, die wir stets brauchen werden.

Die Haupttheile aller Fachwerke, die bis jetzt zur Ausführung kamen, sind zwei Balken, Bäume, Bogen, die über die Oeffnung in ihrer ganzen Weite sich erstrecken und die wir die Streckbäume oder auch die Bogen nennen wollen, je nachdem ihre Form der Geraden oder dem Bogen sich mehr nähert. Ist nur eine Oeffnung vorhanden, so wird der obere dieser Bäume immer gepresst, der untere immer gespannt sein; soll das besonders hervorgehoben werden, so geschieht es durch Vorsetzen der Wörtchen: Druck-, Spann-, Streck-; wir werden also für den obern Streckbaum bisweilen sagen: Druckbaum, Druckbogen, und für den untern ausser Streckbaum noch Spannbogen.

Jeder Schnitt, der durch die Construction geführt wird, schneidet die beiden Streckbäume; es muss also nur mehr ein Element in jedem Schnitt erscheinen. Dieses dritte Constructionselement gehört einer Reihe Balken an, welche von einem Widerlager zum andern und von Streckbaum zu Streckbaum in der Art durchlaufen, dass immer zwei dieser Balken gleichzeitig mit einem Streckbaum zusammentreffen; alle diese Balken bilden daher miteinander eine gebrochene Linie, die sich von einem Widerlager zum andern erstreckt, deren Ecken auf den Streckbäumen liegen, und die daher auch durch jeden Schnitt geschnitten wird. Diese Balken sind abwechselnd rückwirkend und absolut in Anspruch genommen und heissen im Allgemeinen Streben im ersten, und Diagonalbänder im zweiten Fall. Gewöhnlich wird abwechselnd eines dieser Elemente vertical gestellt und heisst dann Pfosten im ersten Fall, Hängeisen oder Hängsäule im zweiten, je nachdem es aus Eisen oder Holz gefertigt ist.

Alle jetzt aufgezählten Constructionstheile heissen miteinander die Füllung, weil sie den Raum zwischen den Streckbäumen ausfüllen. Es kann vorkommen, dass einzelne dieser Füllungsglieder bei wechselnder Belastung bald gepresst, bald gedehnt werden. Sie müssen dann entweder so construirt werden, dass sie in jedem Sinne widerstehen können, oder es müssen einige derselben verdoppelt werden. Geschieht die Verdoppelung in der Weise, dass in dem Trapez, dessen eine Diagonale durch das Füllungsglied gebildet wird, ein Glied an die Stelle der andern Diagonale tritt, so heisst dieses Gegenstrebe oder Gegenband.

Die Punkte, in denen je zwei Füllungsglieder mit den Streckbäumen zusammentreffen, heissen die Knotenpunkte. Wir wer-

den in Zukunft immer voraussetzen, dass alle Kräfte und Lasten in den Knotenpunkten aufgegeben werden, wie es auch bei richtig construirten Brücken der Fall sein soll; es versteht sich von selbst, dass wir uns dann auch die Hälfte des Gewichtes aller Constructionstheile zwischen einem und den nächsten vier Knotenpunkten in jenem vereinigt denken können.

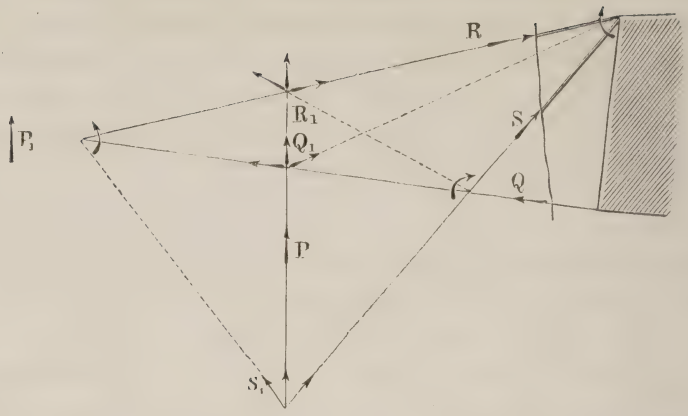
107. Bestimmung der am Fachwerk wirkenden innern Kräfte.

Wir bestimmen nach den Regeln des zweiten Abschnitts die Mittelkraft der ausserhalb des durch die Construction geführten Schnittes Fig. 148 S. 364 wirkenden äussern Kräfte P. Diese muss, wenn Gleichgewicht bestehen soll, nothwendiger Weise auch die Mittelkraft der im Innern der drei geschnittenen Constructionstheile wirkenden Spannungen und Pressungen sein, man hat sie daher einfach nach jenen drei Richtungen zu zerlegen, um jede derselben zu erhalten; zu dem Ende:

Zerlege man die Mittelkraft P in dem Schnitt mit einem der drei Constructionstheile nach der Richtung dieses und nach der einer Linie, die den Schnitt mit dem Schnitt der beiden andern Constructionstheile verbindet. Endlich zerlege man diese letzte Kraft nach der Richtung dieser beiden letzten Constructionselemente, um die Kräfte zu erhalten, die in jedem derselben wirken.

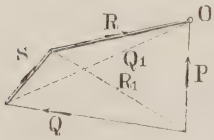
Diese Regel gilt allgemein für die Zerlegung einer Kraft in drei Seitenkräfte, welche in drei in derselben Ebene gegebenen Linien wirken sollen. In Fig. 148 sind die Zerlegungen angedeutet, es bezeichnet dort und in den folgenden Figuren Q die Spannung im Streckbaum, R die im Druckbaum, und S die Kraft die in der Strebe wirkt. Dann wurde die Kraft, die im Schnitt von Q nach dem Schnittpunkt RS wirkt, mit Q_1 bezeichnet. Wird nun Fig. 148 als Seilpolygon betrachtet, so reducirt es sich auf die punktirte Linie Q_1, an deren einem Ende die Kräfte P und Q und an deren anderem R und S wirken. Fig. 149 ist das entsprechende Kräftepolygon. Vom Pol O ausgehend, wurde auf einer Verticalen das gegebene P und am Ende von P die Richtung von Q aufgetra-

Fig. 148.



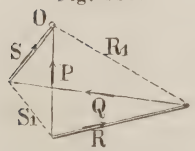
gen, die Länge von Q wird durch die von O aus in der Richtung der Seilpolygonseite Q_1 gezogene Diagonale bestimmt. Die beiden letzten Seiten des Kräftepolygons, die Kräfte S und R, laufen mit den entsprechenden Constructionstheilen parallel und sind daher ebenfalls vollständig bestimmt.

Fig. 149.



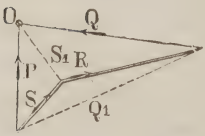
Man gelangt natürlich genau zu demselben Resultat, wenn man die Zerlegung von P im Schnittpunkt PR Fig. 148 vornimmt und im Kräftepolygon Fig. 149 durch den Pol O eine Parallele zu R und durch den Endpunkt von P eine zu R_1 zieht. Es folgt hieraus, dass die Diagonalen R_1 in Fig. 148 und 149 miteinander parallel laufen. Geometrisch geht es auch daraus hervor, dass in den Vierecken, deren Eckpunkte die Enden der beiden Diagonalen Q_1 und R_1 sind, in beiden Figuren je zwei gegenüberliegende Seiten miteinander parallel laufen.

Fig. 150.



Durch Aenderung in der Ordnung der Zusammensetzung der Kräfte und dadurch, dass man die erste Zerlegung im Schnittpunkt SP Fig. 148 vornimmt, erhält man auch die Anordnungen der Fig. 150 und 151 für das Kräftepolygon. Man hat unter diesen drei Formen Fig. 149, 150 und 151 die Wahl bei Entwurf eines Kräfteplans. Wir wählen gewöhnlich Fig. 149, wenn alle Kräfte, also auch die

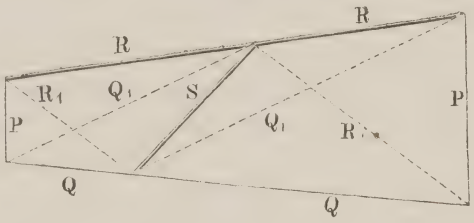
Fig. 151.



Spannungen und Pressungen Q und R in den Streckbäumen, zu bestimmen sind. Wenn jedoch diese schon durch eine andere Construction bekannt sind und nur mehr die in der Strebe wirkende Kraft S zu bestimmen ist, dann wählen wir die Anordnung von Fig. 150 und 151. In der Regel können wir in solchen Fällen R und Q weglassen und das Kräftepolygon auf das Dreieck $P\ S\ S_1$ beschränken.

Bei Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte ist das Kräftepolygon dem Seilpolygon, d. h. der Figur, welche zwei gegebene Constructionstheile mit einer Kraft bilden, die sie aufheben sollen, immer ähnlich, denn Dreiecke mit parallelen Seiten sind ähnlich. Bei Vierecken ist dies nicht mehr unbedingt der Fall, wie der Vergleich in Fig. 148 mit den folgenden Figuren zeigt; in Fig. 148 ist der Winkel $R\,S$ z. B. spitz, in Fig. 149 ist er stumpf u. s. f. Am besten kann die Verschiedenheit der beiden Figuren anschaulich gemacht werden, wenn zwischen zwei festzuhaltenden gegenüberliegenden Seiten Q und R Fig. 152, an eine dritte Seite S anlehnend, zwei dem Seilpolygon Fig. 148 (links) und dem Kräftepolygon Fig. 149 (rechts) ähnliche Figuren verzeichnet werden. Auf gleiche Weise lässt sich auch der Zusammenhang der Figuren 150 und 151 mit Fig. 148 zeigen.

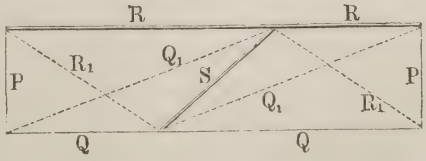
Fig. 152.



Damit das Seil- und Kräftepolygon ähnlich seien, müssen zwei gegenüberliegende Seiten des Kräftepolygons miteinander parallel laufen. Fig. 153 zeigt dies Verhältniss für parallele Streckbäume; Fig. 154 für den Fall, wo ein Füllungsglied S mit der Kraft parallel läuft.

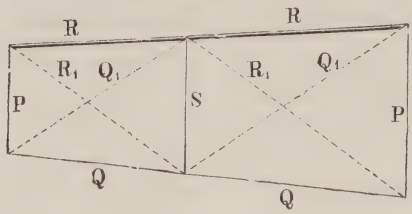
Die eben entwickelte Bestimmung der am Fachwerk wirkenden Kräfte ist zweckmässig, solange P auf das Blatt fällt; liegt aber die Richtungslinie dieser Kraft ausserhalb des Blattes, so kann man Q und R dadurch bestimmen, dass

Fig. 153.



man das Moment von P in Bezug auf die Punkte $R\,S$ und $Q\,S$ durch die Hebelsarme jener Kräfte in Bezug auf dieselben Punkte dividirt. P ist die Mittelkraft von $Q\,R\,S$, mithin ist das Moment derselben in Bezug auf jeden Punkt der Ebene, welche die Construction enthält, gleich dem Moment der der Seitenkräfte in Bezug auf denselben Punkt. Das Moment zweier dieser Kräfte ist aber gleich 0 in Bezug auf ihren Schnittpunkt, mithin muss das Moment von P in Bezug auf diesen Schnittpunkt gleich dem der Kraft sein, welche ihm gegenüber liegt.

Fig. 154.



Bezeichnen wir die Höhe des Schnittpunktes $Q\,S$ über R mit r Fig. 148, so ist das Moment der Kraft R in Bezug auf ihn $= R\,r$. Das Moment der Kraft P wird durch das Segment Y der durch den Punkt $Q\,S$ geführten Verticalen zwischen den äussersten Polygonseiten der ausserhalb des durch die Construction geführten Schnittes wirkenden Kräfte gemessen. Es ist Y nur mit der Poldistanz h zu multipliciren, welche zur Construction des Seilpolygons diente, um das Moment zu erhalten; man hat demnach:

$$R\,r = Y\,h \text{ und } R = \frac{h}{r}\,.\,Y.$$

Die Construction von R ist nun, da h, r und Y gegeben sind, so einfach, dass wir uns damit begnügen dürfen, das Verfahren hiermit angedeutet zu haben, um es gelegentlich anzuwenden. Analytisch wurde es ganz besonders durch Herrn Prof. A. Ritter in Hannover in seiner Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen ausgebildet.

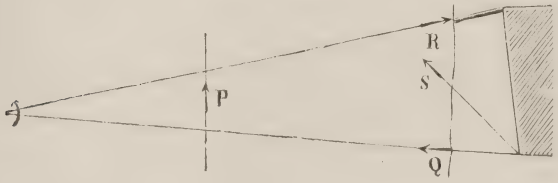
Ganz abgesehen davon, ob diese Methode oder die directe Zerlegung von P bei der wirklichen Construction der Kräfte schneller zum Ziele führe, zeigt sie unmittelbar die Richtung an, in welcher jede der drei Kräfte $Q\,R\,S$ wirkt. Bei den Ecken des durch sie gebildeten Dreiecks ist durch einen Pfeil angedeutet, in welchem Sinne die Kraft P um ihn dreht, und es ist klar, dass die diesem Eckpunkt gegenüberliegende Seitenkraft in demselben Sinne um ihn drehen muss; und dadurch ist auch bestimmt, ob der treffende Constructionstheil gespannt oder gepresst werde.

Von vorn herein ist dies zwar für die beiden Streckbäume bekannt, allein um zu wissen, ob eine Strebe absolut oder rückwirkend in Anspruch genommen sei, muss man sich immer den Sinn denken, in welchem P um den Punkt QR dreht. Wäre z. B. P_1 Fig. 148 die Mittelkraft der ausserhalb des durch die Construction geführten Schnittes wirkenden Kräfte, so würde es in entgegengesetzter Richtung als wie P um den Punkt QR drehen, S müsste demnach auch in entgegengesetzter Richtung wirken, und die Strebe wäre absolut statt rückwirkend in Anspruch genommen.

Ebenso müsste auch die Strebe absolut in Anspruch genommen sein, welche die andere Diagonale des Trapezes einnähme, das durch die Streckbäume und das nächst vorausgehende und folgende Füllungsglied gebildet wird, wie die Pfeile in Fig. 155 es zeigen.

In dem fortlaufenden Zug der Füllungsglieder ist also immer abwechselnd eines absolut und eines rückwirkend in Anspruch ge-

Fig. 155.



nommen, solange die relative Lage von P gegenüber dem Punkt QR sich nicht ändert. Geht die Richtungslinie von P durch diesen Punkt, so ist die treffende Strebe gar nicht in Anspruch genommen, springt endlich P auf die andere Seite des Punktes QR nach P_1 Fig. 148 hinüber, so sind, wie wir oben gesehen haben, die Füllungsglieder in entgegengesetzter Weise in Anspruch genommen.

Bei Fachwerken mit parallelen Streckbäumen liegt der Punkt QR im Unendlichen, also hat die Kraft P bezüglich desselben immer die Fig. 155 angedeutete Lage, und, wie wir später noch hervorheben werden, ist das abwärts laufende Füllungsglied S immer absolut in Anspruch genommen. Bei englischen Dachstühlen findet dagegen immer das Umgekehrte statt; die Mittelkraft P liegt immer jenseits des Schnittes QR, weil sich dessen Streckbäume über dem Widerlager schneiden. Die Mittelkraft hat daher immer die mit P_1 bezeichnete Lage in Fig. 148. Dreht im entgegen-

gesetzten Sinn als bei Fachwerken mit parallelen Streckbäumen, und das abwärts gehende Füllungsglied ist daher bei solchen Dachstühlen immer rückwirkend in Anspruch genommen.

Bei anders geformten Fachwerken lässt sich nichts Bestimmtes über die Inanspruchnahme der Füllungsglieder sagen.

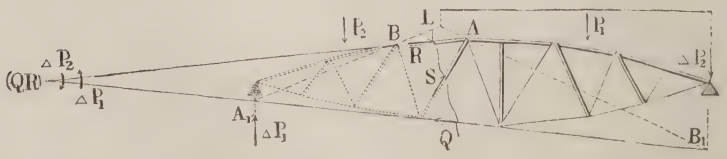
108. Die ungünstigste Belastung des Fachwerks.

In der vorigen Nummer haben wir nachgewiesen, dass die Kräfte Q und R, welche in den Streckbäumen wirken, dem Moment der Kraft P oder dem der ausserhalb des betrachteten Schnittes wirkenden Kräfte in Bezug auf einen der Punkte RS oder QS proportional seien. Man hat nämlich diese Momente nur durch q und r zu dividiren, um Q und R zu erhalten. Da nun die Punkte RS und QS als Schnitte der Strebe S mit den Streckbäumen immer im Innern der Oeffnung liegen, so gilt von Q und R Alles, was Nr. 49 S. 132 über das Moment der ausserhalb des Schnittes wirkenden Kräfte gesagt wurde, wir wiederholen daher nur: Q (und R) ist ein Maximum, wenn das ganze Fachwerk belastet und die schwersten Lasten bei der Verticalen durch den Punkt RS (oder QS) concentrirt sind.

Weniger einfach ist das Verhältniss für die Strebe, weil die an ihr wirkende Kraft S der Summe der ausserhalb wirkenden Kräfte P nicht mehr direct proportional ist. Wir müssen daher die für die Strebe S ungünstigste Belastungsart besonders ermitteln.

Untersuchen wir also den Einfluss zweier auf verschiedenen Seiten des durch das Fachwerk geführten Schnittes aufgebrachten Lasten P_1 und P_2 Fig. 156. Wir bezeichnen mit $\triangle P_1$ und $\triangle P_2$

Fig. 156.



den Einfluss dieser Belastungen auf die Summen der ausserhalb des Schnittes wirkenden Lasten, also auf den Theil des Fachwerks, den wir uns weggenommen denken. $\triangle P_1$ beschränkt sich dann

auf die am linkseitigen Widerlager aufwärts wirkende Pfeilerreaction, wie sie in der Figur mit $\triangle P_1$ angedeutet ist. $\triangle P_2$ ist gleich der abwärts wirkenden Kraft P_2 selbst, weniger der aufwärts wirkenden Pfeilerreaction desselben Widerlagers und demnach gleich und entgegengesetzt der Reaction des rechtseitigen Widerlagers: denn wird $\triangle P_2$ in entgegengesetzter Richtung genommen, so ist es als Reaction des rechtseitigen Widerlagers mit der des linkseitigen und der Kraft P_2 im Gleichgewicht und demnach die Mittelkraft dieser beiden Kräfte. $\triangle P_1$ und $\triangle P_2$ drehen im entgegengesetzten Sinne um den Punkt QR, wie es Fig. 156 angedeutet ist; es findet dies statt, solange sich Q und R nicht innerhalb der beiden Widerlager schneiden. Da aber dieser Fall ganz undenkbar ist, so kann man ganz allgemein sagen:

Die Lasten zu beiden Seiten eines Füllungsgliedes üben entgegengesetzten Einfluss auf dasselbe aus. Es ist daher am stärksten in Anspruch genommen, wenn das Fachwerk auf der einen Seite desselben ganz belastet, auf der andern aber ganz entlastet ist.

So wie die Verhältnisse in Fig. 156 gezeichnet sind, würde die Strebe S am stärksten in Anspruch genommen sein, wenn die rechte Seite, die des P_1 ganz belastet, die linke aber des P_2 ganz entlastet wäre. Wäre die Strebe in entgegengesetztem Sinne in Anspruch genommen, so müsste die linke Seite belastet, die rechte aber entlastet sein. Streben in der Mitte der Oeffnung, die bald gespannt, bald gepresst sind, sind in einem Sinne am stärksten in Anspruch genommen, wenn die eine Seite, im andern aber, wenn die andere Seite belastet ist.

$\triangle P_1$ und $\triangle P_2$ sind desto grösser, je näher P_1 und P_2 an sie heranrücken, ist demnach die Belastung keine gleichförmige, sondern etwa ein Locomotivenzug, so ist die Strebe am stärksten in Anspruch genommen, wenn diese mit dem Kamin vorn der Strebe zunächst steht. Die bisherigen Entwickelungen setzen jedoch voraus, dass die Belastung nicht in das Fach eintrete, dessen Diagonale die Strebe einnimmt; denn durch dieses Eintreten würde ja auch die Strecke jenseits des Schnittes belastet und dadurch die Voraussetzungen geändert werden. Es bedarf daher einer besondern Untersuchung, wie das Fach der Strebe selbst belastet sein müsse, damit sie am stärksten in Anspruch genommen werde.

Nehmen wir an, es bewege sich eine Last von dem Knotenpunkt A auf der belasteten Seite gegen den Knotenpunkt B auf der unbelasteten Seite hin, so wird dieselbe nach Maassgabe ihrer Entfernungen von diesen Knotenpunkten zuerst A sehr stark und B verhältnissmässig viel schwächer belasten; mit dem Fortschreiten der Last gegen B hin wird das Umgekehrte stattfinden, es wird der Punkt B mehr, der Punkt A weniger belastet sein. Solange die Last in der Nähe von A sich befindet, wird die von A herrührende Vergrösserung von S grösser als die von B herrührende Verminderung desselben sein. Liegt die Last in der Nähe von B, so wird umgekehrt die von B herrührende Verminderung grösser als die von A herrührende Vergrösserung sein. Im ersten Fall wird S vergrössert, im zweiten Fall verkleinert werden. Zwischen A und B aber muss es einen, und zwar nur einen Punkt geben, in welchem eine Last vermöge ihres Druckes auf A den Druck der Strebe S um gerade so viel vergrössert, als sie ihn vermöge ihres Druckes auf B verkleinert.

Dass es nur einen solchen Punkt zwischen A und B geben kann, geht daraus hervor, dass wenn die Last von A gegen B sich bewegt, die Abnahme bei A und die Zunahme bei B stetig fortschreitet, beide können sich daher nur ein einziges Mal ausgleichen. Ebenso klar ist es auch, dass wenn dieser Punkt L bestimmt ist, die Strecke AL total belastet sein muss, wie es durch einen stark ausgezogenen Strich angedeutet ist; die Strecke LB aber gar nicht belastet sein darf, weil die Belastung der Strecke AL den Druck in der Strebe um mehr vergrössert als verkleinert.

Um diesen Punkt L zu bestimmen, nehme man in den Verticalen durch die beiden Widerlager zwei Punkte $A_1 B_1$, welche mit dem Punkt (QR) auf einer geraden Linie liegen, an: dann werden sich die Linien AB_1 und $A_1 B$ in L auf der Verticalen durch den gesuchten Punkt schneiden. Denn betrachtet man $A_1 B_1$ als die Schlusslinie des Seilpolygons $A_1 BAB_1$ zweier in A und B wirkenden Kräfte, dann wird von Constructionswegen die Mittelkraft der Kräfte $A_1 B$ ausserhalb des durch die Construction geführten Schnittes durch den Punkt (QR) gehen, weil die Schlusslinie und die Polygonseite AB in diesem Punkt sich schneiden. Das Moment dieser Kräfte in Bezug auf ihn und also auch ihr Einfluss auf S wird gleich 0 sein. Auf der andern Seite aber kann man auch die in A und B wirkenden Kräfte als die Seitenkräfte einer in L,

dem Durchschnitt der äusseren Polygonseiten $A_1 B$ und $A B_1$ aufgebrauchten Last betrachten, und dann stellen die bei A_1 und B wirkenden Kräfte gerade den von der Last bei L herrührenden Einfluss auf den linksseitigen abgeschnittenen Constructionstheil dar. Es wird also der von einer Last bei L herrührende Einfluss auf S ebenfalls $= 0$ sein, w. z. b. w.

Um dem oben erhaltenen Resultat einen geometrischen Ausdruck zu geben, kann man sagen:

In dem involutorischen Parallelstrahlenbüschel ohne Ordnungspunkte, der durch die Verticalen der beiden Widerlager und der beiden in Frage stehenden Knotenpunkte bestimmt wird, sind die Verticalen durch den Endpunkt der Last und durch den Schnittpunkt der Streckbäume des treffenden Faches einander zugeordnet, wenn die Strebe des Faches am stärksten in Anspruch genommen sein soll.

Denn da $A A_1 . B B_1 . L (Q R)$ die sechs Eckpunkte eines Vierseits sind, so werden sie aus jedem Punkt, also auch aus dem unendlich fernen Verticalpunkt, durch einen involutorischen Strahlenbüschel projicirt.

In obiger Untersuchung haben wir vorausgesetzt, dass durch Belastung des Faches $B A$ nichts an der Belastung der folgenden Strecke $A B_1$, nichts an P_1 geändert werde; dies ist aber nicht der Fall, wenn die Belastung z. B. aus einer Folge von Radbelastungen besteht. Rollt dann ein Rad in das Fach der Strebe hinein, so rollen die übrigen Räder nach und der Angriffspunkt von P_1 schreitet mit vor. Wir bestimmen zum Schluss noch, wie weit ein solcher Zug auf die Brücke hineingerollt werden muss, damit die Strebe am ungünstigsten belastet sei.

In Fig. 158 haben wir das Seilpolygon und in Fig. 159 das Kräftepolygon für Verhältnisse, wie sie in Fig. 157 dargestellt sind, gezeichnet, A_1 und B_1 liegen in den Verticalen der zwei Widerlager, A und B in denen der zwei Knotenpunkte des Strebentrapezes und C in der des Punktes $(Q R)$, in welchem sich die verlängerten Streckbäume des Trapezes schneiden.

Ferner sei P der Mitteldruck aller Radbelastungen der Strecke $A B_1$ und $\triangle P$ die Last oder der Mitteldruck derjenigen Räder, welche die Strecke $A B$ des geschnittenen Faches belasten. Wird nun mittelst des Kräftepolygons Fig. 158, dessen Poldistanz $= h$

ist, ein Seilpolygon $A, \triangle P\ P\ B$, gezeichnet, so schneiden die Schlusslinie A, B, und die Linie $A\,B$, welche die Schnitte des Polygons mit den Verticalen der beiden Knotenpunkte verbindet, auf

Fig. 157.

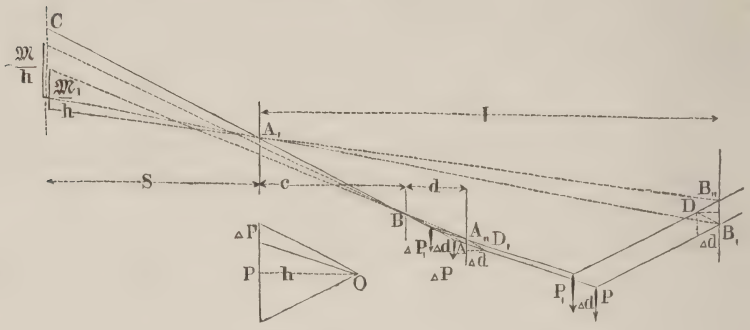


Fig. 158.

der Verticalen C ein Stück $\frac{\mathfrak{M}}{h}$ (bei der Fig. 157 getroffenen Anordnung sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$ negativ) ab, das nur mit der Poldistanz h zu multipliciren ist, um das Moment der bei A, und B also der am abgeschnittenen Theil des Fachwerks wirkenden Kräfte zu erhalten. Der Beweis ist identisch derselbe wie der, den wir soeben für eine bei L Fig. 156 aufgebrachte Belastung geleistet haben.

Wir lassen $\triangle P$ um ein Stück des Faches $\triangle d$, wo immer $\triangle d < d$ ist, nach $\triangle P_1$ verrücken, wo $\triangle P_1 = \triangle P$ ist und der Zeiger nur dazu dient, die Veränderung der Lage anzudeuten; natürlich rückt P nach P_1 nach, wobei vorausgesetzt wird, dass sich während der Bewegung das Belastungsgesetz nicht geändert hat, dass also keine Räder über eine der Verticalen B, $A\ B$ weggerollt sind: und construiren für die neue Stellung der Lasten ein neues Polygon $A, \triangle P_1, P_1, B_{11}$, welches auf der Verticalen durch C das dem neuen Moment proportionale Segment $\frac{\mathfrak{M}_1}{h}$ abschneidet. Es handelt sich nun darum, die durch diese Bewegung hervorgebrachte Aenderung $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}$ zu bestimmen.

Da sich P und $\triangle P$ nicht geändert haben, so ist auch das Kräftepolygon Fig. 158 unverändert geblieben, alle Seiten des Seilpolygons sind parallel zu sich selbst verschoben worden, und zwar in der Richtung der ersten festgehaltenen Polygonseite A, B

um ein Stück, dessen horizontale Projection $= \triangle d$ ist. Werden daher zwischen den beiden Seilpolygonzügen die Parallelen B, D und $A_{,,}$ D, zur ersten Polygonseite gezogen, so werden dieselben auch $\triangle d$ in der Horizontalprojection lang sein und die Dreiecke $D\,B_{,,}\,B$, und D, $A\,A_{,,}$ werden ausserdem noch den Dreiecken $O)\ P + \triangle P$ und $O)\ \triangle P$ ähnlich sein. Es ergeben sich hieraus unmittelbar die Strecken:

$$B, B_{,,} = (P + \triangle P) \cdot \frac{\triangle d}{h} \text{ und } A\,A_{,,} = \triangle P \cdot \frac{\triangle d}{h}.$$

Die Entfernung dieser Strecken von den auf der ersten Polygonseite festgehaltenen Drehungspunkt A, und B (siehe Fig. 157) ist $= l$ und d.

Die Entfernung derselben Punkte von der Verticalen C bezeichnen wir (siehe Fig. 157) mit s und $s + c$, es beschreiben demnach auf der Verticalen der C:

Die Schlusslinie A, B, abwärts den Weg $\frac{s \cdot \triangle d}{l \cdot h}(P + \triangle P)$

„ Polygonseite $A\,B$ „ „ „ $\frac{(s+c)\triangle d}{d \cdot h} \cdot \triangle P.$

Und die Aenderung des Moments ist gleich:

$$-\frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}}{h} = \frac{\triangle d}{h}\left(\frac{s}{l}(P + \triangle P) - \frac{s+c}{d}\triangle P\right)$$

oder:

$$-(\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}) = \left[P - \left(\frac{l}{d} - 1 + \frac{c\,l}{s\,d}\right)\triangle P\right]\frac{s}{l}\triangle d^{*}).$$

---

*) Die graphische Ableitung dieser Formel ist beinahe complicirter als die analytische, weshalb wir diese auch noch in aller Kürze geben wollen.

Bezeichnen wir die horizontal gemessenen Entfernungen $PB_{,}$, $\triangle P\,B$, und $\triangle P\,A$ mit b b_1 und b_2, so ist die am abgeschnittenen Fachwerkstück wirkende Kraft bei A, gleich $-\frac{b}{l}P - \frac{b_1}{l}\triangle P$,

die bei B „ $+\frac{b_2}{d}\triangle P$,

und das Moment dieser Kräfte in Bezug auf die Verticale durch C, deren Abscisse $= -s$ ist:

$$\mathfrak{M} = -\frac{s}{l}(b\,P + b_1 \triangle P) + (s + c)\frac{b_2}{d}\triangle P.$$

Bei dem Vorrücken der Lasten ändern sich die Längen b, b, und b_2 gleichviel um $\triangle d$, sodass:

$$\triangle b = \triangle b_1 = \triangle b_2 = \triangle d \text{ ist},$$

Dieser Zuwachs des Moments ist von der Lage der Lasten ganz unabhängig, denn er enthält keine diese Lage festsetzende Abscisse und ist einfach der Grösse der Verrückung proportional. Ist er positiv, so müssen die Lasten beständig vorwärts gerückt werden; ist er negativ, so müssen sie zurück gerückt werden, so weit es geschehen kann, ohne dass das Belastungsgesetz sich ändere, damit der Druck in der Strebe ein Maximum werde. Das Belastungsgesetz ändert sich aber dadurch, dass Räder auf die Brücke oder über die Knotenpunkte rollen. Durch das erstere oder durch eine Aenderung von P um einen Raddruck wird das Moment um viel weniger geändert, als durch letzteres, durch eine Aenderung von $\triangle P$ um einen Raddruck, weil der Coefficient von $\triangle P$ viel grösser $\left(\frac{l}{d}$ in der Regel $= 8$ bis $15\right)$ als der von P ist. Die Grösse des Verrückens wird daher in der Regel dadurch beschränkt werden, dass ein Rad den Knotenpunkt des Strebenfaches erreicht, und man darf beinahe ganz allgemein annehmen: dass bei der ungünstigsten Belastung einer Strebe, immer ein Rad über dem einen Knotenpunkt ihres Faches stehe.

Ist das Totalgewicht des Zuges zwischen dem Fach und dem Widerlager grösser als $\left(\frac{l}{d} - 1 + \frac{c\,l}{s\,d}\right)$ mal die vordersten ein, zwei oder drei Räder, die $\triangle P$ bilden: so müssen diese ein, zwei oder drei Räder über den Knotenpunkt hinausgerollt werden, bis das zweite, dritte oder vierte Rad über demselben steht; in keinem Falle aber darf ein Rad über den Knotenpunkt auf der unbelasteten Seite gerollt werden, denn dadurch wird der Druck in der Strebe unbedingt vermindert. Ein weiteres Vorrücken darf nicht mehr stattfinden, wenn dadurch $\triangle P$ so gross würde, dass

$$\left(\frac{l}{d} - 1 + \frac{c\,l}{s\,d}\right) \triangle P > P$$

wären, denn dann würde der Druck in der Strebe laut obiger For-

---

woraus unmittelbar in Berücksichtigung, dass $\mathfrak{M}$ in Bezug auf die b vom ersten Grad ist, folgt:

$$\frac{\triangle \mathfrak{M}}{\triangle d} = -\frac{s}{l}(P + \triangle P) + \frac{s+c}{d}\triangle P,$$

wie oben.

mel vermindert werden. Ist

$$\left(\frac{l}{d} - 1 + \frac{c\,l}{s\,d}\right) \triangle P = P,$$

so wird durch ein Vor- oder Rückrücken nichts am Moment geändert, und der Zug kann so weit vor- und zurückgeschoben werden, als es geschehen kann, ohne dass Räder über die Knotenpunkte hinausrollen.

Der Ausdruck $\frac{l}{d} - 1 + \frac{c\,l}{s\,d}$ wird am leichtesten wohl immer gerechnet; sind alle Fächer des Fachwerks gleich lang, so bedeutet $\frac{l}{d}$ die Fachzahl, die man unmittelbar abzählen kann. Sind ausserdem noch die Streckbäume parallel, wie es z. B. bei Howe'schen Brücken u. s. w. der Fall ist, so wird noch s unendlich und obige Zahl reducirt sich auf die Fachzahl weniger eine. Wir wollen, um ein ganz einfaches Beispiel zu geben, annehmen, es handle sich um einen Zug gleich stark belasteter Räder und um eine Howe'sche Brücke von zehn Fächern: dann wird, so lange nur neun oder weniger Räder auf der Brücke stehen, immer das vorderste Rad auf den Kopf der Strebe gestellt werden, die am stärksten belastet werden soll. Stehen zwischen neun und achtzehn Räder auf der Brücke, so muss das zweite Rad über den Kopf der am stärksten zu belastenden Streben gestellt werden, u. s. f.

Zweites Kapitel.

Die Kräftepläne des Fachwerks.

---

109. Der Kräfteplan eines Fachwerks der allgemeinsten Form.

Das bisher Entwickelte wollen wir an einigen Beispielen näher erläutern.

Taf. 16_I haben wir ein Fachwerk der allgemeinsten Form

gezeichnet. Die beiden Widerlager und die an ihnen wirkenden Kräfte haben wir mit A und B, die Knotenpunkte des Druckbogens mit ungeraden, die des Spannbogens aber mit geraden Ziffern fortlaufend numerirt. Wegen der Aenderung der Strebenrichtung in der Mitte der Brücke mussten dem mittelsten Knotenpunkte zwei Nummern 5 und 7 gegeben werden, damit die Bezifferung symmetrisch bleibe. Da ein derartiges unsymmetrisches Fachwerk wohl nie zur Ausführung kommen wird, so haben wir uns keine bestimmte, sondern beliebige Kräfte angenommen, mit denen wir uns die zehn Knotenpunkte belastet denken und dieselben auf der Linie $A\,C\,B$ (Taf. 16_3) aufgetragen. Damit der Kräfteplan symmetrisch werde, wurde die Kraft 6 einmal nach und einmal vor der Last 57 aufgetragen, und diese ist im ersten Fall mit 5, im zweiten mit 7 bezeichnet, wie es aus der Fig. 11 S. 7 entsprechenden Bezifferung in der Nähe von C (Taf. 16_3) hervorgeht.

Es sind nun die von diesen Lasten herrührenden, in den einzelnen Constructionsgliedern des Fachwerks wirkenden Kräfte zu bestimmen.

Man erhält zunächst die Widerlagerreactionen, indem man mit dem in O angenommenen Pole das Seilpolygon (Taf. 16_2) construirt und zur Schlusslinie $A\,B$ eine Parallele durch den Pol O (Taf. 16_3) zieht, welche die Totalbelastung in C so theilt, dass $C\,A$ und $B\,C$ die Reactionen der (Taf. 16_1) mit A und B bezeichneten Widerlager sind.

Wird ein Schnitt durch $A\,1$ und $A\,2$ geführt, so giebt das Dreieck $A\,1\,C$ (Taf. 16_3), in dem die Seiten $A\,1$ und $1\,C$ mit den geschnittenen Streckbäumen parallel laufen, unmittelbar die in diesen wirkenden Kräfte $A\,1$ und $A\,2$; weil die ausserhalb des Schnittes wirkende Kraft sich auf die Reaction des Widerlagers beschränkt.

Die ausserhalb des folgenden Schnittes, der die Strebe 1 2, das vorausgehende $A\,2$ und das folgende Streckbaumstück 1 3 schneidet, wirkenden Kräfte A und 1 sind entgegengesetzten Zeichens und ziehen sich daher auf der Linie $C\,A$ des Kräftepolygons (Taf. 16_3) von selbst so ab, dass für diesen Schnitt $P = C\,(1\,2)$ ist; wo wir mit (1 2) den Punkt des Kräftepolygons bezeichnen, in welchem die Kräfte 1 und 2 zusammen stossen. Um die übrigen im Schnitt wirkenden Kräfte zu bestimmen, ist es nicht nothwendig, den An

griffspunkt von P zu bestimmen, weil die eine der in ihm wirkenden Kräfte $A2$ schon bekannt ist; es genügt daher, durch den Punkt (1 2) eine Parallele (1 2) 2 zum Streckbaumstück 1 3 und durch 1 eine andere zur Strecke 1 2 zu ziehen, um das der Fig. 149 S. 364 entsprechende Viereck $C1\,2\,(1\,2)$ zu erhalten, welches alle am Schnitt wirkenden Kräfte giebt.

Hier müssen wir darauf aufmerksam machen, dass diese Art vorzugehen nur dann zulässig ist, wenn sich die zwei aufeinander folgenden Füllungsglieder auf dem Streckbaume schneiden und dort kein Dreieck bilden. Man überzeugt sich leicht auf geometrischem Wege, dass man nur in diesem Falle bei zwei durch dieselbe Strecke des einen Streckbaums, aber durch verschiedene Füllungsglieder geführten Schnitten, dieselbe Kraft für jene Strecke erhält. Schneiden sich diese Constructionsglieder nicht in einem Punkte, so ist, je nach Umständen, das eine oder das andere relativ wirkenden Kräften ausgesetzt, die in jedem speciellen Fall nur durch besondere Berücksichtigung der Verhältnisse bestimmt werden können.

Wie oben können auch die am folgenden Schnitt durch die Strebe 2 3 wirkenden Kräfte bestimmt werden. Für diesen Schnitt ist $P = A - 1 - 2 = C(2\,3)$. Wird von dem Punkt (2 3) in Richtung und Grösse der bekannte, in 1 3 des Streckbaums wirkende Druck $(2\,3)\,2'$ aufgetragen, so ergänzen die Parallelen 2, 3 zur Strebe und $C3$ zum Stück 2 4 des Spannbogens das Kräftevieleck $C\,3\,2,(2\,3)$.

Auf diese Weise kann fortgefahren werden bis zu dem Schnitt durch die Strebe 4 5, der ausser ihr noch 3 5 und 4 6 schneidet und das Polygon $C\,5\,4,(4\,5)$ bestimmt. Um jetzt die in dem Pfosten 5 6 wirkende Kraft zu erhalten, rücke man mit dem vorigen Schnitt über den Knotenpunkt 6 hinaus, so dass im Ganzen 3 5, 4 5, 6 5 und 6 8 geschnitten werden. Die Summe der ausserhalb dieses Schnittes wirkenden Kräfte ist $= C(6\,7)$. Trägt man nun vom Punkt (6 7) aus die schon bekannte Spannung im Druckbaume zwischen 3 und 5 und in der Strebe 4 5 auf: so erhält man den Zug $(6\,7)\,4_{,,}\,6_{,}$, das Kräftepolygon schliesst sich und giebt die noch fehlenden, in 6 5 und 6 8 wirkenden Kräfte, indem man durch 6, eine Parallele 6, 7 zu 6 5 und eine andere zu 6 8 zieht. Das Polygon, welches das Gleichgewicht in diesem Schnitt darstellt, ist $C,7\,6,4_{,,}(6\,7)$.

In dem nun folgenden Schnitt durch 4 6, 6 7, 7 8 und 7 9 ist die Summe der ausserhalb wirkenden Kräfte gleich $C(5\,6)$; die an den

beiden ersten Constructionsgliedern wirkenden Kräfte sind bekannt, und gerade so wie für den vorigen Schnitt erhält man für diesen das Polygon $C\,5\,6\,8_{,,}(5\,6)$. Die weiteren Schnitte construiren sich wieder einer aus dem andern, wie die ersten, bis zum Schnitt durch 10, 11, welcher das Polygon $C\,11,10\,(10,11)$ giebt. Sind der Punkt C und alle Kräfte bisher richtig construirt worden, so muss jetzt zum Schluss $11\,B$ mit dem Endstück des Druckbogens parallel laufen, und man hat so eine Probe für die Richtigkeit der ausgeführten Constructionen.

Man sieht, wir haben nie nöthig gehabt, die Lage von P zu bestimmen, um die an den einzelnen Constructionstheilen wirkenden Kräfte zu erhalten. Da man jedoch durch Bestimmung dieses Angriffspunktes direct nach den in Nr. 107 S. 364 gegebenen Regeln die an jedem beliebigen Glied wirkenden Kräfte bestimmen kann: so kann es zweckmässig sein, nicht bis zum Schluss bei $11\,B$ zu warten, um eine Probe für die Richtigkeit der ausgeführten Constructionen zu erhalten, sondern vorher schon ein- oder zweimal nachzusehen, ob man noch keinen Fehler gemacht hat. Für den Schnitt durch die Strebe 3 4 wurde eine solche Probe eingezeichnet. Der Schnitt der Polygonseite 3 4 (Taf. 16_2) mit der Schlusslinie giebt die Lage der Kraft P, alles weitere ist bekannt. Die Bezeichnung entspricht ganz der der Fig. 148 und 149 S. 364. In Taf. 16_1 und $_3$ sind alle Polygonseiten mit den gleichen Buchstaben bezeichnet; die Diagonalen Q_1 und R_1 sind doppeltstrichpunktirt, so dass keine Zweideutigkeit möglich ist. Auf Taf. 16 haben wir nur die Richtungen der äussern Kräfte $A\,1 \ldots 11\,B$ durch Pfeile angegeben, weil diese unveränderlich sind, während die innern Kräfte ihre Richtung ändern, je nachdem man sich bei einem Schnitt den linken oder rechten Theil des Fachwerks abgeschnitten denkt. Denkt man sich, wie in Fig. 148 und 152, den linken Theil abgeschnitten, so haben alle Pfeile des Strahlenbüschels C der im Spannbogen wirkenden Kräfte eine centrifugale Richtung; denkt man sich dagegen den rechten Theil des Fachwerks abgeschnitten, so haben sie eine centripetale Richtung; da aber die Richtung der Pfeile auf allen übrigen Constructionstheilen in jedem Kräftepolygon die gleiche bleibt: so ergeben sich hieraus unmittelbar die Richtungen, in welchen alle Constructionstheile in Anspruch genommen sind, und daraus auch, ob sie gespannt oder gepresst sind. Damit aber hierüber gar kein Zweifel bestehen

könne, haben wir in Taf. 16_1 und $_3$ alle rückwirkend angegriffenen Theile durch einen starken Doppelstrich ausgezeichnet. Als auf eine Ausnahme machen wir darauf aufmerksam, dass 8 9 rückwirkend, nicht absolut in Anspruch genommen, also eine Strebe, kein Hängeisen ist; das Viereck C 9 8 (8 9) Taf. 16_3, dem sie angehört, ist nicht convex, sondern verschlungen.

Bisher haben wir nur das Gleichgewicht der an Schnitten durch die Construction wirkenden Kräfte bestimmt; allein es ist klar, dass auch die an jedem Knotenpunkte wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind, was sich dadurch zeigt, dass Taf. 16_3 die an ihm wirkenden Kräfte ein geschlossenes Polygon bilden. So z. B. wird das Gleichgewicht der Kräfte am Knotenpunkte 2 des Spannbogens durch das geschlossene Polygon C 1 2 2, 3 C, in welchem 2 2, die Belastung 2 des Knotenpunktes ist, die übrigen Strecken aber den gleichbezeichneten Constructionstheilen entsprechen. Das Gleichgewicht am Knotenpunkt 3 des Druckbaums wird durch das Polygon (2 3) 2′ 3 4 (3 4), das durch die Last 3 auf der Linie CA geschlossen wird, dargestellt. Insbesondere wird durch das Polygon C 5 6 7 C oder auch C 5 6, 7 C das Gleichgewicht am Knotenpunkt 6, dessen Belastung 6 7 oder 5 6, ist, dargestellt; und durch das Polygon (4 5) 4, 5 6 8,, (5 6), oder auch durch das mit diesem congruente Polygon (6 7) 4,, 6, 7 8, (7 8), welche durch die Kräfte 5 = 7 geschlossen werden, das am Knotenpunkt 5 7.

Indem wir eine consequente Bezeichnung nicht genug empfehlen zu können glauben, wollen wir noch darauf aufmerksam machen, wie durch die auf Taf. 16 eingehaltenen, so leicht zu den verschiedenen Schnitten und Knotenpunkten gehörigen Gleichgewichtspolygonen gefunden werden können: sie sind durch die gleichbezifferten Füllungsglieder unten an Taf. 16_3 vollständig gegeben; die an den bezifferten Enden dieser Füllungsglieder anstossenden Kräfte der Streckbäume tragen die nächst niedrigen und die nächst höheren Ziffern. Also an den Endpunkt der Strebe, die mit 5 bezeichnet ist, stösst die Polygonseite des Spannbogenstücks 4 6 an; zum Ueberfluss sind noch alle diese Zeiger den Streckbäumen beigeschrieben worden.

Auf die Taf. 16 dargestellte Weise lassen sich die Kräfte, die an den Constructionstheilen von Fachwerken jeder beliebigen Form wirken, bestimmen, wenn die Belastungen gegeben sind. Allein so unregelmässige Formen, wie die dort dargestellten, kom-

men selten zur Ausführung; sobald aber die Form regelmässiger wird, sobald gewisse Dimensionen, gewisse Kräfte constant werden, lassen sich die Constructionen bedeutend vereinfachen, und wir wollen jetzt die in der Praxis üblichsten durchnehmen. Die Taf. 16 gegebene Construction verlangt für jede Belastungsart ein besonderes Kräftepolygon, während es uns gelingen wird, alle Polygone der für die einzelnen Glieder ungünstigsten Belastungsarten in einer einzigen Figur zu vereinigen, sobald es möglich ist, die Construction selbst etwas zu vereinfachen.

110. Das Fachwerk mit parallelen Streckbäumen.

Parallele Streckbäume haben die Howe'schen, die bisweilen Fachwerkbrücken genannten eisernen, die Town'schen und die Gitterbrücken. Bei solchen Brücken sind also die früher (Nr. 107 S. 366) mit r und q bezeichneten Perpendikel von den Knotenpunkten des untern und obern Streckbaums auf den gegenüberliegenden Druck- und Streckbaum gleich gross. Setzt man daher in den Gleichungen $R = \frac{h}{r} \cdot Y$ und $Q = \frac{h}{q} \cdot Y$ derselben Nummer die Poldistanz $h = nq = nr$, so erhält man unmittelbar

$$Q = R = nY.$$

Würde man also die Poldistanz des Kräftepolygons genau gleich der Entfernung der beiden parallelen Streckbäume annehmen, so würden die Ordinaten Y der Ecken des Seilpolygons in Bezug auf dessen Schlusslinie genau gleich den Spannungen und Pressungen der Streckbäume in den den entsprechenden Knotenpunkten gegenüberliegenden Strecken sein, weil in diesem Falle $n = 1$ ist. Ist die Poldistanz gleich der 3-, 5-, n-fachen Entfernung der Streckbäume, so ist Y gleich dem $^1/_3$, $^1/_5$, $^1/_n$ dieser Spannungen, die man daher unmittelbar auf einen Maassstab abgreifen kann, der 3-, 5-, n-mal kleiner, als der ist, mittelst dessen die Kräfte aufgetragen wurden. Durch die Construction des Seilpolygons, das ohnehin nicht umgangen werden kann, um die Widerlagerreactionen zu erhalten, sind also auch die Spannungen und Pressungen in allen Fächern der Streckbäume bestimmt.

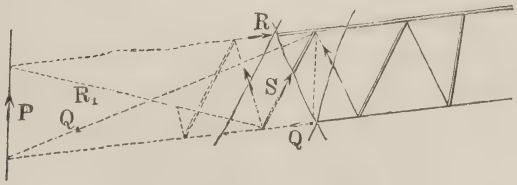
Daraus, dass die in den Streckbäumen wirkenden Kräfte einfach den Ordinaten des Seilpolygons oder den Momenten der ausser-

halb eines gegebenen Querschnittes wirkenden Kräfte proportional sind, folgt auch, dass Alles, was in den Nummern 48 und 49 S. 127 u. f. von den Momenten im Allgemeinen gesagt wurde, auch von den in den Streckbäumen wirkenden Kräften gilt, insofern es nicht schon in Nr. 108 S. 368 allgemein für jedes Fachwerk bewiesen wurde. Ueberhaupt wird durch das Seilpolygon das Gesetz der in den Streckbäumen wirkenden Kräfte ausgedrückt. Diese sind also = 0 bei jedem Widerlager, nehmen dann gegen die Mitte hin zu, bis zum Maximalmomentenpunkt (Nr. 48 S. 127), für den die Summe der ausserhalb wirkenden Kräfte gleich 0 ist. In Anwendung auf das Fachwerk können wir dies also ausdrücken: Zu beiden Seiten des Querschnittes, in welchem die Streckbäume am stärksten in Anspruch genommen sind, sind die Gewichte der Fachwerkstücke zu beiden Seiten des Schnittes, incl. der auf ihnen ruhenden Lasten, gerade so gross, wie die Reactionen der Widerlager, auf die sie sich stützen.

Bezüglich der ungünstigsten Belastungsart der Streben gilt natürlich Alles, was in Nr. 108 allgemein von jedem Fachwerk bewiesen wurde, was auch mit dem in Nr. 49 S. 129 Entwickelten vollständig übereinstimmt.

Wählen wir zur Bestimmung der in den Streben und Hängeisen des Fachwerks (Fig. 159) wirkenden Kräfte eine der Figuren

Fig. 159.



150 und 151 S. 364, so klappen sie in Folge des Parallelismus der Streckbäume zur Fig. 160 und 161 zusammen.

Da R und Q bestimmt sind, so brauchen wir uns um diese und um die Hilfskräfte Q_1 und R_1 nicht mehr zu kümmern und dürfen uns um so mehr darauf beschränken, zur Bestimmung von S das Dreieck $S P$ zu construiren, als aus den Figuren hervorgeht, dass S von der Lage der Kraft P und demnach auch von $Q R Q_1 R_1$ ganz unabhängig ist. Zieht man in Fig. 159 durch den Kopf der Strebe

S eine Verticale, so ist das Dreieck, das diese mit der Strebe und mit dem Streckbaume, den sie einschliessen, bildet, jedem der beiden Dreiecke SP in Fig. 160 und 161 ähnlich, so dass diese also leicht zu verzeichnen sind. Ferner folgt noch aus dieser

Fig. 160.

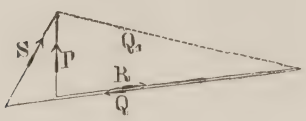
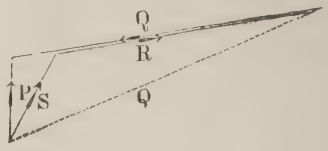


Fig. 161.



Aehnlichkeit der allgemeine Satz, der übrigens auch unmittelbar aus Fig. 153 S. 365 gefolgert werden könnte:

Bei parallelen Streckbäumen verhält sich die Kraft, die in einer Strebe wirkt, zur Mittelkraft der ausserhalb dieser Strebe wirkenden Kräfte, wie die Länge der Strebe zum Abschnitt der Kraft zwischen den parallelen Streckbäumen.

Man kann sich noch kürzer ausdrücken und sagen: die verticale Seitenkraft der Strebe ist gleich der Summe der ausserhalb der Strebe wirkenden Kräfte. Doch ist dies wörtlich nur für Fachwerke mit horizontalen Streckbäumen wahr; bei geneigten Streckbäumen hat man sich dann die zweite Seitenkraft nicht horizontal, sondern parallel zu den Streckbäumen zu denken. Stehen einzelne Füllungsglieder vertical, wie z. B. die Hängeisen in der Howe'schen Brücke, die Pfosten in verschiedenen eisernen Brückensystemen, so haben diese einfach der Summe der ausserhalb wirkenden Kräfte zu widerstehen.

Sind die Streben oder die Hängeisen alle parallel, so sind die in ihnen wirkenden Kräfte dem P proportional und ändern sich wie dieses. Sie sind also bei den Widerlagern am stärksten in Anspruch genommen, und dort ist ihre verticale Seitenkraft gleich der Reaction desselben. Vom Widerlager nimmt die in ihnen wirkende Kraft ab, bis zum Maximalmomentenpunkt, wo sie gleich 0 ist und wo sie ihr Zeichen ändert; also folgen dort zwei in gleichem Sinne in Anspruch genommene Füllungsglieder unmittelbar aufeinander, während sonst gedrückte und gespannte mit einander abwechseln.

Aus Fig. 160 und 161 geht hervor, dass die Pfeile von S und

P jederzeit in gleichem Sinne gegen ihren Schnittpunkt gekehrt sind; in einer Reihe aufeinander folgender Schnitte, wie deren drei in Fig. 159 angedeutet sind, müssen daher auch die Pfeile, welche die Richtung der Kräfte in den geschnittenen Füllungsgliedern andeuten, in gleichem Sinne gegen die Knotenpunkte gekehrt sein, so lange P seinen Sinn nicht ändert. Hieraus folgt, wie Fig. 159 zeigt, dass, wenn P aufwärts gerichtet ist, die aufsteigenden Füllungsglieder gepresst, die abfallenden aber gespannt sind.

Die Reactionen der Widerlager sind immer aufwärts gerichtet; man kann daher ganz allgemein sagen: Bei parallelen Streckbäumen sind vom Widerlager ab bis zum Maximalmomentenpunkt alle aufsteigenden Füllungsglieder gepresst, alle abfallenden gespannt.

Fachwerke mit parallelen Streckbäumen haben sehr viel Analogie mit dem Balken constanten Querschnitts; wie bei dem Balken die Spannung der äussersten Fasern dem Moment der äussern Kräfte proportional ist, so sind bei dem Fachwerk mit parallelen Streckbäumen, die man als äusserste Fasern betrachten kann, die in diesen wirkenden Kräfte ebenfalls diesen Momenten proportional. Die Functionen der Mittelwand, die Spannungsdifferenzen von dem einen auf den andern Streckbaum scheerend zu übertragen, verrichten die Füllungsglieder, deren Inanspruchnahme der Summe der ausserhalb wirkenden Kräfte, d. h. den scheerenden Kräften, proportional ist. Wie den Balken kann man auch das gleich hohe Fachwerk continuirlich machen, und alle beim continuirlichen Balken angeführten Rechnungen können daher auch auf jenes angewendet werden, und die gleichen Constructionen geben die am Fachwerk wirkenden Kräfte. Die Momentencurven auf Taf. 12, 13 und 15 geben mit Berücksichtigung der Poldistanz, die den Constructionen zu Grunde gelegt wurde, direct die in den Streckbäumen wirkenden Kräfte. Die Curven der scheerenden Kräfte oder der P geben die verticalen Seitenkräfte der Füllungsglieder; überhaupt genügen die auf jenen Tafeln erläuterten Constructionen auch zur Bestimmung aller am continuirlichen Fachwerk wirkenden Kräfte, und wir haben nicht nöthig, später auf das continuirliche Fachwerk zurückzukommen. Die ganze Theorie des continuirlichen Balkens ist auf die Annahme gegründet, dass sein Krümmungshalbmesser oder der reciproke Werth des zweiten Differentialcoefficienten seiner Axengleichung umgekehrt dem Mo-

ment der ausserhalb wirkenden Kräfte proportional sei. Alles was über die Art der Inanspruchnahme der Füllungsglieder in der Nähe der Maximalmomentenpunkte gesagt wurde, gilt daher auch von der Nähe der kleinsten Krümmungshalbmesser der Axe des Fachwerks. Man kann daher ganz allgemein sagen: In gebogenen Fachwerken convergiren die gleichartig in Anspruch genommenen Füllungsglieder gegen die Minimalkrümmungshalbmesser. Sind die Krümmungshalbmesser constant, so sind die in jenen Gliedern wirkenden Kräfte gleich 0.

Bei dem continuirlichen Fachwerk z. B. convergiren und divergiren die Füllungsglieder gegen den Maximalmomentenpunkt und gegen die Pfeiler, welche Minimalmomentenpunkte, d. h. negative Maximalmomentenpunkte sind; an beiden Stellen sind die Krümmungshalbmesser der Fachwerkaxe Minima.

Will man überhaupt die Kräfte, welche an den einzelnen Theilen eines Fachwerks oder auch eines Balkens wirken, aus seinen Formänderungen, nicht aus seinen Belastungen ableiten, so kann man, wenn die Gleichung der Formänderung, d. h. die Ordinate y eines gebogenen Balkens, der vorher gerade war, oder $y - y_1$ für einen krummen Balken, dessen Ordinate vor der Biegung gleich y_1 war, gegeben ist, wie folgt die im Fachwerk durch die Formänderung entstehenden Spannungsdifferenzen auf die Gleichung der Formänderung beziehen:

Der erste Differentialcoefficient dieser Formänderung, also $\frac{dy}{dx}$, ist die Aenderung der Tangente, welche die Richtung eines Curvenelementes mit der Abscissenaxe bildet.

Dem zweiten Differentialcoefficienten sind das Moment der ausserhalb y wirkenden Kräfte, die Spannungen in den Streckbäumen und reciprok die Krümmungshalbmesser der Curve (wenn sie vorher gerade war) proportional.

Dem dritten Differentialcoefficienten sind die Summen der ausserhalb y wirkenden Kräfte, die scheerenden Kräfte bei einem Balken, die Spannungen und die Pressungen der Füllungsglieder proportional.

Dem vierten Differentialcoefficienten sind die concentrirten Lasten, und

dem fünften Differentialcoefficienten endlich die vertheilten

Lasten proportional, welche diese Formänderungen hervorgebracht haben.

Analytisch ist es also leichter, aus den Formänderungen die Momente und scheerenden Kräfte zu bestimmen, als aus den Belastungen, weil man es in jenem Falle nur mit Differentiationen, in diesem mit Integrationen zu thun hat. In der graphischen Statik, welche mittelst des Seilpolygons auf das leichteste integrirt, ist nur das letztere möglich, das erstere dagegen unmöglich, weil die Formänderungen innerhalb der Elasticitätsgrenzen so klein sind, dass sie jeder Construction entgehen, wie wir schon in Nr. 94 S. 278 bemerkt haben.

111. Kräfteplan eines Fachwerks mit parallelen Streckbäumen.

Taf. 17 haben wir die Constructionen zur Bestimmung der an einem Fachwerk wirkenden Kräfte ausgeführt, indem wir uns die Aufgabe stellten, die an einer Fachwerkbrücke von 50 Meter Weite zwischen den Mittellinien der Pfeilerreactionen, und von 5 Meter Höhe zwischen den Streckbaummitten unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass die Brücke von den Engerth'schen Locomotiven (Taf. 7_1) befahren werde.

Wir haben die Spannweite (Taf. 17_1) in zehn Fächer eingetheilt und auf Grund einer vorläufigen Rechnung angenommen, das Eigengewicht der Brücke auf die Länge eines Fachs betrage 25 Tonnen. Dieses Gewicht dachten wir uns der Einfachheit wegen in den oberen Knotenpunkten concentrirt. Es wird bei solchen Brücken wohl immer gestattet sein, sich nur die Knotenpunkte belastet zu denken, welche die Fahrbahn tragen, also die oberen im vorliegenden Falle: weil das Gewicht der zufälligen Belastung, der Fahrbahn und des halben Fachwerkgewichtes, im Vergleich zum übrigen halben Fachwerkgewicht so gross ist, dass letzteres wohl nie besonders wird ausgeschieden werden müssen. Will man dieser Vertheilung der Lasten dennoch Rechnung tragen, so wird es genügen, die Spannung in den Hängeisen um dieses Gewicht, also um etwa 6—8 Tonnen im vorliegenden Fall, zu vergrössern, indem dann diese Hängeisen im Stande sind, diese Last

unmittelbar auf den Kopf der obern Strebe, d. h. auf die oberen Knotenpunkte zu übertragen.

In demselben Maassstabe der Lasten, welcher der Taf. 7_1 zu Grunde gelegt wurde, von ,003 Mtr. = 10 Tn., haben wir die Eigengewichte (Taf. 17_2) als Kräftepolygon aufgetragen. Diese durch Längen von ,0075 Meter dargestellten gleich grossen Gewichte gleich langer Brückenstücke tragen dieselben Ziffern, wie die zugeordneten Knotenpunkte, die fortlaufend numerirt sind.

Mit einem der Mitte dieses Kräftepolygons gegenüberliegenden Pole, dessen Entfernung gleich der doppelten Höhe des Fachwerkes, also = 10 Meter ist, wurde das aufwärts gekehrte Seilpolygon des Eigengewichts construirt.

Dem in den vorigen Nummern Entwickelten zufolge stellen die Ordinaten dieses Polygons, auf dem Maassstabe der Lasten gemessen, die halbe Kraft dar, mit der die Streckbäume, wenn die Construction nur ihr Eigengewicht trägt, in Anspruch genommen sind. Man erhält daher diese Kraft direct, wenn man sie auf dem halben Maassstabe der Kräfte von ,003 Meter = 20 Tonnen abgreift.

Das Zeichnen so vieler Polygone, als verschiedene Belastungsarten für die ungünstigste Inanspruchnahme der Streben angenommen werden müssen, können wir uns ersparen, weil Taf. 7_1 das Polygon der zufälligen Belastung schon gezeichnet ist, und aus demselben die Lage und Grösse des Mitteldrucks einer beliebigen Zahl aufeinander folgender Räder abgegriffen werden kann. Für einen beliebigen Schnitt, vertical durch die Strebe 7 8 (Taf. 17_1), z. B. für den alle nöthigen Constructionen, die wir hier erklären wollen, ausgezogen sind, werden wir also zuerst die rechtseitige Belastung dem Eigengewicht beifügen und so die grösste Kraft, der die Streben zu widerstehen haben, erhalten; ergänzen wir dann noch die Totalbelastung durch Beifügen der Belastung auf der linken Seite des Schnittes, so erhalten wir auch die Maximal-Inanspruchnahme der Streckbäume.

Um der vordersten Locomotive die für den Zug ungünstigste Stellung zu geben, bemerke man, dass nach Nr. 108, weil $s = \infty$ und $\frac{l}{d} - 1 = 9$ im vorliegenden Fall ist, das erste oder das zweite Rad der Locomotive über den Kopf der Strebe oder des Hängeisens, für die die Kräfte bestimmt werden sollen, hinaus zu

schieben sind: wenn das Gewicht aller folgenden Räder, die auf der Brücke stehen, neun Mal so gross ist, als das der vordersten ein oder zwei vorgeschobenen Räder. Schlägt man auf dem Kräftepolygon von Taf. 7_1 mit dem Zirkel das Gewicht des ersten Rades noch neun Mal um, so gelangt man in die Mitte der Last des zwölften Rades, und schlägt man das Gewicht der zwei ersten Räder noch neun Mal auf demselben um, so gelangt man beinahe bis zum 23. Rad. Wenn also einmal zwölf Räder auf der Brücke stehen, dann ist das vordere Rad, und wenn einmal 23 Räder auf der Brücke stehen, sind die zwei vorderen Räder so über die treffenden Knotenpunkte wegzurollen, dass im ersten Fall das zweite, im letztern dagegen das dritte Rad über dem Knotenpunkt stehe. Nimmt man daher die Distanzen zwischen dem zweiten und zwölften, und dann die zwischen dem dritten und 23. auf der obersten Horizontalen (Taf. 7_1) in Zirkel, so findet man: dass die erste Distanz nur nach dem fünften, die zweite nur nach dem ersten Knotenpunkte auf der Brücke Platz finde. Bei Bestimmung des Druckes in der ersten Strebe sind also zwei Räder über den Knotenpunkt wegzurollen; zur Bestimmung des Druckes in der zweiten, dritten, vierten und fünften Strebe ist ein Rad vorzurollen, und bei Bestimmung des Druckes in der sechsten und siebenten Strebe soll das vorderste Rad des Zuges auf dem Knotenpunkte stehen, wie es Taf. 17_1 durch kleine Striche angedeutet wurde. Die Lage der vordersten Locomotive, wenn ein Rad vorgeschoben ist, ist durch die in der Mitte (Taf. 17_1) skizzirte Locomotive angedeutet. Bei dieser vordersten Lage der Locomotive haben dann noch weitere neun Räder hinter ihr, also 14 Räder im Ganzen, bei einseitiger Belastung auf der Brücke Platz. Ebenfalls durch Abgreifen auf Taf. 7_1 findet man, dass von einem dieser Locomotive entgegen kommenden Zuge zehn Räder Platz hätten. Dieses Verhältniss ist durch die beiden Zahlen $\frac{14}{10}$ unter dem vordersten Locomotivrade angedeutet. Auf die gleiche Weise wurde für die Knotenpunkte 3 bis 9 die ungünstigste Belastungsart bei dem die Stellung des vordersten Locomotivrades bezeichnenden Striche angegeben.

Dem oben Gesagten entsprechend bestimmen wir nun zuerst die Summe P der ausserhalb des Knotenpunktes 7, d. h. der am Balkenstück 8, 9, 10 wirkenden Kräfte, bei einseitiger Belastung

des Balkenstückes 1 ... 7 mit 19 Rädern. Wir denken uns diese zufällige Belastung als erste, und tragen sie daher im Kräftepolygon (Taf. 17_2) rückwärts, links von dem Eigengewicht 1 auf. Die entsprechende Strecke 1 19 wurde auf dem Kräftepolygon (Taf. 7_1) unmittelbar abgegriffen. Der Strahl O 19 (Taf. 17_2) läuft demnach parallel mit der ersten Seilpolygonseite 19 19 (Taf. 17_3), und die Lage dieser ist vollständig dadurch bestimmt, dass ihr Schnitt 19 mit der ersten Polygonseite AC des Eigengewichts auf der Richtung des Mitteldrucks der 19 Räder liegen muss. Wo demnach die auf Taf. 7_1 abgegriffene Entfernung des Mitteldrucks der Räder 1—19 vom zweiten Rad, auf Taf. 17_3 zur Bestimmung des Eckpunktes 19 aufzutragen ist, wurde durch die punktirte Linie e_2 angedeutet. Das Seilpolygon der so durch 19 Räder einseitig belasteten Brücke ist demnach durch den Linienzug 19 19 CB dargestellt. Seine Schlusslinie ist die streckenweise punktirte Linie $B19$, welche auf der Verticalen durch den Knotenpunkt 8 einen Punkt der Momentencurve der einseitigen Belastung abschneidet.

Wird zu dieser Schlusslinie eine Parallele O 19′ durch den Pol des Kräftepolygons (Taf. 17_2) gezogen, so bestimmt sie auf diesem einen Punkt, der die totale Belastung 19....9 in die Reactionen der beiden Widerlager theilt; links liegt die Reaction des Widerlagers A, rechts die des Widerlagers B. Werden von dem letztern einerseits das Eigengewicht der Knotenpunkte 8 und 9 abgezogen, andrerseits die kleine Belastung des Knotenpunktes 8 durch das vorderste Locomotivrad, welche durch eine etwas stärker ausgezogene Linie unter 19′ dargestellt ist, so bleibt die Summe P_{19} der ausserhalb des Schnittes 7 8 wirkenden Kräfte. Die Belastung des Knotenpunktes 8 durch das vordere Locomotivrad wurde in dem Fache 8 9 construirt und bleibt natürlich constant für alle Fälle, in denen ein Rad vorgeschoben wird. Die Linien, welche vom Knotenpunkt 8 aus die über dem Knotenpunkte 9 aufgetragene Radbelastung 13 Tn. projiciren, schneiden auf der Verticalen durch das Rad die Belastung des Knotenpunktes 9 ab, weil diese sich zum Radgewicht wie die Entfernung vom gegenüberliegenden Knotenpunkt 8 zur Totallänge des Faches verhält. Die so construirte Länge ist constant für die Schlusslinien 14′, 15′, 19′, 20′. Die von den zwei über den Knotenpunkt 9 vorgerollten Rädern

herrührende Belastung des Widerlagers 10 wurde im Fache 9 10 construirt und bei 24′ in Abzug gebracht.

Werden durch die Endpunkte von P_{19} eine fein punktirte Parallele zur Richtung der Streckbäume, und eine andere Doppelparallele zur Strebe gezogen, so stellt laut voriger Nummer die Länge der letztern den Druck in der Strebe 7 8 bei der einseitigen Belastung durch 19 Räder, also den Maximaldruck dar. Da vorausgesetzt wurde, dass die Belastung in den oberen Knotenpunkten aufgebracht werde, so stellt P_{19} den Druck in dem auf die Strebe folgenden Hängeisen, also im Hängeisen 8 dar.

Die eben erläuterten Constructionen wurden fortgesetzt, bis die in den Streben und Hängeisen wirkenden Kräfte negativ wurden, was, wie die Figur zeigt, für die Strebe 3 4 stattfindet. In diesem Fache also sind keine gegen das Widerlager B abfallende Streben mehr nothwendig. Die Gegenstreben dürfen daher auf die beiden mittelsten Fächer beschränkt werden.

Zur Bestimmung des Maximaldruckes im obern Druckbaume 7 8 und der gleich grossen Maximalspannung im untern Streckbaume 8 9, die wir laut dem oben Entwickelten als Ordinaten der Seilpolygone auf der Verticalen des Hängeisens 8 ablesen können, ergänzen wir die Belastung der Brücke, indem wir die fünf Räder, die vor dem schon darauf stehenden Zuge von 19 Rädern noch auf ihr Platz finden, so aufstellen, dass die Kamine der vordersten Locomotiven beider Züge über 5 19 zusammenstossen: und construiren das Seilpolygon der Totalbelastung, indem wir den Mitteldruck dieser fünf Ergänzungsräder gerade so zwischen C_1 und B einschalten, wie wir früher den der schon vorhandenen 19 Räder zwischen C und A eingeschaltet haben. Im Kräftepolygon (Taf. 17_2) tragen wir das auf Taf. 7_1 abgegriffene Gewicht der fünf Räder nach 9 rechts als Strecke 9 5 auf; mit dem Strahle O 5 (Taf. 17_2) läuft dann die Polygonseite 5 5 (Taf. 17_3) parallel und ihr Schnitt 5 mit der letzten Polygonseite BC_1 des Eigengewichts liegt auf der Linie des Mitteldrucks der fünf Räder; die Entfernung dieses Mitteldrucks von der Verticalen 7 ist gleich der Entfernung e des Mitteldrucks, vom Anfang des Zuges + der Entfernung e'' dieses Anfangs vom zweiten Rad des Zuges, wie es für den fraglichen Punkt 5 durch zwei punktirte Strecken angedeutet ist. Die letzte Strecke e'' ist natürlich constant für alle nach C_1 einzuschaltenden Lasten,

und wird auf Taf. 7_1 für alle durch eine in der gehörigen Distanz gezogene Parallele zum Kräftepolygon addirt. Das Polygon der Totalbelastung ist also durch den Linienzug 19 19 *C C*, 5 5 dargestellt; seine Schlusslinie ist 5 19 und sie schneidet auf der Verticalen 8 das Moment der ausserhalb des durch den untern Knotenpunkt derselben und durch die Mitte des Druckbaums 7 8 geführten Schnittes wirkenden Kräfte ab. Das Moment bleibt dasselbe für einen Schnitt durch den obern Knotenpunkt, und durch die Mitte des Streckbaums 8 9. Es bestimmt daher gleichzeitig den Druck im Druckbaum 7 8 und die Spannung im Streckbaum 8 9. Da die Poldistanz (Taf. 17_2) gleich 10 Meter gleich der doppelten Höhe des Fachwerks ist, so ist das Moment getheilt durch die einfache Höhe des Fachwerks, gleich der doppelten, durch die Ordinaten des Seilpolygons dargestellten Kraft. Oder mit andern Worten: diese Ordinaten sind, auf dem Maassstabe der Kräfte gemessen, die halbe in den Streckbäumen wirkende Kraft. In Taf. 17_4 wurden diese Kräfte der Uebersichtlichkeit wegen besonders aufgetragen. Diese Form eignet sich auch besser als Taf. 17_3, um zur Bestimmung der Plattenzahl bei Streckbäumen, die aus solchen zusammengesetzt sind, mit den Staffeln umhüllt zu werden, welche die Widerstandskraft der einzelnen Blechtafeln darstellen.

In derselben Figur wurden auch die Spannungen der Hängeisen aufgetragen; diese Spannungen sind nichts anderes, als die verticalen Seitenkräfte der vorausgehenden Streben, also das *P*, das zur Construction derselben diente. P_{19} ist also die Spannung in dem Hängeisen 8. Alle Punkte, deren Ordinaten in den einzelnen Hängeisen $= P$ sind, wurden durch eine Curve verbunden und diese mit „Spanncurve der Hängeisen“ bezeichnet.

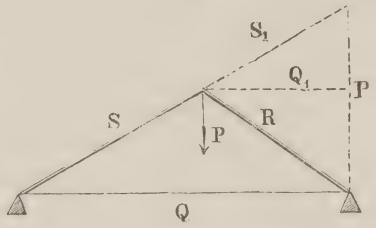
Wir hätten nun alle an den einzelnen Theilen eines Fachwerks wirkenden Kräfte bei ungünstigster Belastung durch einen Engerth'schen Locomotivenzug bestimmt und übersichtlich dargestellt. Auf diese Darstellung bezieht sich auch das früher (Nr. 82 S. 235) bezüglich des Blechbalkens Gesagte. Alle Constructionen zur Bestimmung der äusseren, an einem Bleckbalken wirkenden Kräfte sind identisch dieselben, wie die so eben erläuterten, und nur insofern vielleicht einfacher, als keine Knotenpunkte in denselben vorkommen, und daher auch von einem Vorrollen der Räder über dieselben und von den hierauf sich beziehenden Correctionen keine Rede sein kann.

Betrachtet man (Taf. 17_4) die Spannungen in den Streckbäumen als Darstellung der Momente, und die Spannungen in den Hängeisen als Summen der ausserhalb eines Schnittes wirkenden Kräfte, als scheerende Kräfte, wie wir sie beim Balken genannt haben: so können mittelst dieser äussern Kräfte alle im Innern wirkenden Kräfte gerade so für den auf beiden Seiten aufliegenden Balken bestimmt werden, wie es Taf. 10 für den auf einer Seite eingemauerten geschehen ist.

112. Kräftepläne einfacher Hängwerke.

Aeusserst einfach sind die Constructionen der Kräfte, welche an dem nur aus zwei Streben und einem untern Streckbaum bestehenden Hängwerk (Fig. 162) wirken. Die in den Streben wirkenden Kräfte $R\,S$ sind, wenn diese mit P an ihrem Kopfe belastet sind, den Seiten des Dreiecks $P\,R\,S_1$ proportional, was wohl keiner nähern Erläuterung bedarf. Sollte die Verticale P nicht gerade der Belastung der Streben entsprechen, so kann man diese Verticale zwischen den Streben verrücken, bis ihre Länge gleich P wird. Ebenso versteht es sich von selbst, dass die Parallele Q_1 zum Streckbaume die Spannung in diesem darstellt, und dass endlich diese Parallele die Belastung P in die Reactionen der beiden Widerlager theilt.

Fig. 162.



Aehnliche vereinfachende Beziehungen zwischen den Figuren der Construction und dem dazu gehörigen Kräftepolygon, finden auch noch dann statt, wenn das Hängwerk aus drei Fächern besteht, wie wir es Taf. 18_2 gezeichnet haben. Es ist klar, dass im mittleren Fache Strebe und Gegenstrebe vorhanden sein muss, weil bei einseitiger Belastung durch die beiden Streckbäume allein die ausserhalb eines Schnittes durch die Mitte wirkende Mittelkraft nicht aufgehoben werden kann, indem sich die Streckbäume im Unendlichen und im Allgemeinen nicht auf dieser Kraft schneiden. Die Streben im Mittelfach werden nur dann nichts zu tragen haben, wenn die Belastung des Fachwerks, die wir uns durch die Häng-

eisen aufgebracht denken, der Art ist, dass ihr Mitteldruck durch den Schnitt C der beiden Aussenstreben (Taf. 18_2) geht. Betrachtet man in diesem Falle $A\,1\,2\,B$ als Seilpolygon, so kann man $C\,B\,D$ als Kräftepolygon betrachten, und erhält die an den einzelnen Constructionen wirkenden Kräfte gerade so, wie in Fig. 162. Die so erhaltenen Kräfte sind Maxima für die äussersten Streben, und Streckbäume, wenn Maximalbelastungen für 1 und 2 angenommen wurden.

Bei Bestimmung des Drucks in einer Mittelstrebe bei einseitiger Belastung von 1 z. B. kann man den Theil dieser Last, welcher mit der Last 2 eine Mittelkraft hat, welche durch C geht, ganz ausser Acht lassen, denn dieser Theil der Belastung beider Hängeisen hat offenbar gar keinen Einfluss auf den Druck in der Mittelstrebe. Wird nun der übrig bleibende Theil der Last 1 durch $B\,D$ dargestellt, so stellt die Länge der Strebe 1 2, selbst den Druck in ihr dar. Denn denkt man sich den Zug $A\,1\,B$ als das Seilpolygon, dann kann man 1) $B\,H\,D$ als Kräftepolygon betrachten, weil seine äussersten Strahlen mit den Seilpolygonseiten selbst zusammenfallen, und der Mittelstrahl mit der Schlusslinie $A\,B$ parallel läuft. Für einen durch die Mitte der Construction geführten Schnitt ist $B\,H$ die Summe der ausserhalb rechts wirkenden Kräfte, also $H\,1\,2, B$ das Fig. 149 S. 364 analoge Kräftepolygon und 1 2, der Druck in der Strebe.

Ist $B\,D$ nicht gerade gleich der einseitigen Belastung von 1, welche den Druck in der Strebe hervorbringt, sondern wäre derselbe nur gleich P z. B., so würde eine durch den Endpunkt von P zu $A\,D$ geführte Parallele auf der Linie $1\,B$ den Kopf der Strebe S abschneiden. Dieser entspricht dem Punkte 1 in der Figur, welche vom Aehnlichkeitscentrum B aus das Hängwerk im Verhältniss $\frac{P}{A\,D}$ reducirt. Die Länge S ist demnach der Druck in dieser Strebe.

Das so eben beschriebene Verfahren zur Bestimmung der am Hängwerk wirkenden Kräfte ist das einfachste und zweckmässigste, wenn das Hängwerk symmetrisch construirt ist. Dann genügt die gleichförmige Belastung, also das Eigengewicht der Brücke, der oben gestellten Bedingung für das Nichtbelastetsein einer Mittelstrebe, und das P, das die Belastung derselben erzeugt, ist einfach die zufällige Belastung der halben Brücke.

Hängwerke mit mehr als drei Fächern betrachten wir nicht mehr als einfache, sondern als regelmässige Fachwerke. Die meisten der nach Palladio ausgeführten Hängwerke würde man wie das Fachwerk Taf. 17 behandeln. Ebenso auch unsymmetrische Hängwerke.

Drittes Kapitel.

Pauli'sche Brücken.

---

113. Die Form des Pauli'schen Trägers.

Da nie etwas Ausführlicheres über den Pauli'schen Träger veröffentlicht worden ist, und Diejenigen, die ihn beurtheilt haben, sich nie die Mühe gegeben haben, den Motiven nachzuforschen, denen eine solche Form entsprungen sein konnte: so möge man uns gestatten, das Wenige, das uns von demselben bekannt ist, der graphischen Behandlung der an ihm wirkenden Kräfte vorauszuschicken. Es gehört dies eigentlich nicht in die Statik, sondern in die Anwendung derselben auf den Brückenbau, dessen vorzüglichste Constructionssysteme hier geradezu als bekannt vorausgesetzt wurden.

Aeusserungen aber, wie die der Herren Molinos und Pronnier in ihrem Traité de la construction des ponts métalliques, Paris 1857, S. 108: „Wir müssen gestehen, dass kein der rationellen Verwendung des Metalls entsprechender Grund eine solche Anordnung rechtfertigen kann, denn bei zwei Oeffnungen kann ein continuirlicher Balken mehr Vortheile bieten", bezüglich der Saltash-Brücke, die nach demselben System gebaut ist; Annahmen, wie die des Ingenieurs, der die schöne Brahe-Brücke bei Czersk beschrieb (Erbkam's Zeitschrift 1861, S. 584) und nicht den geringsten Unterschied zwischen dem Parabelträger und dem Pauli'schen macht; endlich die Bemühungen hannoverischer Ingenieure, in Zeitschriften, in Zeitungen Herrn Laves als d e n hinzustellen, der dieses

Brückensystem ersonnen, zeigen: dass dieses System nicht bekannt ist.

Wir hoffen daher, man werde uns hier einige Seiten Brückenbau nicht verargen und wollen, so gut wie wir es können, erklären, was mit diesem Träger beabsichtigt wird und dann zum Vergleich untersuchen, wie und ob der Laves'sche Balken diesen Zwecken entspricht.

Herr v. Pauli war zur Zeit, als er seine Brücken entwarf, von der Idee beherrscht, es seien vorzugsweise die Erschütterungen, welche die über Brücken fahrenden Züge verursachen, namentlich bei eisernen Brücken schuld an der Zerstörung derselben, die früher eintreten werde, als man es sich im Allgemeinen denkt; denn manche eiserne Brücke war in England schon baufällig geworden, und viele amerikanische Ingenieure gaben ganz unverholen hölzernen Brücken den Vorzug vor eisernen, weil ihre Dauer den Erwartungen nicht entspreche, sie dann plötzlich, ohne Andeutung der Katastrophe durch Baufälligkeit, einbrechen und beinahe immer ein mehr oder weniger grosses Unglück dabei verursachen.

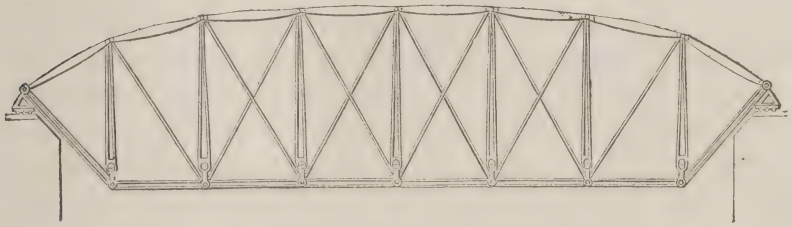
Die Erschütterungen, die nicht allein den Oberbau, sondern nach und nach auch die Widerlager zerstören, glaubte Herr v. Pauli wenn nicht ganz aufzuheben, doch bedeutend zu vermindern, indem er seine Träger in der neutralen Axe aufhing und diese geradlinig bildete.

Ein über ein Fachwerk mit parallelen Streckbäumen, das auf dem untern derselben aufliegt, wegfahrender Zug wird den Streckbaum dehnen; diese Dehnung wird mehr oder weniger stossweise vor sich gehen und sich nicht auf einige Fächer, sondern über alle Fächer der Brücke erstrecken. Sie ist nicht unbedeutend; wird unter der Totalbelastung das Eisen bis zur Hälfte des Tragmoduls in Anspruch genommen, so beträgt die Ausdehnung $\frac{1}{2 \cdot 1300}$, also ,02 Mtr. bei einer Brücke von 52 Mtr. Spannweite. Um ebenso viel wird der Druckbaum zusammengepresst werden. Die äussersten Fächer werden daher alle um ,01 Mtr. verschoben und der Streckbaum muss an dem einen Ende um ,02 Mtr. über das Widerlager gleiten. Diese Bewegungen gehen mehr oder weniger stossweise vor sich und sind daher immer schädlich, selbst wenn vorausgesetzt wird, dass die einzelnen Fächer die Formänderung von ,01 Mtr. erleiden können und der Rollapparat auf dem Widerlager mög-

lichst sanft arbeite. Bei einem einfachen parabolischen Träger mit horizontalem Streckbaum (einem Hängewerk) geht die neutrale Axe auch durch die Stützpunkte, weil sie sich dort mit den beiden Streckbäumen vereinigt; allein ein Ausweichen der Stützpunkte findet dennoch statt, weil die neutrale Axe nicht geradlinig, sondern nach oben gekrümmt ist. Bei einer Belastung der Brücke muss der Scheitel sich erniedrigen; da aber die neutrale Axe ihre Länge nicht ändert, so kann jener nur dann heruntergehen, wenn die Stützpunkte ausweichen, was in der That stattfindet, weil der Streckbaum sich ausdehnt. Damit also das mehr oder weniger stossweise vor sich gehende Ausweichen der Stützpunkte, dieses verderbliche Rütteln an den Widerlagern, das seine bösen Rückwirkungen auf die Construction selbst ausübt, nicht mehr stattfinde: müssen, wie wir oben sagten, die Stützpunkte in der neutralen Axe liegen und diese geradlinig sein.

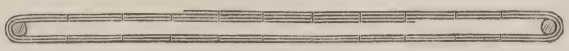
Dieser Bedingung entsprachen die ersten, 1853 versuchsweise ausgeführten Träger der Eisenbahnbrücke bei Günzburg (Fig. 163).

Fig. 163.



Innerhalb der äussersten Pfosten ist der Streckbaum geradlinig und veränderlichen Querschnitts, der Druckbaum gebogen und constanten Querschnitts. Man konnte demnach über den Querschnitt des untern Streckbaums und über die Höhe gebieten, um die neutrale Axe in die gerade Linie zu bringen, welche die Stützpunkte verbindet, und um der Construction die nothwendige Höhe zu geben, damit sie dem Moment der ausserhalb eines jeden Faches wirkenden Kräfte widerstehen könne. Ganz nebenbei wollen wir nur bemerken, dass die untern Streckbäume aus Ketten von Bandeisen bestanden. In der Fig. 164 angegebe-

Fig. 164.



nen Weise wurde ein Band so lange um die beiden Endbolzen geschlungen, bis der berechnete Querschnitt dargestellt war; man konnte so Querschnittsflächendifferenzen, die nicht grösser als der doppelte Querschnitt des Bandes waren, ab- und zugeben. Die sämmtlichen Bänder wurden durch kleine Nieten zu einem Ganzen verbunden.

Bei einer Belastung dieser Brücke summiren sich noch die Dehnungen und Verkürzungen bei den äussersten Pfosten, welche sich oben gegen die Mitte neigen und eine etwas schiefe Stellung einnehmen werden. Dadurch ändert sich die Form der Fächer, die Diagonalen verkürzen und verlängern sich um viel mehr, als sie es in Folge der an ihnen wirkenden Kräfte thun sollten; endlich können auch die Verbindungen bei den Knotenpunkten in Folge der dortigen Winkeländerungen noch leiden. Um diese Formänderungen etwas zu vermindern, gab in der Folge Herr v. Pauli seinen Streckbäumen eine Bogenform, alle scharfen Ecken vermeidend. Um sie ganz zu vermeiden, müsste man eine besondere Curve berechnen, die von der, welche die Momente verlangen, verschieden wäre, allein gesetzt, man habe es gethan, so wäre der Vorgang bei der Senkung von Lasten, die über die Brücke weggehen, der folgende: Die Richtung des Druckbogens nähert sich innerhalb eines jeden Faches um so viel der Horizontalen, dass die entsprechende geometrische Verkürzung gleich der Verkürzung ist, die dasselbe Bogenstück durch die Belastung erleidet, es bewegen sich also alle Punkte des Bogens in einer Verticalen abwärts. Dasselbe findet auch, aber in umgekehrter Weise, mit dem Spannbogen statt, seine einzelnen Strecken entfernen sich von der Horizontalen um so viel, dass die daraus folgende Streckung der Dehnung entspricht, welche dieselben Theile des Streckbaums durch die Belastung erleiden. Es würden sich also bei einem solchen Balken alle Punkte der Streckbäume, der Diagonalbänder und der Pfosten nur in Verticallinien abwärts bewegen und die Verschiebungen der einzelnen Fächer würden nur im verticalen Sinne stattfinden und in diesem so gross sein, als es die Dehnung des Diagonalbandes und die Verkürzung des Pfostens im treffenden Fach erlauben; während im gewöhnlichen Fachwerk die Verschiebung im verticalen Sinn die gleiche ist, im horizontalen Sinn aber gleich der Summe der Ausdehnung und Verkürzung der Streckbäume zwischen dem Fach und der Mitte ist. Die hier angestrebte

Vollkommenheit lässt sich nun kaum erreichen, denn die Streckbäume müssten praktisch unzulässige Ecken in der Mitte erhalten.

Durch die Bogenform der Streckbäume wird erreicht, dass es jetzt etwa in dem Viertel der Oeffnungen zwei Fächer giebt, in welchen die Neigungen der Streckbäume gegen die Horizontale so gross sind, dass die bei einer Senkung stattfindenden geometrischen Verkürzungen und Dehnungen so gross als die von den Spannungen und Pressungen herrührenden sind. Dann wird es also in den Vierteln und in der Mitte der Brücke Fächer geben, bei welchen keine Verschiebungen stattfinden, und bei Vermeidung aller Ecken in der Form des Bogens werden die etwa in der Mitte dieser Viertel, also in den ungeraden Achteln der Brücke liegenden Fächer die grösste Verschiebung zeigen. Während also bei gewöhnlichen Fachwerken im äussersten Fach die Verschiebung gleich der Längenänderung des halben Streckbaums ist, wird sie bei der vorliegenden Form nur etwa der des Achtels des Streckbaums, also etwa viermal so klein sein.

Ferner glaubte Herr v. Pauli, dass auch der veränderliche Querschnitt des untern Streckbaums nicht zweckmässig sei, weil dieser an manchen Stellen stärker sein muss, als es die Festigkeit verlangt und demnach Materialvergeudung stattfindet. Auch sind Streckbäume constanten Querschnitts überhaupt aus Gründen, auf die wir sogleich zurückkommen werden, zweckmässiger als solche veränderlichen Querschnitts. Soll aber der Querschnitt des untern Streckbaums ebenso wie der des obern constant sein und die neutrale Axe eines jeden Schnittes mit der Horizontalen durch die Stützpunkte zusammenfallen, so müssen bei verschiedenem Material der Streckbäume die Entfernungen ihrer Querschnittsschwerpunkte sich wie die Quotienten der $\frac{\text{Trag-}}{\text{Elasticitäts-}}$ Module der Materialien verhalten; werden aber die beiden Streckbäume aus gleichem Material hergestellt, so müssen bei constantem Querschnitt die Streckbäume bezüglich der Horizontalen vollkommen symmetrisch gebildet sein.

Der Gründe aber, welche einen constanten Querschnitt verlangen, giebt es einen theoretischen und einen constructiven. Der theoretische Grund ist der, dass bei Voraussetzung einer constanten Spannung oder Pressung in den Streckbäumen, die sich übrigens nicht vollständig erreichen lässt, keine Spannungsdifferenzen

durch die Füllungsglieder zu übertragen wären; entspricht daher die Höhe des Trägers in jedem Querschnitt dem Moment einer totalen Maximalbelastung, so haben bei dieser Totalbelastung und bei unbelastetem Träger dessen Füllungsglieder weiter nichts als die Belastungen der Fahrbahn auf die Ecken der Streckbäume zu übertragen, und sie treten erst bei einseitiger Belastung in kräftige Function. Es darf daher angenommen werden, dass in diesem Falle das Material, das die Füllungsglieder erheischen, ein Minimum sei. Der constructive Grund aber ist der, dass es nicht möglich ist, den Querschnitt irgend eines Constructionstheiles den an ihm wirkenden Kräften genau anzupassen, wenn diese veränderlich sind. Wird z. B. die Curve, welche auf der Längenaxe desselben die den Kräften proportionalen Querschnitte darstellt, mit den Staffeln umhüllt, welche der Widerstandsfähigkeit der einzelnen Blechplatten proportional sind, aus welchen der Constructionstheil zusammengesetzt ist: so ist es klar, dass all das Material verloren ist, das dem über die Kräftecurve hinausfallenden Theil der Staffeln entspricht. Dieser Verlust aber kommt bei constantem Querschnitt nicht vor.

Das bisher Gesagte, die Form des Pauli'schen Trägers Betreffende können wir wie folgt zusammenfassen:

1) Durch das Aufhängen des Balkens in der neutralen horizontalen Axe werden die Erschütterungen, die dadurch entstehen, dass in Folge der über die Brücke gehenden Lasten diese ihre Länge ändert, aufgehoben.

2) Die geradlinige und horizontale Lage der neutralen Axe wird dadurch bewirkt, dass die Entfernungen der Streckbäume über und unter der Horizontalen durch die Stützpunkte den Tragmodulen, getheilt durch die Elasticitätscoefficienten des Materials jener, proportional gemacht werden. Bei gleichem Material derselben ist der Balken ganz symmetrisch gebaut.

3) Die Höhe des Balkens wird in jedem Querschnitt dem Moment der bei der totalen Maximalbelastung ausserhalb desselben wirkenden Kräfte proportional gemacht, dadurch wird erreicht:

a) Ein constanter Querschnitt der Streckbäume.

b) Ein Minimum des Materials für die Füllungsglieder.

c) Ein Minimum der Verschiebung der einzelnen Fächer, aus denen der Balken besteht, vorausgesetzt, dass der Bedingung 2 schon genügt sei.

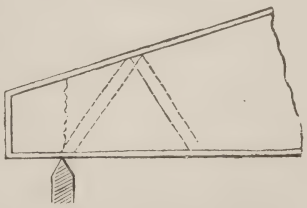
114. Die Festigkeit und Construction des Pauli'schen Trägers.

Allein wozu alle diese Umstände, höre ich den alten Praktiker fragen, was schaden denn diese Erschütterungen und Verschiebungen? Haben doch die letzten Versuche der Physiker gezeigt, dass es nicht die Erschütterungen sind, die das Eisen krystallinisch machen; wer weiss, ob sie nicht nützlich sind?

Herr v. Pauli glaubt, dass die Vermeidung aller Erschütterungen, eine richtige Construction der Brücke und eine sorgfältige Auswahl des Materials ihn berechtige, den Tragmodul anzuwenden, den die directen Prüfungen des Materials ergeben.

Im Fachwerk sind alle Knotenpunkte auf das Pünktlichste centrirt, indem bei jedem derselben die Mitten der Streckbäume des Pfostens und der Diagonalbänder sich in einem Punkt schneiden. Aengstlich, darf man beinahe sagen, wurde dies bei den äussersten Knotenpunkten über den Widerlagern beobachtet; genau unter dem Schnitt der beiden Streckbäume ruht der Träger auf einem Stahlkorn, sodass die Mittelreaction des Widerlagers genau durch diesen Schnitt gehen muss. Zwar verstehen alte Praktiker die Nothwendigkeit dieses Centrirens nicht, meinen, der spitze Schnabel müsse abbrechen und enden ihre Brückenträger so, wie Fig. 165 es zeigt, ohne zu bedenken: dass die Richtung der Mittelkraft der Widerlagerreactionen nicht durch den äussersten Pfosten geht, dass Scheerkräfte, von denen sie sich am allerwenigsten Rechenschaft zu geben im Stande sind, an der angedeuteten Stelle entstehen, wenn der Träger ein Blechbalken ist, und dass in der punktirten Lage eine Strebe nothwendig sei, die beinahe so stark als der Streckbaum gemacht werden muss,

Fig. 165.



wenn der Träger ein Fachwerk ist. Endlich versteht es sich von selbst, dass allen Theilen des Pauli'schen Trägers die ihrer Wirkung entsprechendste Form gegeben werde. Die Druckbogen und Pfosten, die rückwirkend in Anspruch genommen sind, erhalten gespreitzte Querschnitte, die Spannbogen und Diagonalbänder, die absolut zu widerstehen haben, einen flachen Querschnitt u. s. w.

Bezüglich der Widerstandsfähigkeit eines beliebigen Constructionstheils ist zu bemerken, dass diese immer durch den schwächsten Querschnitt desselben bestimmt wird. Schneidet man ein Seil halb durch, so wird seine Widerstandsfähigkeit dadurch auf die Hälfte reducirt, und durch beliebiges Verstärken aller andern Stellen lässt sich die verlorene Tragkraft nicht wieder herstellen. Nun giebt es aber in vielen Eisenstäben schwache schadhafte Stellen und das Verhältniss des Tragmoduls zu dem in der Praxis üblichen Festigkeitscoefficienten ist ein Mittel des Widerstandsverhältnisses eines vollen unbeschädigten Querschnitts zu dem am stärksten beschädigten Querschnitt, der durchschnittlich nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit in Bauwerken mittlerer Grösse vorkommen kann. Je höher also in einem Lande die Eisenfabrikation steht, je geringer die Zahl schwacher schadhafter Stäbe ist, die wahrscheinlich unter einem gelieferten Quantum sich befindet, desto grösser ist der Festigkeitscoefficient, den man im Lande anwendet. Die Engländer also belasten mit $7^1/_2$, die Franzosen nur mit 6 Kilogr. pro □Mmtr. Nun sagte sich Herr v. Pauli, wenn ich alle schlechten schadhaften Stäbe ausscheide, so muss ich bei meiner Brücke den Tragmodul von 16 Kilogr. anwenden können, ohne dass deshalb meine Brücke schwächer wäre als eine andere Brücke, bei der man zwar nur mit 6 Kilogr. gerechnet hat, in der aber vielleicht ein einziger Querschnitt vorkommt, von dem nur $^6/_{16}$ unversehrt sind. Es werden also alle Eisentheile, welche in einer Pauli'schen Brücke zur Verwendung kommen sollen, vorher geprüft und mit dem Maximalgewicht belastet, das sie in der Construction tragen sollen; mittelst eines Fühlhebelapparats wird die dabei stattfindende Längenänderung gemessen, und ist diese grösser, als die Rechnung es giebt, so wird das Eisenstück verworfen, weil man eine schadhafte Stelle in demselben vermuthet. Es wird aber auch verworfen, wenn sie viel kleiner ist, denn dann schliesst man auf eine krystallinisch spröde Textur desselben.

Giebt man aber dem Eisentheil nur den unumgänglich noth-

wendigen Querschnitt, so muss auch alles Mögliche für die dauernde Erhaltung desselben gethan werden; damit also der Stab durch den Rost nicht verschwächt werde, wird er vor der Verwendung auf das Sorgfältigste von allen Rosttheilen befreit, dann in Leinöl gesotten; dieses siedet erst bei 315°, mithin darf darauf gerechnet werden, dass durch dieses Sieden alle Feuchtigkeit, die am Stab noch haften konnte, vertrieben und er mit einer dünnen Fettschicht überzogen sei. Der spätere Anstrich schützt daher möglichst gegen den Rost.

Auf den Grund der eben jetzt beschriebenen Sorgfalt in der Construction der Brücke und in der Auswahl und Behandlung des Materials wird der Festigkeitscoefficient wie folgt berechnet: Ein über die Brücke wegfahrender Zug verursacht eine grössere Spannung, als wenn derselbe ruhig, sanft auf die Brücke gebracht würde. Soll demnach die Maximalspannung in den einzelnen Theilen des Trägers den Tragmodul nie überschreiten, so darf dieselbe durch die einfache statische Belastung eines Zuges noch nicht hervorgebracht werden. Nimmt man an, der Zug würde plötzlich mit der Geschwindigkeit ∞ auf die Brücke gebracht, ehe diese sich unter seiner Last senken konnte, und sie werde dann erst seiner Wirkung überlassen, so würde die Einsenkung, mithin auch die Inanspruchnahme des Materials doppelt so gross als unter der einfachen statischen Belastung sein. Dieses rein theoretische Verhältniss, zu dem man durch die Annahme gelangt, es sei die Einsenkung der Brücke wie bei der elastischen Linie der Last, welche sie hervorbringt, proportional, wurde mit merkwürdiger Uebereinstimmung von Barlow bestätigt, der die Einsenkungen unter schnell und langsam fahrenden Zügen maass und erstere immer doppelt so gross als letztere fand. Ein schnell fahrender Zug verursacht demnach in den einzelnen Brückentheilen Spannungen, wie sie die statische Belastung mit dem Eigengewicht und dem doppelten Zug hervorbringt. Würde man jedoch die Dimensionen nur so stark greifen, dass das Eigengewicht mit der doppelten zufälligen Belastung eine Spannung von 16 Kilogr. hervorbringt, so würde diese eintreten, so oft ein Zug ruhig und schnell über die Brücke wegfährt, und sie würde bei der geringsten Unebenheit des Geleises, bei dem geringsten vorkommenden Stoss überschritten werden. Um auch dem noch Rechnung zu tragen: werden die Dimensionen der Brücke so bestimmt, dass die statische

Belastung derselben mit dem Eigengewicht und mit der dreifachen zufälligen Maximalbelastung eine Spannung von 16 Kilogr. pro □Mmtr. hervorbringe.

Bei diesem Verfahren ist also der Festigkeitscoefficient, der angewendet wird, nicht constant, sondern veränderlich; er ist gross, wenn die zufällige Belastung klein ist, und umgekehrt. Kleinere zufällige Belastungen geben daher leichtere, grössere aber schwerere Brücken.

Das Verhältniss der zufälligen Belastung zum Eigengewicht braucht übrigens nur bei Bestimmung der Dimensionen der Streckbäume berücksichtigt zu werden, denn die Diagonalbänder sind durch das Eigengewicht nur sehr wenig in Anspruch genommen, und für sie kommt daher unabänderlich der Festigkeitscoefficient $\frac{16}{3}$ $= 5^1/_3$ Kilogr. zur Anwendung.

Diese Festigkeitscoefficienten beziehen sich natürlich auf Eisen, allein es ist durchaus nicht nothwendig, die Anwendung des Pauli'schen Princips auf dieses Material zu beschränken, ja man kann die beiden Streckbäume aus verschiedenem Material herstellen, z. B. den obern rückwirkend angegriffenen Streckbaum aus Gusseisen, den untern absolut angegriffenen aus Schmiedeeisen etc. Bezeichnen dann ϱ ϱ_1 und ε ε_1 die Trag- und Elasticitätsmodule der bei jedem der beiden Streckbäume in Anwendung zu bringenden Materialien, so werden sich die Ausdehnungen und Zusammenpressungen derselben wegen ihrer constanten Querschnittsflächen wie $\frac{\varrho}{\varepsilon}$ zu $\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}$ verhalten. In demselben Verhältniss theilt aber auch die neutrale Axe jede Höhe der Brücke, es muss also, wenn h die Höhe des Trägers in irgend einem Schnitt bezeichnet, diese durch die Horizontallinie der Stützpunkte in die Segmente $\frac{\frac{\varrho}{\varepsilon}}{\frac{\varrho}{\varepsilon}+\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}} h$ und $\frac{\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}}{\frac{\varrho}{\varepsilon}+\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}} h$ getheilt werden. Es versteht sich von selbst, dass diese Höhen senkrecht auf die Streckbäume, nicht vertical zu messen sind.

Ist $\frac{\varrho}{\varepsilon} = \frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}$, so sind die Streckbäume bezüglich der Hori-

zontallinie symmetrisch, und dies ist gewöhnlich der Fall bei den Pauli'schen Brücken.

Schliesslich bemerken wir noch, dass zwar das in dieser Nummer Behandelte nicht an der Form des Pauli'schen Trägers haftet, und dass es möglich ist, die Eisen, die zum Bau jeder beliebigen Brücke dienen sollen, vorher zu sichten, zu prüfen und in Leinöl zu sieden, jedenfalls aber ist Herr v. Pauli der erste, der es gewagt hat, diese sorgfältigere Behandlung des zu verwendenden Materials zu verwerthen und ihr eine praktische Folge zu geben, indem er so viel weniger Material verwendet, dass dadurch der grössere Arbeitsaufwand mehr als reichlich compensirt wird.

Eine einzelne Verbesserung, die zweckmässigere Form z. B. ohne sorgfältigere Materialauswahl und umgekehrt, berechtigen gewiss nicht zu einer so bedeutenden Erhöhung des Festigkeitscoefficienten. Wer würde es z. B. wagen, eine schlechte Gitterbrücke, in der der constructive Unterschied zwischen den rückwirkend und absolut belasteten Theilen ignorirt wird, ebenso leicht als eine Pauli'sche Brücke zu bauen. Will man daher seinen Kopf nicht anstrengen und bei fehlerhaften hergebrachten Formen stehen bleiben, so muss man hören, was der alte Praktiker zu jeder Masche herausschreit: „wenn ich genug Eisen nehme, so hält es doch", und auch Eisen genug vernieten.

Man kann demnach die vollendete Form und die sorgfältige Behandlung des Materials füglich nicht von einander trennen, und man kann beides vielleicht wie folgt zusammenfassen.

Das Pauli'sche System bezweckt

durch die zweckmässigste Form, welche alle Erschütterungen und Oscillationen an der Brücke möglichst vermeidet;

durch vollendete Ausführung der einzelnen Theile, in Folge deren man überzeugt sein kann, dass kein Theil stärker als berechnet in Anspruch genommen sei, und endlich

durch sorgfältige Behandlung und Prüfung des zu verwendenden Materials:

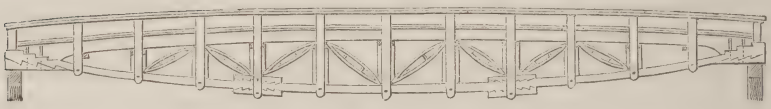
den Materialaufwand und die Kosten der Träger auf ein Minimum zu reduciren.

115. Das Laves'sche System.

Untersuchen wir nun, wie der Laves'sche Balken den oben ausgesprochenen Bedingungen entspricht. Wir kennen denselben aus Förster's Bauzeitung, Jahrgang 1840, Bl. CCCXXXVIII, und entnehmen diesem Blatte die Figuren Nr. 25 und 27, die wir in Fig. 166 und Fig. 167 wiedergeben.

Fig. 166.

Fig. 167.



Wir fragen nun zuerst: wurde bei Construction des Laves'schen Trägers daran gedacht, ihn in der neutralen Axe aufzuhängen und diese geradlinig zu bilden, um die Oscillationen und schädlichen Erschütterungen bei dem Befahren durch Züge zu vermeiden? Den Figuren können wir dies nicht ansehen. Während bei der Pauli'schen Brücke das Stahlkorn, auf welchem die Brücke ruht, dem Schnitt der Streckbäume möglichst nahe gebracht ist, nur durch wenige Plattenstärken von demselben getrennt ist, liegen in den Skizzen der Fig. 166 und 167 dicke Zahnklötze zwischen dem Balken und dem Auflager. Der Balken hängt also nicht in der neutralen Axe. Diese scheint auch in Fig. 167 nicht horizontal gebildet zu sein, in Fig. 166 ist sie es sicher nicht, denn der obere Streckbaum ist unverkennbar stärker als der untere, demnach ist die neutrale Axe gewölbt. Auch glauben wir, dass Herr Laves nie an etwas Derartiges gedacht hat, sonst wäre es gewiss auch dort gesagt worden, wo es S. 91 heisst:

„Das Princip der neuen Constructionsweise besteht in der Combination der bei allen Baustoffen vorkommenden zwei Hauptkräfte:

1) Der rückwirkenden Festigkeit oder des Widerstandes gegen das Zusammenpressen, wie solche bei allen Arten von Ge-

wölbbogen und deren Widerlager in Anspruch genommen wird.

2) Der absoluten Festigkeit oder des Widerstandes gegen das Zerreissen, welche bei den in neuerer Zeit angewendeten Kettenzügen der Hängebrücken als wesentlichstes Bedingniss eintritt."

Und wie mir von einem Freunde mitgetheilt wurde, soll Herr Laves in einem Mémoire explicatif d'un nouveau système en construction S. 5 sagen:

3) „Er gebe dem gedrückten Glied darum eine convexe Form, damit dasselbe bei grosser zufälliger Belastung in Folge seiner eigenen elastischen Zusammendrückung und der elastischen Ausdehnung der Kette nicht in oder unter die wagerechte Lage komme; in welchem Fall diese Stütze dem von den beiden Enden her wirkenden wagerechten Druck keinen Widerstand mehr leisten könne."

Kette und Bogen miteinander zu combiniren, auf weiter nichts wird in Nr. 1 und 2 Anspruch gemacht. In Nr. 3 aber wird die Wölbung des obern Bogens so reducirt, dass von einer horizontalen Lage der neutralen Axe keine Rede sein kann. Ausserdem steht aber auch die Auffassung in 3, wonach der Druckbaum nahezu geradlinig ist, mit der in 1, wonach er als Gewölbe widerstehen soll, so sehr in Widerspruch, dass gar nicht angenommen werden kann, Herr Laves sei durch Nachdenken zu irgend einer bestimmten Form gelangt. Herr v. Pauli aber hat die Form beider Streckbäume auf Grund theoretischer Betrachtungen fixirt, und dies ist neu.

Der Pauli'sche Träger ist ein vollendetes Fachwerk, in jedem einzelnen Fache sind die Dimensionen der Pfosten und Diagonalbänder den an ihnen wirkenden Kräften angepasst. Entspricht die Laves'sche Anordnung der Füllungsglieder in den Diagonalen eines Faches überhaupt den an ihnen wirkenden Kräften? Wir müssen es bezweifeln, denn sonst würden Fig. 167 die Füllungsglieder nicht abwechselnd nach rechts und links abfallen. Diese spitz in den Fachwerken steckenden kleinen Laves'schen Balken können offenbar nur dazu bestimmt sein, rückwirkend zu widerstehen, während die verticalen Zangen zum absoluten Widerstand eingerichtet sind; es müssen daher die ersten jedenfalls in den Diagonalen doppelt vorhanden sein, um bei einseitigen Belastungen des Balkens diesen vollstän-

dig zu versteifen; aber wollte man sogar voraussetzen, der Constructeur habe gewusst, dass die gegen die Mitte aufsteigende Diagonale rückwirkend stärker bei einseitiger Belastung in Anspruch genommen werde, als die abfallende, und dass demnach die letztere bei weniger feinen Constructionen ausgelassen werden könne, so würde er doch nimmermehr in zwei aufeinander folgenden Fächern derselben Balkenhälfte einmal die aufsteigende, einmal die abfallende Diagonale mit einem Balken ausgefüllt haben. Die in Förster mitgetheilten Formen Laves'scher Balken verrathen daher kein Bewusstsein vom Wirken der Kräfte im Innern solcher Constructionen.

Im Pauli'schen Träger sind die Festigkeitscoefficienten den neuesten Erfahrungen über Elasticität des Materials angepasst, und dieses wird auch demgemäss behandelt. Entspricht die Construction Fig. 167 auch nur den elementarsten Regeln aus dem Kapitel der Festigkeit?' Wie konnte ein kurzer Laves'scher Balken in die Diagonale gestellt werden, in der er doch nur rückwirkend oder absolut, nimmermehr aber relativ in Anspruch genommen sein kann.

Offenbar war dem Constructeur nicht bekannt, dass durch Biegen und Spalten der Balken nur deren relative Widerstandsfähigkeit vergrössert, dagegen deren absolute und rückwirkende vermindert werde.

Man hat häufig den Laves'schen Balken dem Pauli'schen an die Seite gestellt, eine Vergleichung der beiden Träger hat uns genügt, zu zeigen, wie unendlich viel höher der erstere steht, und gerade aus diesem Vergleich geht hervor, dass der Pauli'sche Träger das vollendetste Fachwerk sei, das unsere Zeit hervorgebracht hat. Man kann zweifeln, ob die Erschütterungen so schädlich seien, als vorausgesetzt wird; man kann ihm mit Recht entgegenhalten, dass die Form des sogenannten Balkens von gleichem Widerstand nicht diejenige sei, welche ein Minimum von Material erheische; wir werden auf Taf. 27 zeigen, dass verschiedene andere Träger bei gleichem Tragmodul und gleicher Constructionshöhe weniger Material als er erfordern, und dass daher der geringere Materialaufwand nur eine Folge des geringern Tragmoduls, also der sinnigen Construction sei, die ihn anzuwenden erlaubt. Man kann es in Folge dessen für überflüssig halten, aus der Form der gewöhnlichen Bauroutine herauszutreten, weil dies ja immer mit

etwas Aufwand an Denken verbunden ist: allein man wird nicht leugnen können, dass Herr v. Pauli bei dem Entwurf seines Trägers Verhältnisse berücksichtigt und durch besondere Anordnungen zerstörenden Kräften entgegen zu wirken gesucht hat, an die vor ihm noch kein Ingenieur dachte; dass die Bestimmung der Dimensionen vollkommen dem heutigen Standpunkt der Wissenschaft entspricht, dass bei Behandlung und Auswahl des Materials nirgends noch ähnliche Sorgfalt angewendet worden ist, und dass er, hierauf fussend, Tragmodule von einer Grösse angewendet hat, wie noch kein Ingenieur sie sich erlauben zu dürfen glaubte und daher bis jetzt mit dem geringsten Aufwand an Material und Kosten Träger hergestellt hat.

Uns ist nur ein einziges Bauwerk bekannt, das den Pauli'schen Brücken an die Seite gestellt werden kann: es ist die Saltash-Brücke Brunell's bei Plymouth. Dass diese Brücke von einem denkenden Mann und nicht von einem alten Praktiker herrühre, der nur so aus Gefühl die Streckbäume seines Fachwerks gebogen hat, beweisen hinlänglich die schönen Bauten, die er ausgeführt hat; unter andern konnten auch die im Jahrg. 1862 der Zeitschrift des hannoveranischen Ingenieur- und Architectenvereins mitgetheilten Normalien für steinerne Brücken und Durchfahrten ohne vollständige Kenntniss der Lage der Stützlinie im Innern eines Gewölbes nicht entworfen werden. Da nun die Saltash-Brücke ebenso schön als wie die Pauli'schen durchgearbeitet erscheint, so betrachten wir die Uebereinstimmung der Form, zu der gleichzeitig die beiden bedeutendsten Ingenieure, die gewiss nicht von einander copirten, gelangten: als die schönste Bestätigung der Richtigkeit des Princips, nach welchem zwei der weitesten Brücken, die Mainzer und die Saltash-Brücke, ausgeführt wurden.

116. Der Kräfteplan der Pauli'schen Brücke.

Auf Taf. 18_I haben wir die Form und die an den einzelnen Theilen eines Pauli'schen Trägers wirkenden Kräfte bestimmt. Wir nahmen das Eigengewicht zu 5 Tn. pro Mtr. und die Spannweite zu 50 Mtr., späterer Vergleiche wegen gerade so gross an, als bei dem Fachwerk mit parallelen Streckbäumen (Nr. 111 S. 385 Taf. 17).

Die Zahl der gleichlangen Fächer wurde wie bei der Isarbrücke von Grosshessenlohe zu 13 angenommen, sodass wir im Ganzen zwölf fortlaufend numerirte Doppelknotenpunkte haben. Die auf dieselben treffenden zwölf Gewichte, die vom Eigengewicht herrühren, bilden das Kräftepolygon, in welchem sie zwischen den an den Streben wirkenden Kräften S mit den entsprechenden Nummern bezeichnet sind. Die Totallänge dieses Theiles des Kräftepolygons stellt auf dem Maassstab der Kräfte $\frac{12}{13} \cdot 5 \cdot 50 = 230{,}7$ Tn. dar.

Unter der Voraussetzung, dass der Träger dieselbe Höhe von 5 Mtr. wie das Fachwerk Taf. 17 erhalten soll, nahmen wir die Poldistanz zur doppelten Fachwerkhöhe oder zu 10 Mtr. = 100 Tn. an. Der Pol O liegt der Mitte des Eigengewichts 1.12 gegenüber, und das vom Eigengewicht herrührende, eine Parabel umhüllende Seilpolygon über AB wird symmetrisch und demnach die Schlusslinie AB selbst horizontal.

Bei Aufstellung der zufälligen Belastung haben wir vor Allem zu untersuchen, welches die ungünstigste Lage eines Zuges sei. Bilden wir nach Nr. 108 die Zahl $\left(\frac{l}{d} - 1 + \frac{c\,l}{s\,d}\right)$, so finden wir, dass namentlich $\frac{c\,l}{s\,d}$ immer sehr gross und die ganze Zahl grösser als $\frac{P}{\triangle P}$ sei: man hat demnach nie das erste oder die zwei ersten Räder des Zuges über einen Knotenpunkt vorzurollen, und bei der ungünstigsten Belastung steht das vorderste Rad des Zuges jederzeit gerade über dem Knotenpunkt.

Wie früher, wird angenommen, die zufällige Belastung bestehe aus dem Engerth'schen Locomotivenzug von Taf. 7_1. Vergleichen wir die dort auf der obern Horizontalen aufgetragenen Radstellungen mit der Lage der Knotenpunkte Taf. 18_1, so finden wir, dass bei ungünstigster Belastung der Pfosten und der darauf folgenden Diagonalbänder . . 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
vor denselben 4 5 6 9 10 12 14 15 18 20 20 23
Räder Platz haben, und bei ungünstigster Belastung der Streckbäume können noch . . 14 11 10 9 6 5 3 0
Räder nach denselben aufgestellt werden.

Diese zufälligen Lasten schalten wir gerade so, wie wir es schon Nr. 111 S. 388 und Taf. 17 gezeigt haben, zwischen der letzten Polygonseite und den Widerlagern ein. Die Gewichte der ersten Räderschaar 4 5 6 .... wurden, natürlich mit Berücksichtigung des Maassstabes von Taf. 7_1, abgegriffen und Taf. 18_1 im Kräftepolygon über dem Eigengewicht, also auf der Seite der Kraft 1, aufgetragen und die obern Endpunkte mit den entsprechenden Ziffern bezeichnet. Dasselbe geschah mit der zweiten Räderschaar 14 11 10 ... unter dem Eigengewicht des letzten Knotenpunktes 12.

Die Lage der Mitteldrücke der ersten Räderschaar 4 5 6 ... wurde durch Abgreifen von Taf. 7_1 bestimmt und der Schnitt derselben mit der Verlängerung der ersten Polygonseite nach *B* durch gleich bezifferte Pfeile bezeichnet. Ebenso die der Schaar 14 11 10 ... mit der letzten Polygonseite vor *A*.

Die auf diese Schnitte folgenden Polygonseiten der zufälligen Belastung laufen parallel mit den Strahlen, welche von *O* aus die gleichen Ziffern auf dem Kräftepolygon projiciren und tragen auch diese Ziffer an ihrem andern Endpunkte auf den Verticallinien durch *B* und *A*.

Verbindet man die Endpunkte der ersten Polygonseiten 4 5 6 ... auf der Verticalen durch *B* mit dem Endpunkte *A* des Polygons für Eigengewicht, so erhält man die Schlusslinien 4*A*, 5*A*, 6*A* ... für einseitige Belastung des Trägers. Von diesen Schlusslinien wurde immer nur in der Mitte nach der Verticalen durch den entsprechenden Pfosten ein kurzes Stückchen punktirt, sie schneiden auf ihrer Verticalen über der Horizontalen *AB* Stücke ab, welche, mit der Poldistanz von *O* multiplicirt, das von der einseitigen zufälligen Belastung herrührende Moment geben. Die Verbindung aller dieser End- und Schnittpunkte durch eine punktirte Linie gab die Momentencurve bei einseitiger Belastung.

Verbindet man die Endpunkte der Polygonseiten verschiedener Räderschaaren, die sich zu einer Totalbelastung ergänzen, miteinander, so erhält man die Schlusslinien 10 14, 12 11, 14 10 ...., welche auf den zugeordneten Verticallinien 5 6 7 ... das Maximalmoment abschneiden. Die Curve, welche alle diese Abschnitte miteinander verbindet, ist die Momentencurve bei totaler Belastung; sie braucht bei symmetrischer Form des Balkens natürlich nur für die eine Brückenhälfte construirt zu werden, auf Taf. 18_1 geschah es für die zweite Hälfte, die Curve in der ersten

Hälfte wurde der in der zweiten gleich gemacht. Der Raum zwischen der Momentencurve des Eigengewichts oben und der der Maximalbelastung wurde mit Ausnahme des für die Construction des Trägers nothwendigen Streifens schraffirt. Wir wiederholen also: die Segmente der durch irgend einen Knotenpunkt gehenden Verticalen, multiplicirt mit der Poldistanz, sind gleich: zwischen AB und der Momentencurve des Eigengewichts dem vom Eigengewicht herrührenden Moment; zwischen AB und der punktirten Momentencurve bei einseitiger Belastung dem von der einseitigen Belastung herrührenden Moment; zwischen AB und der Momentencurve bei totaler Belastung dem von der zufälligen Belastung herrührenden Moment; endlich innerhalb der ganzen schraffirten Fläche gleich dem überhaupt vorkommenden Maximalmoment in Bezug auf den treffenden Knotenpunkt.

Wir sind jetzt im Stande, die Dimensionen der Streckbäume und die Form des ganzen Balkens zu bestimmen. Wir nehmen $\frac{\varrho}{\varepsilon} = \frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}$, siehe Nr. 114 S. 402 an, so dass also beide Streckbäume bezüglich der Horizontallinie symmetrisch liegen müssen.

Zur Bestimmung des Querschnitts wurden Taf. 18_1, seitlich links die vom Eigengewicht und von der dreifachen zufälligen Belastung herrührenden Momente zusammengetragen; da die Poldistanz gleich der doppelten Höhe des Trägers ist, so haben wir dieses Moment auf dem halben Maassstabe, also auf dem Maassstabe von ,001 = 10 Tn., abzugreifen, um den Druck in der Mitte zu erhalten, welcher dieser Belastungsart entspricht. Er ist gleich 1355 Tn. Dividiren wir diese durch 1,6 Tn., so erhalten wir die Querschnittsfläche von 848 □Ctm., die den Streckbäumen daselbst gegeben werden muss. Der vom Eigengewicht und von der einfachen zufälligen Belastung herrührende Druck ist = 660 Kilogr. Bei dem gewöhnlichen Verfahren dividirt man diesen durch 0,6 Tn., und würde demnach eine Querschnittsfläche von 1100 □Ctm. erhalten, d. h. $^1/_4$ mehr als nach der Pauli'schen Methode.

Auf der andern Seite hat man $\frac{660 \text{ Tn.}}{848 \text{ □Ctm.}} = 0{,}78$ Tn. pro □Ctm. (7,8 Kilogr. pro □Mmtr.) ziemlich denselben Festigkeitscoefficienten, den die Engländer gewöhnlich anwenden. Wenn nun die bisher gebauten Pauli'schen Brücken noch viel leichter

gehalten worden sind, so hängt dies nicht mit dem Princip zusammen, sondern rührt daher, dass die zufällige Belastung ausserordentlich gering, gewöhnlich nur zu 2,7 Tn. pro lf. Meter, angenommen worden ist, offenbar viel zu gering für die heutigen Verhältnisse.

Damit nun der obige Druck pro □Ctm. in dem ganzen Träger derselbe bleibe, müssen, wie wir früher (Nr. 107 S. 366) entwickelten, alle senkrecht auf die Streckbäume gemessenen Höhen sich wie die Segmente der Verticallinien innerhalb der schraffirten Fläche verhalten. Es wurden also mit Radien, welche diesen Segmenten proportional sind, kleine Kreisbögen gezogen und den Streckbäumen eine solche Form gegeben, dass sie alle diese Kreise umhüllen. Diese Kreisbögen sind in der Figur nicht mehr sichtbar, weil sie ganz mit den Streckbäumen zusammen fallen. In Folge dessen scheinen auch die Schnittpunkte zweier gegenüberliegenden Strecken des Druck- und Spannbogens und der entsprechenden Seiten des Seilpolygons auf einer und derselben Verticalen zu liegen. Es ist dies nur eine Folge des kleinen Maassstabes, in dem wir die Construction ausgeführt haben, denn streng genommen kann dies nicht stattfinden, weil die Perpendikel auf die Streckbäume, den verticalen Höhen des Trägers, wegen der Verschiedenheit der Winkel, die sie mit einander bilden, nicht proportional sind. Wegen der symmetrischen Form des Druck- und des Spannbogens schneiden sich je zwei gegenüber liegende Seiten derselben auf der Horizontallinie durch die Stützpunkte; die gegenüber liegenden Seiten der Polygone des Eigengewichts und der Maximalbelastung schneiden sich etwas weniges unter dieser Horizontalen, allein so wenig unter derselben, dass es nur bei dem Zeichnen der Figur in Blei gerade noch bemerkbar wurde, und aus der ausgezogenen Zeichnung kaum mehr ersehen werden kann. In der Zeichnung schneiden sich also diese vier Seiten scheinbar in einem Punkte der Horizontalen durch die Stützpunkte. Würde man aber die Figur in einem viel grössern Maassstabe zeichnen, so würden die Schnitte zweier gegenüberliegender Streckbaumseiten etwas weiter aussen, und die zweier gegenüber liegender Polygonseiten etwas tiefer als der andere Schnitt liegen. Da wir diese Punkte später noch brauchen werden, so wurden sie dadurch bemerkbar gemacht, dass die treffenden Streckbaumseiten durch diese Punkte durchgezogen wurden, bis zu den Schnitten mit den Sei-

ten, zwischen welchen die gegenüber liegende Seite liegt. Es entstanden dadurch jene langgezogenen Vierecke in der Verlängerung der Horizontalen durch die Stützpunkte. Die Schnittpunkte der Seiten, welche im untern Streckbaume einem Pfosten vorausgehen und im obern Streckbaume demselben Pfosten folgen, und die geschnitten werden müssen, wenn die in diesem Pfosten wirkende Kraft bestimmt werden soll, tragen den Zeiger dieses Pfostens; die Schnitte 1 — 6 liegen über der Horizontalen, die Schnitte 7 — 12 unter derselben. Durch diese Zeiger sind alle Schnittpunkte unzweideutig bezeichnet; die gegenüber liegenden Seiten 9, 10 schneiden sich z. B. in der Ecke zwischen 9 und 10. Die Schnittpunkte 5, 6, 7 fallen über den Rahmen der Zeichnung hinaus; sie befanden sich jedoch noch auf dem Brett, auf dem die letztere angefertigt wurde, so dass sie noch zur scharfen Bestimmung der Kräfte mit dienen konnten.

Zur Bestimmung der in den Füllungsgliedern wirkenden Kräfte schneiden wir jetzt den Träger so, dass das treffende Füllungsglied und nur noch je eine Strecke des Druck- und des Spannbogens geschnitten werden; z. B. zur Bestimmung der Spannung in dem Diagonalband 2 3 schneiden wir so, wie es in Taf. 18_1 angedeutet ist, und zerlegen die Summe der ausserhalb dieses Schnittes am Träger wirkenden Kräfte nach der Richtung der drei geschnittenen Constructionstheile.

Die ungünstigste Belastungsart findet, wie im Eingang erläutert wurde und wie es über den Knotenpunkt 2 angedeutet ist, statt, wenn fünf Räder auf der Brücke stehen. Das dieser Belastung entsprechende Seilpolygon ist die Momentencurve des Eigengewichts $B55A$. Die Seilpolygonseiten ausserhalb des Schnittes, mit dem wir uns hier beschäftigen, sind die Polygonseite 2 3 der Eigengewichtscurve und die Schlusslinie $A5$; ihr Schnitt giebt die durch einen Pfeil und die Ziffern 2 3 bezeichnete Richtung der ausserhalb des Schnittes 2 3 wirkenden verticalen Mittelkräfte. Die Grösse dieser Kräfte wird durch zwei durch den Pol des Kräftepolygons gezogene Parallelen zu jenen äussersten Polygonseiten auf diesem selbst abgeschnitten. Der Endpunkt der Parallelen zur Seilpolygonseite ist bereits vorhanden zwischen den das Eigengewicht darstellenden Segmenten 2 und 3 (rechts zwischen den Streben S angeschrieben), denn er diente ja dazu, das Seilpolygon zu construiren. Von der Parallelen zur Schlusslinie $A5$ (sowie von

allen anderen Schlusslinien) wurde links ein kurzes Stückchen ausgezogen und ebenfalls mit 2 3 bezeichnet. Die Kraft ist also durch die Strecke des Kräftepolygons zwischen diesen beiden Punkten 2 3 dargestellt und wirkt vom erstern gegen den zweiten. Da im vorliegenden Falle der erstere, von der Seilpolygonseite herrührende höher liegt, als der zweite, von der Schlusslinie herrührende, so wirkt die Kraft abwärts, wie es bei den Seilpolygonen angedeutet ist. Eben dort bei 2 3 ist auch die Fig. 151 S. 364 entsprechende Zerlegung der Kraft nach der Richtung der in Frage stehenden Strebe und nach dem Durchschnittspunkte der beiden Fachseiten 2 3 hin durch Pfeile angedeutet; die letztere Richtung ist punktirt. Eine Parallele zu dieser punktirten Linie durch den untern Punkt 2 3 des Kräftepolygons schneidet auf einer Parallelen S_{23} zum Diagonalband durch den obern Punkt 2 3 des Kräftepolygons die ganz ausgezogene Kraft S_{23} ab. Da ausser S auch noch die Pressungen in den Pfosten construirt wurden, so wurde von der Parallelen, die die Spannung in dem Diagonalband abschneidet, nur ein kurzes Stück oberhalb S, von der aber, die den Druck im Pfosten abschneidet, nur ein Stückchen unterhalb S ausgezogen. Alle Zweideutigkeit schwindet übrigens auch dadurch, dass der Druck im Pfosten immer grösser als die Spannung im Diagonalband ist. Die Construction der gleichzeitig stattfindenden Spannung und Pressung in den Streckbäumen wurde als überflüssig, weil sie nicht die Maximalkräfte darstellen, weggelassen.

Zur Bestimmung des Druckes in den Pfosten benutzen wir den Nr. 107 S. 365 bewiesenen Satz, dass das Kräftepolygon und das Seilpolygon ähnliche Figuren sind, wenn die Kraft und das Füllungsglied mit einander parallel laufen (siehe auch Fig. 154 S. 366). Es verhält sich also die Summe der ausserhalb des Pfostens 2 wirkenden Kräfte zum Druck in diesem Pfosten wie die Länge des Pfostens zur Länge des Segments der Verticalen 2 3 zwischen den durch fein punktirte Linien verlängerten Strecken des Spannbogens 1 2 und des Druckbogens 2 3. Dieses Segment wurde durch kleine Pfeile in der Verticalen der Kraft 2 3 näher bezeichnet.

Es wurde jetzt in der Verlängerung des Diagonalbandes 2 3 vom Knotenpunkt 2 an abwärts, die Länge dieses Segmentes aufgetragen und der Endpunkt desselben mit dem obern Ende des Pfostens 2 durch eine fein punktirte Linie verbunden. Eine Paral-

lele zu dieser durch den untern Punkt 2 3 des Kräftepolygons schneidet dann auf der Parallelen zum Diagonalband den Druck im Pfosten ab. Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus der Aehnlichkeit der zwei oben construirten Dreiecke. Wie wir oben schon bemerkten, ist von den Linien, welche den Druck im Pfosten auf S abschneiden, immer nur ein kleiner Strich nach unten ausgezogen. Dieser nach unten gezogene Strich begrenzt auch immer den Schattenstrich, durch welchen wir andeuten, dass der Pfosten rückwirkend in Anspruch genommen sei.

Die Mittelkraft der ausserhalb des Pfostens 4 und des Diagonalbandes 4 5 wirkenden Kräfte fiel nicht mehr auf das Reissbrett, wegen des nahen linken Randes, wir haben deshalb dieselbe ganz so wie für 2 3 auf der andern Hälfte des Trägers für das punktirte Diagonalband 8 9 bestimmt und erhielten als Richtung der Seitenkraft nach dem Schnitt der beiden treffenden Strecken des Druck- und Spannbogens die Linie $9'8'$. Hätten wir die Construction auf der linken Seite ausgeführt, so würde diese Richtung denselben Winkel, aber nur in entgegengesetztem Sinne mit der Verticalen, bilden; die punktirte Linie 5 4, die wie $8'9'$ durch den Schnitt der Streckbäume geht, ist daher die gesuchte Richtung; eine Parallele zu ihr durch den untern Punkt 5 4 des Kräftepolygons schneidet auf $S_{4\,5}$ die Spannung des Diagonalbandes ab. Die Construction der Pressung im Pfosten 4 ist die gleiche, als wie für den Pfosten 2.

Bei 5 springt die Mittelkraft der ausserhalb des Schnittes 5 6 wirkenden Kräfte auf die andre Seite hinüber und nimmt entgegengesetzte Richtung an, weil im Kräftepolygon der Punkt $S_{5\,6}$ unter dem von der Schlusslinie 5 6 bestimmten liegt. Für diesen Schnitt liegen alle Punkte in solcher Ferne, dass wir zu einer perspectivischen Construction greifen mussten. Von P als perspectivischem Projectionscentrum aus construirten wir alle nothwendigen Figuren im $^1/_{30}$ des Maassstabes der Zeichnung selbst. PQ, also ist $= {}^1/_{30}\,PQ$; eine Parallele zur Schlusslinie AQ durch Q, giebt durch ihren Schnitt mit der Polygonseite des Eigengewichts, die durch P geht, die Verticale, in der die Mittelkraft 5 6 wirkt; ebenso wurde auch $P5' = {}^1/_{30}\,P5$ gemacht und die Parallele durch $5'$ zur Spannbogenstrecke 5 6 schneidet auf der Polygonseite, die durch P geht, den Schnitt der beiden Strecken 5 6 des Druck- und Spannbogens ab, welcher durch eine punktirte Linie mit dem Punkte 5 6, in dem

die Zerlegung der Kraft stattzufinden hat, verbunden, die Richtung der einen Seitenkraft giebt; diese Richtung dient zur Construction von S_{56}. Endlich schneiden zwei Parallelen zu der Spannbogenseite 4 5 und zur Druckbogenstrecke 5 6 auf der Verticalen durch 5 6 $^1/_{30}$ der Strecke 5 R ab, wodurch der Punkt R bestimmt ist, der durch eine fein punktirte Linie mit dem Kopfe des Pfostens 5 verbunden, die Richtung giebt, mittelst der auf S_{56} der Druck in diesem Pfosten abgeschnitten wird.

Zur Bestimmung der Spannung im Diagonalband 6 7 braucht keine Zerlegung vorgenommen zu werden, weil man wegen des Parallelismus von vorn herein weiss, dass die eine Seitenkraft horizontal ist; sie ist nach dem unendlich fernen Horizontalpunkte gerichtet. Eine Horizontallinie durch den von der Schlusslinie herrührenden Punkt 6 7 des Kräftepolygons schneidet S_{67} ab. Die Mittelkraft der ausserhalb des Schnittes 6 7 wirkenden Kräfte fällt übrigens noch auf das Blatt, gerade auf den Rand rechts, so dass das Segment derselben, das zur Bestimmung des Druckes im Pfosten dient, noch construirt werden kann.

Ebenso können auch alle Kräfte der folgenden Pfosten und Diagonalbänder direct construirt werden. Für das Band 9 10 haben wir noch einmal die Zerlegung der Kräfte durch Pfeile angedeutet und denken, es braucht nach dem Bisherigen keine weitern Erläuterungen mehr.

Den Druck im letzten Pfosten 1 2 haben wir auf der letzten Spannbogenseite 1 2 A construirt. Da die Höhe dieses Pfostens im Verhältniss zur Kraft im Kräftepolygon unverhältnissmässig klein ist und demnach letztere nicht besonders genau werden würde, so wurde die Figur A, 1 2, 2 3 im sechsmal grössern Maassstabe von A als Projectionscentrum ausgezeichnet. Es bietet dies durchaus keine Schwierigkeiten dar und wir glaubten daher, die Bleistiftlinien, welche dazu dienten, wieder auslöschen zu dürfen.

Auf diese Weise sind wir zum Maximum aller in den Pfosten und Diagonalbändern wirkenden Kräfte S gelangt. Um diese mit dem constanten Drucke und der constanten Spannung, welche in den Streckbäumen wirkt, vergleichen zu können, haben wir diese neben dem Kräftepolygon aufgetragen; wie wir aber schon bemerkten, sind sie gleich der doppelten Höhe der schraffirten Figur, weil die Höhe des Fachwerks gleich der halben Poldistanz ist. Man sieht, wie ausserordentlich wenig die Füllungs-

glieder den Streckbäumen gegenüber in Anspruch genommen werden, im Vergleich zu den Fachwerken mit parallelen Streckbäumen.

Der Division der in den Streben wirkenden Kräfte durch den Festigkeitscoefficienten $\frac{16}{3}$ Kilogr. pro □Mmtr. dürfen wir uns wohl enthalten, weil kein wirkliches Beispiel dieser Construction zu Grunde liegt.

Zum Schluss bemerken wir noch, dass wir vielleicht die Construction in einem etwas grösseren Maassstabe hätten zeichnen und dadurch grössere Deutlichkeit erlangen können, wenn wir den Träger ganz an den einen Rand des Blattes gestellt und alle Constructionen nur auf einer Seite ausgeführt hätten; auf diese Weise wird man vielleicht verfahren, wenn es sich darum handelt, in möglichst grösstem Maassstabe zu den an den einzelnen Constructionstheilen wirkenden Kräften zu gelangen; allein zum Auseinandersetzen der Methode glaubten wir alle Kräfte für die gleiche Lage der Füllungsglieder bestimmen zu müssen, indem wir alle Diagonalbänder und alle Pfosten als die gleiche Schaar betrachten; es tritt auf diese Weise die Gesetzmässigkeit in der Aenderung aller Constructionslinien viel deutlicher hervor.

Man sieht z. B., dass, wenn die Knotenpunkte im gleichen Sinne BA fortlaufend numerirt sind, sich die Schnittpunkte der gegenüber liegenden Streckbaumseiten im entgegengesetzten Sinne bewegen. Es folgt daraus, dass in den Streckbäumen keine Wendepunkte vorkommen, wenn man sie als Liniengebilde auffasst. In demselben entgegengesetzten Sinne bewegt sich aber auch die Mittelkraft der ausserhalb eines jeden Füllungsgliedes wirkenden Kräftesumme, und zwar so, dass diese Mittelkraft dem zugehörigen Schnitt der Streckbäume im Sinne AB immer voran ist; sie trennt also den Schnitt immer von A wie von B. In Folge dessen dreht sich auch die, nach dem Schnitt der Streckbäume gerichtete Seitenkraft stets im gleichen Sinne und beschreibt einen halben Umkreis in dem Sinne, den wir gewöhnlich den positiven nennen. Für 1 2 ist sie nahezu vertical abwärts geneigt, dann nähert sie sich immer mehr der Horizontalen, erreicht diese für 6 7, weil dann die Streckbaumseiten parallel laufen; dann nähert sie sich wieder mehr und mehr der Verticalen, die sie bei 11, 12 nahezu erreicht.

Denselben Halbkreis beschreibt auch die Linie, welche den

Pfostendruck abschneidet, und zwar ohne je viel von der vorigen Linie abzuweichen, wie die nahe zusammenfallenden Abschnitte auf den *S* zeigen.

Vollkommen regelmässig bewegen sich auch die Endpunkte der Parallelen zu den Schlusslinien und den Seilpolygonseiten im Kräftepolygon; allein unregelmässig dreht sich das Diagonalband, das bei 6 7 am steilsten steht und dort ein Rückkehrelement ist. Hiervon rührt daher auch die Unregelmässigkeit in der Grösse der an den Füllungsgliedern wirkenden Kräfte.

Die Bewegung der Strahlen der Polygone des Eigengewichts und des Maximalmoments ist eine ganz regelmässige.

Die eben hervorgehobenen Beziehungen gewähren zwar keinen directen Nutzen bezüglich der Genauigkeit der Construction, immerhin aber wird Derjenige, der sich dieselben einprägt, sicherer zeichnen, weil er alle Verhältnisse besser überblickt.

Viertes Kapitel.

Dachstühle.

117. Der englische Dachstuhl.

Unter den verschiedenen Dachstuhlsystemen steht der englische Dachstuhl (Taf. 19_2) dem regelmässigen Fachwerk am nächsten; er besteht aus zwei Streckbäumen und einer regelmässig aufeinander folgenden Schaar von Füllungsgliedern, wie das gewöhnliche Fachwerk, und ohne Aenderung des Systems, kann er für jede Spannweite construirt werden. Alle übrigen Dachstühle sind mehr oder weniger unregelmässig gebildet, und wir geben sie gerade als Beispiel unregelmässiger Fachwerke.

Ueber die ungünstigste Belastungsart bezüglich der beiden Streckbäume haben wir dem Nr. 108 S. 368 Gesagten nichts beizufügen; es gilt für jede Form der Streckbäume. Dagegen modificirt sich das bezüglich der ungünstigsten Belastungsart der Streben Gesagte dadurch etwas, dass sich alle gegenüber liegenden Streck-

baumseiten in den Auflagern schneiden; in Folge dessen üben alle Lasten, welche jenseits eines Füllungsgliedes, d. h. zwischen dem Füllungsglied und dem entfernten Auflager aufgebracht werden, gar keinen Einfluss auf das treffende Füllungsglied aus, oder man kann auch umgekehrt so sagen: jede aufgebrachte Last belastet nur die Füllungsglieder zwischen ihr und der Mitte des Dachstuhls.

Schneiden wir z. B. den Dachstuhl zwischen 3 und 4 in Taf. 19_2, so werden die rechts von diesem Schnitte aufgebrachten Lasten nur die am Auflager vertical aufwärts wirkende Kraft an dem durch den Schnitt links abgeschnittenen Theile des Dachstuhls vergrössern; da sich aber die Streckbäume in diesem Auflager schneiden, so zerlegt sich diese Aenderung direct nach der Richtung der Streckbäume, ohne die an der geschnittenen Strebe wirkende Kraft zu beeinflussen, w. z. b. w.

Jedes Füllungsglied wird also dann schon am stärksten in Anspruch genommen, wenn die Strecke zwischen ihm und dem nächsten Auflager total belastet ist; da aber durch weitere Belastung des Dachstuhls das Füllungsglied nicht entlastet, überhaupt nichts an ihm geändert wird, so kann man allgemein sagen: Alle Theile des englischen Dachstuhls sind bei der Totalbelastung desselben am stärksten in Anspruch genommen.

Da die Mittelkraft der ausserhalb eines Schnittes wirkenden Kräfte immer ausserhalb eines Auflagers, also immer jenseits des Schnittpunktes der beiden Streckbäume liegt, so folgt: dass in derselben Dachstuhlhälfte, innerhalb der dieser Schnittpunkt seine Lage nicht ändert, die Füllungsglieder auf die gleiche Weise in Anspruch genommen sind, und zwar in entgegengesetzter Weise, als wie bei dem Fachwerk mit parallelen Streckbäumen, wo die Mittelkraft immer diesseit ihres Schnittes liegt. Es wurde dies bereits Nr. 107 S. 367 hervorgehoben. Die vom obern zum untern Streckbaum laufenden Streben 1 2, 3 4, 5 6 sind demnach rückwirkend, und die vom untern zum obern laufenden Hängeisen 2 3, 4 5, 6 7 absolut in Anspruch genommen.

Die Bestimmung der an diesem Dachstuhl wirkenden Kräfte ist nun gar einfach, weil eine und dieselbe Totalbelastung das Maximum aller an allen Constructionstheilen wirkenden Kräfte giebt. Sie wurde Taf. 19_2 ausgeführt. Des spätern Vergleiches

wegen wurde bei diesem und bei allen spätern Dachstühlen eine Maximalbelastung von 1 Tn. pro lf. Meter der Horizontalprojection, also die Belastung der 5 Meter von einander entfernten Knotenpunkte zu 5 Tn. angenommen, wie auf der Tafel bemerkt ist, im Maassstabe von ,003 = 2 Tn. aufgetragen und mit P bezeichnet. Der Druck auf die Auflager ist, weil der Dachstuhl und die Totalbelastung symmetrisch sind, gleich $P_1 + P_3 + P_5 + {}^1/_2 P_7$, was wir mit $P_{1\,3\,5\,7}$ bezeichnen wollen. Dass nur die Hälfte der Belastung P_7 zu nehmen sei, brauchen wir ferner nicht mehr anzudeuten, weil immer nur mit ${}^1/_2 P_7$ construirt wird. Dieser Auflagerdruck zerlegt sich nun, wenn wir zwischen dem Auflager und dem Knotenpunkte 1 schneiden, nach den beiden Streckbäumen und giebt, wenn wir durch die Endpunkte der $P_{1\,3\,5\,7}$ zwei Parallelen zu ihnen ziehen, das Kräftedreieck, das durch die Spitze 1 unzweideutig bezeichnet ist; der rückwirkend angegriffene Sparren ist wie gewöhnlich durch einen zweiten Strich vom absolut angegriffenen Streckbaume unterschieden worden. Ganz wie wir es Nr. 109 beim allgemeinen Fachwerke gezeigt haben, vorgehend, schneiden wir nun den Dachstuhl zwischen 1 und 2 und erhalten das Kräftevieneck von dem $P_{3\,5\,7}$ und 1 2 zwei gegenüber liegenden Seiten sind, und das durch die Seite 1 2 unzweideutig bezeichnet ist; wie es sich von selbst versteht ist die Spannung in der untern Streckschiene die gleiche, weil dieselbe Strecke $A\,2$ geschnitten wird. Auf die gleiche Weise giebt das Viereck $P_{3\,5\,7}$ 2 3 die Spannung im Hängeisen 2 3 und in den Strecken 1 3 des Sparrens und 2 4 des untern Streckbaums. Der Druck im Sparren ist derselbe, wie der des eben zuvor construirten Vierecks, u. s. f.

Hat man, auf diese Weise fortfahrend, mittelst des letzten Vierecks P_7 5 6 den Druck in der Strebe 5 6, in der Sparrenstrecke 5 7 und im untern Streckbaume 4 6 bestimmt: so erhält man die Spannung im mittelsten Hängeisen 6 7 als doppelte Projection VV der beiden letzten Constructionsglieder, auf die Verticale des Kräftepolygons, weil die Kräfte in den bei 6 zusammenstossenden fünf Constructionsgliedern im Gleichgewicht sich befinden müssen. Unmittelbar aus derselben Figur geht auch hervor, dass diese Spannung des Hängeisens VV mit der Belastung bei 7 $= 2 \,.\, {}^1/_2 P_7$ gerade so gross ist, als wie die doppelte verticale Seitenkraft der

bei 6 (Taf. $19_2'$) ausmündenden Sparren, weil bei dem Knotenpunkt 7 deren zwei zusammenstossen.

Vergleicht man den eben erläuterten Kräfteplan mit dem des allgemeinen Fachwerks (Taf. 16_3), so unterscheiden sich beide nur dadurch von einander, dass der Strahlenbüschel C in dem Dachstuhle sich auf eine oder auf zwei gerade Linien beschränkt, wenn man sich den symmetrischen Kräfteplan der zweiten Hälfte beigefügt denkt; und dadurch, dass die gleich grossen Pressungen in den gleichen Sparrenstrecken in Taf. $19_2'$ zusammenfallen, weil die Belastungen der untern Knotenpunkte mit geraden Zeigern gleich 0 angenommen wurde, indem wir uns alle Lasten in den obern Knotenpunkten concentrirt dachten.

Der sogenannte deutsche Dachstuhl (Taf. 19_6) ist nichts anderes, als ein englischer Dachstuhl mit einer einzigen Strebe als Füllungsglied; um dies deutlich zu machen, haben wir (Taf. 19_4) als Uebergang den Dachstuhl der Berner Emsteighalle gezeichnet; dieser ist unverkennbar englisch, geht aber in Taf. 19_6 über, so wie man die Strebe 1 2 horizontal richtet.

Ueber die Kräftepläne (Taf. $19_4'$ und $_6'$) dieser beiden Dachstühle haben wir weiter nichts zu bemerken, als dass die Spannung im mittelsten Hängeisen über dem Punkt 2, statt auf der Verticalen P construirt wurde.

118. Der belgische Dachstuhl.

Bei dem belgischen oder auch dem französischen Dachstuhle kann man sich jede Hälfte aus einem armirten Balken $A7$ (Taf. 19_3) gebildet denken, dessen Armirung aus zwei Schlaudern $A4$ und 4 7 besteht, welche mittelst des Pfostens 4 3 die Sparrenmitte unterstützen. Der Horizontalschub der beiden Sparren wird durch die bei 4 befestigte horizontale Streckschiene aufgehoben. Diese Streckschiene bildet mit der Schlauder 4 7 und ihrer Symmetralen das diesen Dachstuhl characterisirende grosse Mitteldreieck.

Bei kleinern Spannweiten kommen ausser den erwähnten Constructionstheilen keine weiteren mehr vor. Wird die Spannweite grösser, so werden statt eines Pfostens deren zwei (siehe Taf. 19_1) eingestellt; bei noch grösserer Spannweite unterstützt

man vom Kopf des Pfostens 3 4 (Taf. 19_3) aus, den man als einen festen Punkt betrachtet, mittelst der Diagonalen 2 3 und 3 6 zwei weitere Pfosten 1 2 und 5 4 im $^1/_4$ und $^3/_4$; endlich könnte man auch noch weiter gehen und von den letzteren als festen Punkten aus vier weitere Pfosten in den ungeraden $^1/_8$ln unterstützen.

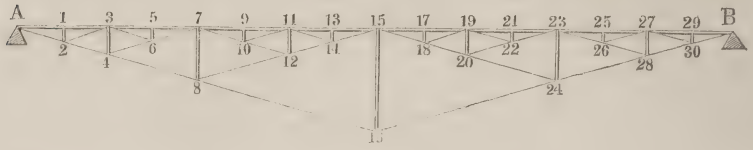
Um die in diesem Dachstuhle wirkenden Kräfte zu bestimmen, ist es am zweckmässigsten, die von der Armirung des Balkens herrührenden Kräfte von den vom Fachwerk herrührenden zu trennen, denn beide sind ganz unabhängig von einander. Schneidet man z. B. zwischen A und 1 oder zwischen 5 und 7, so ist es klar, dass die in diesen Schnitten wirkenden Kräfte durchaus nicht geändert werden: man mag gar keinen, viele oder wenig Zwischenpfosten annehmen, so dass der Sparren sich von A bis 7 frei trägt, oder man mag dann 1, 3, 7 ... $(2^n - 1)$ Pfosten annehmen; vorausgesetzt dass sich die Belastung des Dachstuhls nicht ändere, denn dann ändern sich ja auch die ausserhalb jener Schnitte wirkenden Kräfte nicht.

Wir bestimmen also zuerst die von der Armirung herrührenden Kräfte. Um diese Bestimmung etwas übersichtlich zu machen, müssen wir mehr als drei Pfosten annehmen, und zeichnen daher den Kräfteplan für den Balken (Fig. 168 S. 422), unter dem man sich z. B. einen Brückenträger ähnlich dem in Förster's Bauzeitung 1842 Bl. CDLXXII von Wiegmann gegebenen vorstellen kann; doch entsprechen sich in beiden Balken die Anordnungen der Schlaudern nicht vollständig, weil die Zahl der Fächer beim Wiegmann'schen Balken keine Potenz von 2 ist.

Von einem Auflager A ausgehend zerlegen wir die Belastung $A3$ (Fig. 169) des ersten Pfostens in die Seitenkräfte 2 A und 2 3 nach der Richtung der auch in Fig. 168 gleichbezeichneten Schlaudern. Dann ist 2 3 die Spannung in der Schlauder 2 3, weil sie keinen andern Pfosten, als 1 2 trägt und ihre Projection auf eine Verticale 2 6 stellt den von dieser Schlauder herrührenden Druck auf den Pfosten 3 4 dar. Der Totaldruck auf diesen Pfosten besteht ausserdem noch aus der Belastung 3 3 (Fig. 169) des Punktes 3 (Fig. 168) und aus der verticalen Seitenkraft der Schlauder 3 6; die letztere erhalten wir dadurch, dass wir die Belastung 3 7 (Fig. 169) des Pfostens 5 6 (Fig. 168) mittelst des Kräftedreiecks 3 6 7 in die Seitenkräfte 3 6 und 6 7 (Fig. 169) zerlegen. Indem wir die Spitze 6 dieses Dreiecks unter die Spitze 2 des vorigen Kräftedreiecks

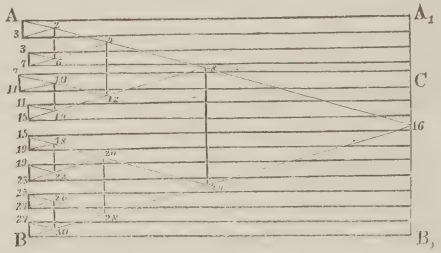
stellen, giebt uns die Länge 2 6 den Druck des in der Mitte zwischen diesen so bezeichneten Punkten (Fig. 168) stehenden Pfostens 3 4. Dieser Druck zerlegt sich jetzt in zwei Seitenkräfte nach den Rich-

Fig. 168.



tungen 2 4 und 4 6 mittelst des Kräftedreiecks 2 4 6 (Fig. 169) und giebt uns die Spannung 4 6 in der entsprechenden Schlauderstrecke. Diese mit der vom Pfosten 5 6 (Fig. 168) herrührende Spannung

Fig. 169.



6 7 (Fig. 169) zusammengesetzt, giebt die totale Spannung 4 7 der Schlauder 6 7 (Fig. 168) oben bei dem Pfosten 7 8.

Ganz genau so, wie wir jetzt diese Totalspannung in 6 7 mittelst der zwischen *A* und 7 wirkenden Kräfte bestimmt haben, bestimmen wir auch die Spannung der Schlauderstrecke 7 10 mittelst der zwischen 7 und 15 wirkenden Kräfte, welche das Kräftedreieck 7 12 15 (Fig. 169) geben, das dem construirten Kräftedreieck *A* 4 7 in allen seinen Details entspricht, und in dem die Länge 7 12 die gesuchte Spannung darstellt. Indem wir schliesslich den Punkt 12 genau unter den Punkt 4 bringen, erhalten wir in 4 12 den Druck im Pfosten 7 8 (Fig. 168), der mitten zwischen den beiden Punkten 7 und 8 steht: denn dieser Druck setzt sich zusammen aus der Belastung 7 7 (Fig. 169) des Pfostens selbst, und aus den verticalen Seitenkräften, d. h. aus den verticalen Projectionen der Spannungen 7 4 und 7 12. Der Druck des Pfostens 4 12 endlich giebt durch Zerlegung die von ihm her-

rührenden Spannungen 4 8 und 8 12 in den gleichnamigen Schlauderstrecken. Endlich giebt die Addition der letzteren zu den von Pfosten 11 und 13 (Fig. 168) herrührenden Spannungen, die Spannungen 12 8, 14 8, 15 8 (Fig. 169) in den Strecken 12 8, 14 12, 15 14 (Fig. 168).

Alles Weitere ist nun nichts weiter, als eine Repetition des Vorausgegangenen. Wir können uns daher etwas kürzer fassen. Das besonders construirte Dreieck 15 24 *B* giebt die Kräfte der zweiten Trägerhälfte, wie das Dreieck *A* 8 15 die der erstern giebt. Indem man den Punkt 24 unter 8 bringt, erhält man den Druck im Mittelpfosten gleich 8 24, von dem der Theil 15 15 die Belastung desselben darstellt. Dieser Druck zerlegt sich in die Seitenkräfte 16 8 und 16 24 nach der Richtung der Schlaudern am Fuss des Pfostens. Diese zu den früher schon bsstimmten addirt

geben die Spannungen	16 24, 16 28, 16 30, 16 *B*
in den Strecken	16 24, 24 28, 28 30, 30 *B*
ebenso die Spannungen	16 8, 16 4, 16 2, 16 *A*
in den Strecken	16 8, 8 4, 4 2, 2 *A*.

Auf dieselbe Weise werden die Spannungen aller Strecken einer Schlauder durch die mit den gleichen Ziffern bezeichneten geraden Linien des Kräftepolygons dargestellt.

Betrachtet man jeden Pfosten als Diagonale eines Rhombus, so trägt in Folge der obigen Anordnung der in ihm wirkende Druck im Kräftepolygon die Zeichen der andern Diagonale.

Die Belastungen auf die Auflager sind natürlich nichts anderes, als die verticalen Seitenkräfte der Endschlaudern *A* 2 und 30 *B* (Fig. 168); wir erhalten sie daher, indem wir die entsprechenden Strecken *A* 16 und 16 *B* (Fig. 169) auf die Verticale durch 16 projiciren in A_1 16 und 16 B_1.

Dieselbe Figur giebt uns auch den Druck in jeder einzelnen Strecke des Druckbaums; schneiden wir z. B. zwischen 9 und 11 (Fig. 168), so muss offenbar der Druck des einzigen durchschnitten rückwirkend angegriffenen Elementes gleich der Summe aller horizontalen Seitenkräfte der durchschnittenen vier Schlaudern 16, 8, 12, 10, 11 sein. Die Spannungen in denselben erscheinen in Fig. 169 fortlaufend aneinander gereiht und tragen dieselben Ziffern. Die Horizontalprojection dieses Zuges oder die Linie 11 *C* stellt daher auch den Druck in der Strecke des Druckbaums

9 11 dar. Die 16 Horizotallinien dieser Figur stellen daher die Pressungen in den 16 Strecken des Druckbaums dar.

Bemerkt man noch, dass die Verticale C 16 als Differenz zwischen dem Auflagerdruck A, 16 und den bei 1 3 5 7 9 wirkenden Belastungen der dem Schnitt vorausgehenden Pfosten, die Summe der ausserhalb dieses Schnittes wirkenden Kräfte darstellt: so folgt, dass das Gleichgewicht der Kräfte in den geschnittenen Constructionsgliedern mit den ausserhalb des Schnittes wirkenden Kräften durch das geschlossene Polygon C 16 8 12 10 11 C dargestellt wird.

Auf dieselbe Weise kann das Gleichgewicht in allen Schnitten und an allen Knotenpunkten durch geschlossene Polygone der Fig. 169 dargestellt werden.

Gar einfach gestaltet sich nun der Kräfteplan eines aus zwei solchen armirten Balken bestehenden französischen Dachstuhls.

Taf. $19_3'$ wurden auf der Verticalen P die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte des Dachstuhls Taf. 19_3 aufgetragen; sie sind genau dieselben, wie die des englischen Dachstuhls Taf. 19_2 und $_2'$, und wir behalten auch hier die dort gemachte Bezeichnung bei. Indem wir also den Auflagerdruck bei A oder $P_{1\,3\,5\,7}$ in zwei zum Sparren und zur untern Streckschiene parallele Seitenkräfte zerlegen, erhalten wir wie dort den Druck im Sparren $= A\,P_1$ und den in der Streckschiene $= A\,P_7$ (Taf. $19_3'$), wo P_1 den obersten und P_7 den untersten Punkt des Kräftepolygons bezeichnen sollen. Von A ausgehend, haben wir nun ganz wie in Fig. 169 die von der Armirung des Balkens herrührenden Kräfte im Dreieck A 4 7 construirt.

A 4 ist also der von der Armirung herrührende Theil der Spannung in der untern Streckschiene, und $4\,P_7$ der von der Dachstuhlconstruction als Fachwerk betrachtet herrührende. Zerlegt man daher diesen letztern in zwei Seitenkräfte nach der Richtung von 4 7 und der bei 4 ausmündenden horizontalen Streckschiene (Taf. 19_3): so giebt das entstehende Kräftedreieck $4\,4'\,P_7$ in $4'\,P_7$ die Spannung der horizontalen Streckschiene, weil die Spannung in derselben von der Armirung ganz unabhängig ist.

Die Linie 4 4′ stellt die Kraft dar, um welche die Spannung in jeder der beiden Strecken 4 6 7 (Taf. 19_3) vergrössert wird, gerade so wie $4\,P_7$ die Spannungen A 2 4 vergrössert. Es sind also schliesslich $A\,P_7$, $2\,P_7$ und 7 4′, 6 4′ die Spannungen in den

Strecken $A2$, 24 und 76, 64 des Dachstuhls. Während 23 und 36 die Spannungen in den gleich bezeichneten Strecken bezeichnen.

Der nur von der Armirung abhängige Druck in den Pfosten ist durch die Linien $A3$, 26 und 37 gegeben. Endlich stellen die zum Sparren parallel laufenden vier Doppellinien die Pressungen in dessen vier Strecken dar. Denn theilt man dieselben durch zwei senkrecht auf ihnen stehende und durch 4 und P_7 gehende Linien in drei Theile, so stellt der unterste Theil die von der Armirung, der mittlere den für alle Strecken gleichen vom Fachwerk, endlich der oberste den von den Seitenkräften herrührenden Theil dar, die entstehen, wenn die Lasten P_{1357} nach der Richtung des treffenden Pfostens und nach der des Streckbaums zerlegt werden; es versteht sich von selbst, dass diese letzteren nach unten gegen A hin zunehmen.

Die Richtigkeit der obigen Constructionen ergiebt sich am besten aus den geschlossenen Polygonen, welche das Gleichgewicht beliebiger Punkte und Schnitte darstellen. So z. B. stellt das Polygon $P_7 2 6 4' P_7$ das Gleichgewicht der Kräfte dar, welche in den bei dem Punkt 4 des Dachstuhls aneinander stossenden Constructionstheilen wirken. Und das Polygon $P_{57} 3 6 4' P_{57}$ stellt das Gleichgewicht der Kräfte in den Constructionstheilen dar, welche durch einen Schnitt zwischen 4 und 5 geschnitten wurden, denn P_{57} ist die Summe der ausserhalb dieses Schnittes wirkenden Kräfte.

Wenige Worte werden genügen, um nach Obigem den Kräfteplan des belgischen Dachstuhls (Taf. 19_I) zu erklären. P_{135} (Taf. $19_I'$) sind die Belastungen der Knotenpunkte 135; zwei Parallele durch die Endpunkte von P zum Sparren und zur untern Streckschiene geben das Kräftedreieck, dessen Spitze in 1 liegt. $1 P_5$ (wo auch wieder P_5 für den untersten Punkt von P gesetzt wird) ist die Spannung in der untern Streckschiene. An diese wurde, von 1 ausgehend, das Armirungsdreieck $1 3 2'$ angelehnt. 12 und 23 stellen die Pressungen in den gleichbezeichneten Streben des Dachstuhls dar. $1 2'$ ist daher die von der Armirung herrührende Spannung in den untern Streckschienen und $2' P_5$ die von dem als Fachwerk betrachteten Theile der Construction herrührende Spannung. Diese letztere zerlegt in zwei Seitenkräfte

nach den Richtungen 2 4 und 2 5 (Taf. 19_1), giebt in 4 P_5 Taf. $19_1'$ die Spannung in der horizontalen Streckschiene.

P_5 1, 3 4 und 4 P_5 stellen die in den verschiedenen Schienen wirkenden Spannungen und die drei Parallelen zum Sparren den Druck in den drei Strecken desselben dar. Das Gleichgewicht um den Punkt 2 zeigt das geschlossene Polygon P_5 1 2 3 4 P_5.

119. Unregelmässige Dachstühle.

Als unregelmässige Dachstuhlformen wollen wir solche bezeichnen, die keiner der bisher behandelten ähnlich sind. Die Kräfte, die an denselben wirken, können daher nach keinem der Kräftepläne (Taf. $19_{1\,2\,3\,4\,6}$) bestimmt werden, auch regelmässige Fachwerke oder Bogen wollen wir nicht hierher zählen, weil für diese entweder nach den Regeln dieses oder des folgenden Abschnittes die Kräftepläne gezeichnet werden können.

Aus dem Wort unregelmässig geht schon hervor, dass man keine bestimmten Regeln über die Construction der am Stuhl wirkenden Kräfte wird aufstellen können, denn schon die Zahl dieser Formen muss ja als ganz unbestimmt angenommen werden; immerhin wird eine der beiden folgenden Verfahrungsarten meistens zum Ziele führen.

Entweder man betrachte irgend einen durchlaufenden und zusammenhängenden Zug von Constructionsgliedern als Seilpolygon, suche durch die gegebenen Verhältnisse die an den einzelnen Knotenpunkten des Zuges wirkenden Kräfte zu bestimmen und setze sie mittelst eines Kräftepolygons zusammen.

Oder: man trage die Belastungen des Daches gerade so, als ob es sich darum handle, den Mitteldruck dieser Belastungen zu bestimmen, auf einer Verticalen auf, führe wie bei dem Fachwerk Schnitte durch die Construction und bestimme auf irgend eine Weise die ausserhalb derselben wirkenden Kräfte.

Es kann natürlich nur von der Form des Dachstuhls abhängen, welcher dieser beiden Methoden der Vorzug zu geben sei, und wir schliessen die Untersuchungen über die Dachstühle, indem wir die erste auf die Berner Schützenfesthalle und die zweite auf einen ziemlich allgemein üblichen Dachstuhl einer runden Locomotivremise anwenden.

In der Schützenfesthalle (Taf. 19_5) betrachten wir den Sparren und die beiden Hauptstreben, welche die Angriffspunkte der Kräfte (12) (345) (67) 9 (10 11) miteinander verbinden als Seilpolygon, und construiren dazu den Kräfteplan (Taf. $19_5'$), der sich specieller auf die linke Hälfte des Stuhles (Taf. 19_5) bezieht, in der wie gewöhnlich alle gespannten Constructionstheile mit einem, alle comprimirten aber mit zwei Strichen angedeutet sind, während in der rechten die Balken selbst dargestellt sind.

Die Belastung 2 im Scheitel zerlegt sich nach den Richtungen der beiden Hauptstreben; wir erhalten sie Taf. $19_5'$ dadurch, dass wir über 2 das gleichschenkelige Dreieck construiren, dessen Schenkel mit den Streben parallel laufen. Indem wir den Druck in der rechtseitigen Strebe als erste am Seilpolygon wirkende Kraft 1 betrachten, bezeichnen wir den Scheitel des Dreiecks als Pol mit O, während wir den Druck in der linken Strebe als Strahl von O nur punktiren.

Die Belastung 3 zerlegt sich in zwei Seitenkräfte nach der Richtung 4 des Sparrens und nach der Richtung (3 4) des schiefen Pfostens. Wir betrachten letztere als Mittelkraft von 3 und 4 und bestimmen daher 4, indem wir dessen Länge Taf. $19_5'$ durch die Parallele (3 4) zum gleichbezeichneten Pfosten abschneiden.

Die Grösse des Horizontalschubs 5 bestimmt sich dadurch, dass die Mittelkraft 1 2 3 4 5 die Richtung der treffenden Seilpolygonseite, d. h. der Hauptstrebe, haben muss, und wird daher durch die Parallele O (56) zu derselben abgeschnitten.

Wollten wir jetzt bei 8 (Taf. 19_5) den Druck der Hauptstrebe einfach nach der Richtung der Verticalen 8 und nach der der Strebe im Seitenschiff zerlegen, so würden wir in letzterer eine Kraft erhalten, der die Belastung 9 nicht mehr das Gleichgewicht halten könnte. Das Heben des Daches bei 9 wird nur durch die relative Widerstandsfähigkeit des oben und unten bei 6 und 7 gehaltenen Hauptpfostens, also durch eine in der Richtung (6 7) wirkende Kraft verhindert. Es ist klar übrigens, dass die zweite punktirte Strebe des Seitenschiffs gar nichts zu tragen hat, denn das geringste Nachgeben, Ausbiegen bei (6 7) hebt das Dach von ihr weg. Die Belastung 9 zerlegt sich demnach in eine Seitenkraft nach der Richtung der Strebe des Seitenschiffs und nach der Richtung des Sparrens; in beiden wirken keine andern Kräfte; da sie noch zudem Seilpolygonseiten sind, so erhalten wir die Lage der Kraft 9

im Kräftepolygon Taf. $19_5'$ dadurch, dass wir durch O zwei (nicht ausgezogene) Parallelen O (7 9) und O (9 10) zu ihnen ziehen, die so lang sind, dass die verticalen Entfernungen ihrer Endpunkte gleich der Kraft 9 sind.

Wir kennen jetzt die Pressungen O (5 6) und O (7 9) in den auf dem Mittelpfosten sitzenden zwei Streben; sie erscheinen in Taf. $19_5'$ schon zusammengesetzt, und ihre Mittelkraft zerlegt sich nach der Richtung 7 und (6 7). Erstere ist durch die verticale, letztere durch die horizontale Entfernung der beiden Punkte (5 6) und (7 9) dargestellt.

Der Widerstand (6 7) wird nicht durch eine Zange oder durch ein anderes Constructionsglied, sondern, wie wir schon bemerkten, durch den relativen Widerstand des Mittelpfostens ausgeübt, und zerlegt sich daher in die beiden Seitenkräfte 6 und 7 am Kopf und Fuss des Pfostens. Um diese zu erhalten, betrachte man in Taf. 19_5 den Linienzug 5 8 7 für einen Moment als ein Seilpolygon, und die feinpunktirte Linie 5 7 als dessen Schlusslinie für die Totalkraft (6 7) Taf. $19_5'$; dann ist der Schnitt des mit der Hauptstrebe parallel laufenden Strahles O (5 6) mit der Verticalen 9 der Pol und eine auch feinpunktirte Parallele zur Schlusslinie theilt (6 7) in die Kräfte 6 und 7. Wir haben 8 auf diesen Theilungspunkt aufgestellt, sodass oben zwischen 8 und 9 die Kraft 7 nochmals erscheint.

Am Knotenpunkt 10 12 wirken drei Kräfte: der von der frühern Zerlegung der Kraft 3 herrührende Sparrenschub 10, die horizontale Spannung 11 und die verticale Belastung 12.

Der Sparrenschub ist bekannt, er ist entgegengesetzt $= 4$, wie es durch Pfeile angedeutet ist. 11 bestimmt sich dadurch, dass die letzte Seilpolygonseite, der Mittelpfosten, vertical ist, und wird daher durch den verticalen Strahl O (11 12) abgeschnitten. Fügt man die bekannte Belastung 12 des Knotenpunktes bei, so erhält man in O Ende 12 den verticalen Druck in der obern Hälfte des Mittelpfostens. Der Druck in der untern Hälfte vergrössert sich dann noch um die Kraft 8. Ausser diesen wirken noch die Kräfte 6 und 7 an ihm.

Der äussere Theil der obern Zange ist mit $6 + 11$ gespannt, der mittlere innere mit $6 + 11 - 5$; wäre $5 > 6 + 11$, so wäre dieser mittlere Theil comprimirt, nicht gespannt.

Der Sparren hat vermöge seiner relativen Widerstandsfähig-

keit die gleichförmig vertheilte Dachbelastung auf die Knotenpunkte 3 12 9 zu übertragen, ausserdem ist der oberste nur punktirte Theil desselben gar nicht in Anspruch genommen, der mit zwei Strichen bezeichnete Theil 3 12 durch $10 = -4$ comprimirt, der Theil 12 9 mit *O* (9 10) gespannt und der unterste wieder gar nicht belastet.

Ein Aussenpfosten hat durchaus nichts als seine verticale Dachbelastung zu tragen. Ebenso wirkt in allen übrigen Constructionstheilen immer nur eine durch das Kräftepolygon direct gegebene Kraft.

Bei der vorstehenden Bestimmung der an dieser Halle wirkenden Kräfte haben wir die eine Strebe und die Zange des Seitenschiffs ganz ausser Acht gelassen, damit wollten wir aber durchaus nicht andeuten, dass sie überflüssig seien; durch vermehrte Dreieckbildung tragen sie zur Steifigkeit bei, und die Zange namentlich überträgt einen Theil der relativ belastenden Kraft 6 7 vom Mittelpfosten auch auf alle andern Constructionstheile; wie viel aber von derselben auf jeden einzelnen trifft, könnte nur durch die Theorie der Elasticität bestimmt werden, worauf wir hier nicht mehr eintreten.

Schliesslich machen wir darauf aufmerksam, dass dieser und der folgende Kräfteplan in doppelt so grossem Maassstab als wie die frühern ausgeführt sind. Dessenungeachtet sind trotz der gleichen Belastung die an den einzelnen Theilen wirkenden Kräfte viel kleiner als wie die an jenen wirkende. Ein Vergleich dieser verschiedenen Kräftepläne zeigt daher deutlich, wie gross der Einfluss der verminderten Spannweite und der steileren Stellung der tragenden Streben ist.

Die Locomotivrotunde, deren Kräfteplan wir zum Schluss noch bestimmen wollen, besteht aus 8 ganzen oder 16 Halbgespärren, wie sie in Taf. 19_7 dargestellt sind. Auf der linken Seite sind die Balken selbst, auf der rechten deren Mittellinien und zwar, wie gewöhnlich, mit einem oder zwei Strichen gezeichnet, je nachdem die treffenden Theile absolut oder rückwirkend in Anspruch genommen sind.

Die Totalbelastung des Daches wurde pro □Mtr. Horizontalprojection desselben zu $^1/_3$ Tn. angenommen und mittelst einer kurzen einfachen graphischen Construction, die wir nicht geben zu müssen glaubten, die bei den ungeraden Knotenpunkten wirken-

den verticalen Kräfte bestimmt. Im Kräftepolygon Taf. $19_7'$ wurden sie als $P_{1\,3\,5\,7\,9}$ auf einer Verticallinie aufgetragen.

Wir betrachten nun den innern Theil als ein gewöhnliches Fachwerk, auf dessen obern Streckbaum wie auf Taf. 16 die ungeraden Knotenpunkte 1 3 5 und auf dessen unteren die geraden 4 6 liegen und führen, von der Mitte der Rotunde ausgehend, nacheinander Schnitte zwischen 1 3, 3 4, ... durch die Construction: dann sind die ausserhalb derselben wirkenden Kräfte bestimmt, weil in der Mitte kein Stützpunkt sich befindet und demnach die Reaction des Widerlagers, die wir gewöhnlich mit A bezeichnet haben, auf dieser Seite bekannt, nämlich $= 0$ ist. Mit Umgehung des Seilpolygons können wir also unmittelbar mit der Bestimmung der in den einzelnen Schnitten wirkenden Kräfte auf die Weise beginnen, wie bei der Construction des Kräfteplanes für das allgemeine Fachwerk (Taf. 16_3), nachdem einmal die Reactionen der Widerlager bekannt waren.

Die ausserhalb des zwischen 1 und 3 Taf. 19_7 durchgeführten Schnittes wirkende Kraft ist $= P_1$ (Taf. $19_7'$). Construirt man über dieser Kraft als Basis ein Dreieck, dessen Seiten parallel mit den Streckbäumen laufen und dessen Spitze mit 3 bezeichnet wurde: so stellen die Seiten die Kräfte dar, die in dem Schnitte wirken, nämlich die Spannung und den Druck in den äussersten Strecken des Sparrens und der Hauptstrebe.

Die ausserhalb des zwischen 3 und 4 Taf. 19_7 durchgeführten Schnittes wirkende Kraft ist $= 1 + 3$ oder $P_{1\,3}$ Taf. $19_7'$. Von den geschnittenen Constructionstheilen ist bereits der in der Hauptstrebe wirkende, mit (1 4) bezeichnete Druck bekannt. Wird daher am untern Endpunkt von $P_{1\,3}$ in Richtung und Grösse die Kraft (1 4) nochmals aufgetragen, so hat man nur durch den Endpunkt 3_1 derselben und durch den obern Endpunkt von $P_{1\,3}$ zwei Parallelen zum Sparren und zur Strebe $3_1\,4$ zu führen, um den Druck in der letztern und die Spannung in der Strecke 3 5 des Sparrens zu erhalten.

Genau auf dieselbe Weise geben nacheinander die Vierecke, deren gegenüberliegenden Seiten 4 5, $P_{1\,3}$ und $5_1\,6$, $P_{1\,3\,5}$ sind, die Kräfte, welche an den Theilen wirken, die durch die Schnitte zwischen 4 und 5 und zwischen 5 und 6 geschnitten werden.

Den Druck in der Strebe 6 7 erhält man unmittelbar durch Zerlegung der Last P_7 nach ihr und nach der Richtung des Spar-

rens, weil diese eben nur auf eine einzige Weise nach diesen beiden Richtungen zerlegt werden kann. Das Dreieck, dessen Basis P_7 und dessen Spitze 6_1 ist, giebt beide Kräfte. (6 7) ist der Druck in der Strebe; von der andern Seitenkraft wird der punktirte und mit (5 7) bezeichnete Theil durch die Spannung in der Sparrenstrecke (5 7) aufgehoben und nur der ausgezogene Theil (7 9) bleibt als Druck in der gleichbezeichneten Sparrenstrecke übrig. Die horizontale Seitenkraft (6_1 9_1) dieser letztern ist die Spannung in der untersten Zange; ihre verticale Seitenkraft + der Last 9, also die Strecke 9 9_1 ist, wie es Taf. $19_7'$ angedeutet, der Druck B auf die Aussenmauer; endlich ist die Verticallinie 6 9_1 der Druck A auf den Mittelpfosten, denn das geschlossene Polygon 6 5_1 P_{57} 6_1 9_1 6 stellt das Gleichgewicht um den Knotenpunkt 6 dar. In diesem Polygon liegt die Strecke 6 5_1 in der Strecke 9_1 6, und P_{57} bezeichnet einen Punkt.

Hiermit wären die sämmtlichen an diesem Dachstuhl wirkenden Kräfte bestimmt. Auch bei diesem wie bei dem der Schützenfesthalle von Bern wurde angenommen, dass einzelne Constructionstheile keinen Kräften zu widerstehen haben, sondern nur dazu beitragen, die Steifigkeit zu vergrössern. Die Verlängerung der Strebe 3 4 nimmt nicht die Seitenkraft der Last 3 auf, sondern es wird dieselbe von der Strecke 4 6 der Hauptstrebe aufgenommen, weil erstere sich auf die nachgiebige Mitte des Pfostens A, letztere aber sich auf den festen Knotenpunkt 6 stützt.

Im Kräfteplan dieses Dachstuhls wurden wie in Taf. $19_5'$ die Striche weggelassen, durch welche wir andeuten, dass der der treffenden Kraft entgegengesetzte Constructionstheil rückwirkend in Anspruch genommen sei. Die Figuren sind so klein, dass sie durch diese Striche undeutlich werden.

Auf ähnliche Weise wird man sich bei dem Zeichnen aller Kräftepläne unregelmässiger Fachwerke benehmen müssen. Einige Beispiele werden wir übrigens noch später bei den Gewölben bringen, indem die Lehrgerüste, die zum Bau derselben dienen, ebenfalls zu den unregelmässigen Fachwerken gehören.

SECHSTER ABSCHNITT.

DER BOGEN.

Erstes Kapitel.

Die Gewölbetheorie.

120. Die Gewölbe, Bogen und Ketten.

In diesem Abschnitt wollen wir die Stabilität derjenigen Constructionen untersuchen, welche den Kräften, die ausserhalb eines durch sie geführten Schnittes wirken, nur ein oder höchstens zwei Constructionsglieder entgegenzusetzen haben. Laut der Nr. 106 S. 360 gegebenen Definition gehören eigentlich nur die erstern zu den Bogen, allein die Kräftepläne der letztern bieten so viel Analogie mit denen der erstern dar, dass es genügen wird, später kurz anzudeuten, wie die Kräftepläne der Bogen für das Pechmann'sche Bogenhängwerk und den Laves'schen Balken zu modificiren sind.

Schon durch die Fig. 80 und 81 S. 126 haben wir angedeutet, wie einer gewissen Zahl aufeinander folgender Kräfte durch einen gedrückten Bogen oder durch eine gespannte Kette widerstanden werden kann, und unsere ganze Bogentheorie ist eigentlich nichts Anderes als eine weitere Entwickelung von Nr. 47 in Anwendung auf den Bogen und die Kette. Denn wie dort, wollen wir uns auch hier auf parallele Kräfte beschränken, indem selten andere Belastungen vorkommen, wenn von den Reactionen der Widerlager abgesehen wird.

Bei dem Balken und auch theilweise bei dem Fachwerk kommt es vor, dass ein und dasselbe Constructionselement auf verschie-

dene Weise, bald absolut, bald rückwirkend, in Anspruch genommen ist, weil beinahe bei je zwei aufeinander folgenden Schnitten und bei je zwei verschiedenen Belastungsarten die Lage der zu zerlegenden Kräfte verschieden ist bezüglich der Richtungen, nach welchen sie zu zerlegen sind. Bei dem Bogen ist dies weniger der Fall, die Richtungen der einzelnen Bogentheile dürfen nie viel von den einzelnen Seilpolygonstrecken abweichen, welche die an jenen wirkenden Kräfte geben. Da ferner in den Seilpolygonen von Fig. 80 und 81 die Richtungen der Kräfte immer nach der gleichen Seite hin gerichtet sind, so wird auch jede Bogenstrecke, wenn ihre Richtung nahezu mit der der Seilpolygonstrecke zusammenfällt, innerhalb der ganzen Oeffnung auf gleiche Weise in Anspruch genommen sein. Findet dies aber vollkommen statt, ist ein Bogen in allen seinen Querschnittselementen nur rückwirkend oder nur absolut in Anspruch genommen, so wird es möglich, denselben aus Materialien herzustellen, deren Widerstand gegen relative Inanspruchnahme sehr gering ist; aus aneinander gereihten Steinen z. B. oder aus Drähten und Ketten; erstere besitzen wegen der Fugen keine oder nur eine sehr geringe relative Widerstandsfähigkeit, letztere gar keine wegen der kleinen Querschnittsdimensionen. Mit den Steinen werden nur gesprengte Bogen (Gewölbe) gebildet, deren Dimensionen so gross sein müssen, dass ihr Centralkern in jeden Querschnitt das Seilpolygon der an ihm wirkenden Kräfte, welche vorzugsweise aus deren Eigengewicht bestehen, umfasst, weil nur dann laut Nr. 67 S. 180 kein Theil dieses Querschnitts gespannt wird.

Mit Drähten und Ketten werden nur abwärts gekehrte hängende Bogen, Hängebrücken, gebildet. Sie sind so biegsam, dass ihre Form sich vollkommen dem Seilpolygon der an ihnen wirkenden Kräfte anschmiegen kann; da ferner ihr Schwerpunkt natürlicher Weise unter dem Aufhängepunkte liegt, und da derselbe durch eine unsymmetrische zufällige Belastung immer etwas gehoben wird: so kehrt dieser und mit ihm auch die verschobene Form der Kette immer wieder in die ursprüngliche Lage zurück, wenn die zufällige Belastung entfernt wird. Man kann also zum Bau einer Kettenbrücke einen biegsamen Bogen verwenden, während das Gewölbe starr sein muss, weil bei einer Formänderung dessen Schwerpunkt sich senkt und dieses daher nie wieder die ursprüngliche Lage annimmt.

Zwischen dem Gewölbe und der Kette liegt der Bogen im engern Sinne. Er besteht aus einem gebogenen Balken, dessen Querschnittselemente absolut und rückwirkend und demnach auch der Biegung widerstehen können. Bei der Bestimmung der Stabilitätsverhältnisse des Bogens hat man sich früher immer unter seiner Axe einen elastischen gebogenen Stab gedacht, und zur Ermittelung der an ihm wirkenden Kräfte die Theorie der Elasticität in ähnlicher Weise zu Hülfe genommen, wie wir es früher bei Bestimmung der Pfeilerreactionen continuirlicher Balken thaten. Allein in der neuern Zeit hat man auch die Bogen, deren Schenkel nicht mit besonderer Sorgfalt durch Fachwerk versteift sind, so construirt, dass das Seilpolygon der an ihnen wirkenden Kräfte in jedem Querschnitt in ihren Centralkern fällt, sodass das Material nur rückwirkend in demselben in Anspruch genommen ist. Wenn diese Construction auch nicht für alle Querschnitte als Forderung hingestellt werden kann, so sollte sie doch für die Bogenanfänge beobachtet werden. Denn von diesen gilt Alles, was von der Gewölbfuge gilt, und es verträgt sich nicht mit der Solidität einer Brücke, wenn jene Fuge sich auf der einen Seite öffnet; und für die übrigen Theile des Bogens wird es gewiss nun zur Stabilität nur beitragen, wenn die Drucklinie des Bogens in den Centralkern fällt. Die Biegungen und Formänderungen des Bogens und mithin auch die von ihnen herrührenden Kräfte werden geringer sein, als wenn das Seilpolygon der am Bogen wirkenden Kräfte weit über den Centralkern hinausfällt, so gering, dass man die von der Biegung des Bogens herrührenden Kräfte den eigentlichen Druckkräften gegenüber wird vernachlässigen können. Von diesem Standpunkt ausgehend, werden wir die am Bogen selbst und, wenn dessen Gewölbschenkel versteift sind, die an diesen Füllungsgliedern wirkenden Kräfte bestimmen, ohne die Lehre der Elasticität zu Hülfe zu nehmen.

Wir beginnen nun damit, das Gleichgewicht eines Gewölbes zu untersuchen.

121. Das Gleiten in den Gewölbfugen.

Das Gewölbe ist eigentlich nichts als eine gebogene Mauer. An der vertical stehenden Mauer, die vielleicht auch noch Lasten

unterstützt, die keinen Horizontalschub ausüben, z. B. die Endpunkte richtig construirter Fachwerke, wirken nur verticale Kräfte; die Mittelkraft derselben ist in Richtung und Lage von vornherein bekannt, und wir ziehen es daher vor, zuerst die Stabilität einer gewöhnlichen Mauer zu untersuchen, um nachher die Resultate unmittelbar auf das Gewölbe zu übertragen.

Wie gewöhnlich, nehmen wir an, es seien die einzelnen Mauertheile durch ebene Fugen, durch sogenannte Lagerfugen von einander getrennt, die auf die ganze Breite der Mauer durchlaufen und deren Entfernung von den Dimensionen der Bausteine abhängt. Diese Lagerfugen sind die schwachen Stellen der Mauer, indem die Trennung in denselben durch die grösste Widerstandsfähigkeit der Steine zwischen zwei aufeinander folgende Fugen nicht verhindert werden kann, wenn das Bestreben dieser Trennung vorhanden ist; und indem wir von der Widerstandsfähigkeit des Mörtels abstrahiren, nehmen wir an, es könne bei einem durch eine Lagerfuge geführten Schnitte die Mauer unter ihm nur einem senkrechten Druck des obern Mauertheils und einer Kraft parallel mit der Fuge widerstehen, die die Reibung nicht überschreiten darf, welche durch jenen auf der Fuge senkrecht stehenden Druck erzeugt wird. Wäre die zur Fuge parallele Seitenkraft der ausser ihr wirkenden Kräfte grösser als die von der zu ihr normalen Seitenkraft herrührende Reibung, so würde der Mauertheil über der Fuge auf dieser weggleiten.

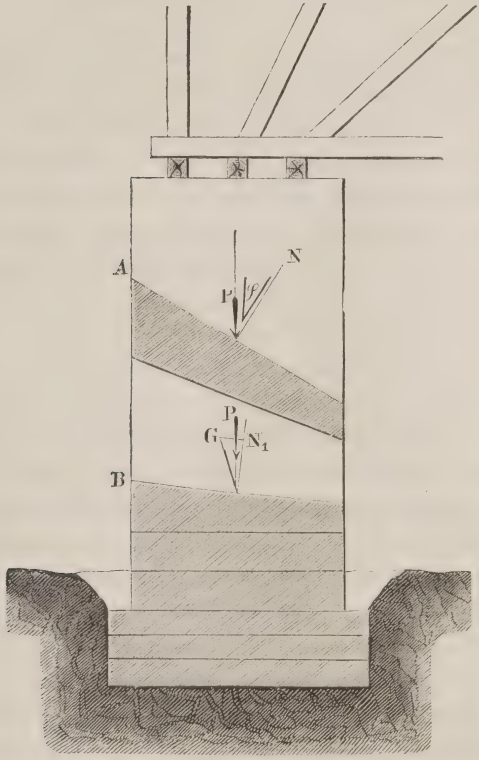
Auf die Reibung werden wir bei der Theorie der Stütz- und Futtermauern ausführlicher (Abschnitt VIII Nr. 151) zurückkommen und beweisen, dass ein Gleiten statt- oder nicht stattfindet, je nachdem der Winkel, den die Mittelkraft der am Mauertheil über der Fuge wirkenden Kräfte mit der Normalen zur Fuge bildet, grösser oder kleiner ist als der Reibungswinkel. Bezeichnet z. B. φ den Reibungswinkel von Mauerwerk auf Mauerwerk, so wird Fig. 170 auf der Fuge A der obere Theil der Mauer abgleiten, weil die verticale Mittelkraft P der über A wirkenden Kräfte einen Winkel mit der Normalen N zur Fuge bildet, der $> \varphi$ ist.

Auf der Fuge B dagegen wird kein Gleiten stattfinden, weil der Winkel den P mit N_1 bildet, $< \varphi$ ist.

Früher nannte man häufig das Verhältniss der Reibung, die von der auf der Fuge normalen Seitenkraft von P herrührt, zur Seitenkraft von P, die mit der Fuge parallel läuft, oder das Ver-

hältniss des Reibungswiderstandes zur Seitenkraft von P die Gleiten verursacht, den Sicherheitscoefficienten gegen Gleiten. Er wird, wie wir später in der oben citirten Nr. 151 der Stützmauer-

Fig. 170.



theorie sehen werden, durch das Verhältniss $\frac{tg\,\varphi}{tg\,PN_1}$ oder durch das der Strecken $\frac{G\,N_1}{P\,N_1}$ ausgedrückt.

In der neuern Zeit wird dieser Ausdruck übrigens selten mehr gebraucht, sondern man giebt den Winkel $P\,N_1$ direct in Graden an.

Da man über die Fugenstellung vollkommen verfügen kann, so wird es immer möglich sein, sie senkrecht auf die Richtung der ausserhalb wirkenden Kräfte, im Beispiel Fig. 170 z. B. horizontal, oder doch wenigstens so zu stellen, dass ihre Normale höchstens um den gestatteten Winkel PN_1 von der Richtung der Mittelkraft

der ausserhalb der Fuge wirkenden Kräfte abweiche. Gleitungen in den Fugen des Mauerwerks können daher jederzeit durch die Stellung derselben vermieden werden; das Gleiten wird also durch die Construction, durch die Fugenstellung beseitigt.

122. Das Kanten.

Untersuchen wir nun, was geschieht, wenn die Mittelkraft der ausserhalb einer Mauerfuge wirkenden Kräfte sich, vom Schwerpunkt der Fugenfläche ausgehend, mehr und mehr der Kante einer Fuge unter der Voraussetzung nähert, dass der Fugenschnitt derart sei, dass kein Gleiten stattfinden könne; oder dass, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, die Richtung dieser Mittelkraft senkrecht auf der Fuge stehe.

Es ist durchaus kein Grund vorhanden, für die Vertheilung des Mitteldrucks auf die Fugenfläche andere Gesetze als bei der Vertheilung desselben auf einen Balkenquerschnitt anzunehmen; der Stein selbst sowohl als auch der Mörtel sind, wenngleich in geringerem Grade als Holz und Eisen, elastisch, mithin auch die Pressungen in jedem Theil der Fugenfläche der Annäherung der Begrenzungsflächen des obern und des untern Mauertheiles proportional; wird daher angenommen, dass diese Begrenzungsflächen nach wie vor der Belastung Ebene seien, was für Hausteine gewiss angenommen werden darf, so wird die Annäherung der beiden Flächen und demnach auch die Pressung in jedem Punkt der Entfernung dieses Punktes von der Schnittlinie der Flächen proportional sein.

Sobald aber angenommen wird, dass die Reaction der untern Mauerfläche in jedem ihrer Punkte der Entfernung von einer Linie proportional sei, so ist diese Linie durch das in Nr. 67 S. 178 Entwickelte bestimmt, wenn die Mittelkraft dieser Reactionen, d. h. die Mittelkraft der am Mauertheil ausserhalb der Fuge wirkenden Kräfte gegeben ist, weil beide im Gleichgewicht sein müssen. Diese neutrale Axe liegt also in dem Polarsystem, dessen Ordnungscurve die Centralellipse des Fugenquerschnitts ist, symmetrisch bezüglich des Schwerpunktes, zur Polaren des Punktes in welchem die Mittelkraft die Fugenfläche schneidet.

Hinsichtlich der Intensität der Reaction gilt Alles, was in Nr. 76 S. 215 über die Pressungen der Querschnittselemente eines Balkens gesagt wurde, in so fern dadurch keine Spannungen bedingt sind, weil unserer Voraussetzung gemäss das Mauerwerk denselben nicht, sondern nur Pressungen widerstehen kann. Diese letzteren entstehen aber, wenn die neutrale Axe den Querschnitt selbst schneidet; sollen daher keine Spannungen entstehen, so muss die neutrale Axe vom Querschnitt ausgeschlossen, mithin laut Definition des Centralkerns (Nr. 67 S. 179) die Mittelkraft der ausserhalb des Schnittes wirkenden Kräfte innerhalb dieses den Fugenquerschnitt schneiden. Findet dies statt, so ist laut Nr. 76 S. 216 die Pressung ϱ in jedem Punkte des Fugenquerschnittes pro Flächeneinheit durch die Formel

$$\varrho = \frac{Q}{F}\left(1 + \frac{c}{i}\right)$$

gegeben, worin, wir wiederholen die Bedeutung der Buchstaben: Q den Totaldruck auf die Querschnittsfläche, F und $\frac{c}{i}$ das Verhältniss der Entfernungen des Schwerpunktes von der neutralen Axe und von dem zu ihr parallelen Strahle des gegenüber liegenden Fugenumfangs bezeichnet.

Schneidet Q den Fugenquerschnitt in seinem Schwerpunkte, so ist die unendlich ferne Gerade die neutrale Axe, i ist ∞ und ϱ schlechtweg $= \frac{Q}{F}$.

Entfernt sich der Schnitt von Q mit dem Fugenquerschnitt in einer bestimmten Richtung vom Schwerpunkte, so nähert sich die neutrale Axe demselben, indem sie immer der bezüglich der Centralellipse jener bestimmten Richtung conjugirten Richtung parallel bleibt.

Erreicht der Schnitt des Mitteldrucks Q den Umfang des Centralkerns, so berührt die neutrale Axe den Fugenquerschnitt, und mindestens in einem Punkte seines Umfangs ist die Pressung $= 0$. Dieses ist eine Grenzlage, bei der noch alles das in Nr. 76 S. 215 vom Balkenquerschnitt Gesagte auch noch vom Mauerquerschnitt gilt.

Ist der Mauerquerschnitt symmetrisch bezüglich des Schwerpunktes, so ist in diesem Falle $\frac{c}{i} = 1$. Demnach ist, wie in

jener Nummer entwickelt wurde, $\varrho = 2\,\frac{Q}{F}$, also doppelt so gross als wenn Q durch den Schwerpunkt des Fugenquerschnitts ginge und sich gleichförmig über denselben vertheilte.

Entfernt sich aber der Schnittpunkt von Q noch weiter vom Schwerpunkte, so würden bei einem gewöhnlichen Balkenquerschnitte die Flächentheile jenseits der neutralen Axe, die jetzt den Querschnitt schneidet, gespannt sein; da aber der Voraussetzung gemäss eine Mauer keiner Spannung widerstehen kann, so ist diese in jenen Flächenelementen $= 0$. Das heisst, jene Mauertheile treten hinsichtlich ihres Widerstandes einfach aus der Function; man könnte sie entfernen, ohne dass in irgend einem auf der Seite Q der neutralen Axe liegenden Element der Druck vergrössert würde, der nach wie vor der Entfernung von dieser Axe proportional bleibt. Allein es versteht sich von selbst, dass diese Axe nicht mehr bezüglich der Centralellipse des ganzen Fugenquerschnittes, sondern nur mehr bezüglich der Ellipse des von ihm beschnittenen Querschnitts symmetrisch zur Polare des Schnittpunktes von Q, und dass dann Q auf den Umfang des Centralkerns desselben Querschnittes liegt.

Diesen Abschnitt der Fugenfläche kann man nur in einzelnen wenigen Fällen für bestimmte Lagen des Schnittpunktes von Q direct bestimmen, in den meisten Fällen wird man ihn nur durch Probiren ermitteln können.

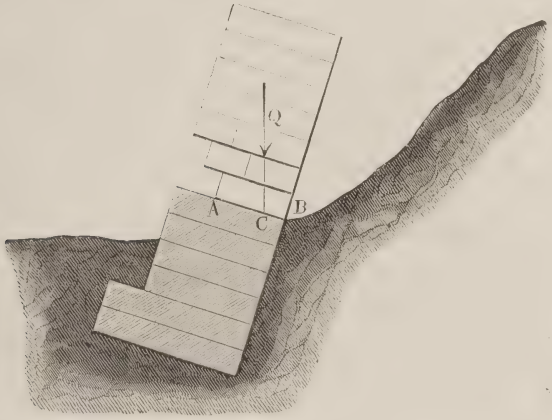
Man wird für die Centralellipse des ganzen Querschnittes die neutrale Axe bestimmen und dann nach dem Gefühl noch etwas mehr als diese von der Querschnittsfläche abschneiden, die Centralellipse der beschnittenen Fläche bestimmen und sehen, ob der Pol zum Pol der beschneidenden geraden Linie symmetrisch liegt. Hat man es nicht getroffen, so wird man nochmals probiren, indem man bezüglich der neuen Ellipse die dem Schnittpunkt von Q zugeordnete Axe sucht, u. s. f.

Eine Querschnittsfläche, für die man von vorn herein die Grösse des Abschnittes bestimmen kann, ist das Parallelogramm, wenn der Schnitt von Q auf der Verbindungslinie zweier gegenüber liegenden Seitenmitten liegt. Denn schneidet man durch eine Parallele zu diesen Seiten ein Stück vom Parallelogramm so ab, dass Q im $^1/_3$ der Verbindungslinie der gegenüber liegenden Seitenmitten des neuen Parallelogramms liegt, so liegt er auch laut

Nr. 69 a S. 182 auf dem Umfange des Centralkerns des neuen Querschnittes, was zu bewirken war.

Dieses Verhältniss haben wir Fig. 171 durch den Querschnitt einer geneigten oder sich neigenden Mauer darzustellen gesucht. Die Schwerlinie des Mauertheiles über der festen Fuge AB schneidet diese in C ausserhalb des $^1/_3$ der ganzen Fuge; nach obigem vertheilt sich dann der Druck nur auf den Theil $AB = 3 \cdot CB$

Fig. 171.



der Fuge, und zwar in der Art, dass er in B doppelt so gross ist, als wenn sich Q gleichförmig über die Querschnittsfläche AB vertheilt, oder $^2/_3$ des Druckes, den man durch gleichförmige Vertheilung von Q auf die Fläche CB erhalten würde.

Ausserhalb A ist der Druck $= 0$, und es würde daher an den Belastungs- und Gleichgewichtsverhältnissen in der Fuge AB durchaus nichts ändern, wenn man die Steine ausserhalb A herausnehmen würde, wie es in der Figur angedeutet ist.

Nähert sich C noch mehr B, so wird, weil der Druck auf eine immer kleinere Fläche AB sich concentrirt, zuletzt die rückwirkende Widerstandsfähigkeit des Mörtels erreicht; er wird bei B herausgedrückt, sodass Steine auf Steinen sitzen und sich p f e t z e n, wie die Maurer sagen; mit diesen Pfetzen ist schon eine endliche Drehung um die jetzt viel nähere Axe B verbunden; in Folge dessen wird auf der Seite A ein Oeffnen der Fugen bemerkbar, das anfangs nur durch einen schwarzen Strich neben dem weissen Mörtel sich zeigt.

Q nähert sich noch mehr der Kante, diese giebt nach; ist der Stein hart, so brechen muschel- oder schaalenförmige Stücke am Haupte des Steines aus; ist er weich, so weich, dass die von der Kalkmilch des Mörtels durchtränkte Steinmasse bei der Fuge härter als in der Mitte des Steines ist, so werden förmliche umgestürzte Sandpyramiden aus der Mitte der Steine hinausgedrückt; dabei verliert leicht Q seine Stütze, wenn es die leer gelassenen Räume der ab- und ausgedrückten Schaalen und Pyramiden schneidet, dann dreht sich der obere Mauerkörper um die zerstörte Kante, und dies heisst man das Kanten.

Zu diesen wirklichen Kanten soll es jedoch nie kommen und es kann nicht dazu kommen, wenn der Druck Q sich über die ganze Mauerfuge vertheilt. Bezeichnet man daher als ersten Anfang des Kantens, als theoretisches Kanten, jenen Moment, in welchem das vom Schwerpunkt der Fugenfläche sich entfernende Q nicht mehr über die ganze Fugenfläche vertheilt; wo die neutrale Axe in diese hereintritt und wo das Auflager sich zu verkleinern beginnt: so muss nach Obigem, wenn überhaupt kein Kanten stattfinden soll, Q die Fugenfläche innerhalb ihres Centralkerns schneiden.

123. Lage der Drucklinie im Gewölbe.

Wenn die Dimensionen und die Belastungen einer Mauer gegeben sind, so lässt sich unmittelbar aus denselben die Mittelkraft Q der ausserhalb einer Fuge wirkenden Kräfte und dann mittelst derselben, nach den beiden vorigen Nummern, die Stabilitätsverhältnisse der Mauer erkennen. Bei Gewölben kann man jedoch nicht unmittelbar aus einem gegebenen Querschnitte direct Q bestimmen; zur Bestimmung dieses Druckes in jeder Gewölbfuge müssen erst noch verschiedene Voraussetzungen gemacht werden.

Vor allem ist es klar, dass ein Gewölbe stabil ist, wenn es möglich ist, in zwei Gewölbfugen des Gewölbes Fig. 172 zwei Reactionen Q und Q_1 der Art anzunehmen, dass sie mit den Gewichten der einzelnen zwischen ihnen liegenden Wölbstücke und deren Belastungen zusammengesetzt eine Drucklinie geben, deren einzelne Strecken die entsprechenden Fugen so weit im Innern

des Gewölbes schneiden, dass um keine Fugenkante ein wirkliches Kanten stattfinde.

Ist das Gewölbe so schwach und die Widerstandsfähigkeit des Materials so gering, dass es nur möglich ist eine solche Annahme von $Q\,Q_1$ zu machen und eine einzige Drucklinie einzu-

Fig. 172.

zeichnen, die den obigen Bedingungen entspreche: so ist offenbar diese die wirkliche Drucklinie, und durch sie sowohl Q und Q_1, als auch der Druck in jeder einzelnen Fuge bestimmt.

Ist aber das Gewölbe so stark und die Widerstandsfähigkeit des Materials so gross, dass durch Variation von Q und Q_1 mehrere solcher Drucklinien in das Gewölbe eingezeichnet werden können, von denen keine ein wirkliches Kanten um eine Fugenkante verursacht: welche von allen diesen möglichen Drucklinien ist dann die wirkliche Drucklinie des Gewölbes?

Wir behaupten: Von allen Drucklinien, welche eingezeichnet werden können, ist diejenige die wirkliche Drucklinie des Gewölbes, welche sich der Axe desselben in der Art am meisten nähert, dass der Druck in den am stärksten comprimirten Fugenkanten ein Minimum ist.

Nehmen wir an, es sei das Material, das zur Herstellung des Gewölbes diente, zuerst so weich gewesen, dass durch diese Weichheit die Drucklinien, durch welche kein Kanten verursacht wird, so weit auf das Innere des Gewölbes beschränkt werden muss, dass nur eine einzige Annahme von Q und Q_1, und demnach auch nur eine einzige Drucklinie möglich wäre, dann würde diese nach Obigem die wirkliche Drucklinie des aus weichstem Stein hergestellten Gewölbes sein. Denken wir uns nun, es erhärte nach und nach der Stein, ohne dass sich dabei irgend eine seiner andern

Eigenschaften ändere, namentlich nicht sein specifisches Gewicht und sein Elasticitätsmodul, so kann sich während dieses Erhärtens auch die Lage der Drucklinie nicht ändern; sie ist demnach in dem aus jetzt harten Steinen hergestellten Gewölbe dieselbe, als sie in dem ursprünglich weichen war; da aber kein Grund vorliegt, anzunehmen, dass die Drucklinie in einem sogleich aus harten Steinen erbauten Gewölbe eine andere als in einem aus weichen, aber nach und nach hart gewordenen Steinen hergestellten sei, so folgt: dass die Drucklinie in allen Gewölben gleicher Form und Belastung dieselbe Lage, und zwar diejenige Lage habe, welche sie hätte, wenn das Gewölbe aus dem möglichst weichen Steine hergestellt wäre, d. h. diejenige, welche den Druck in den am stärksten belasteten Fugenkanten zum Minimum macht.

Diesen Beweis könnte man vielleicht auch wie folgt umwenden: eben so wenig, als angenommen werden darf, dass sich die gleiche Belastung deshalb anders über einen hölzernen, als wie über einen eisernen Querschnitt vertheilen würde, weil der erstere später einmal unter einer Belastung, die noch gar nicht darauf liegt und die vielleicht auch nie darauf kommen wird, erdrückt werden könnte, während der letztere halten würde; eben so wenig darf angenommen werden, dass die Stützlinie in einem aus weichstem Steine hergestellten Gewölbe anders als in einem aus härtestem Steine hergestellten liege. Da aber in ersterem die Drucklinie sich möglichst der Axe des Gewölbes nähern muss, damit sich der Druck möglichst über den Fugenquerschnitt vertheile, so folgt, dass sie sich auch in dem aus hartem Steine hergestellten Gewölbe derselben möglichst nähere.

Diese Annahme allein giebt auch für das gleichbelastete stärkere Gewölbe einen kleinern Maximalfugendruck als für das gleichgeformte und belastete schwächere Gewölbe; denn wollte man annehmen, die Drucklinie schneide die Fugen da, wo sie sich am meisten den Kanten derselben nähert, so nahe bei den Kanten, dass diese gerade nicht abbrechen: so müsste in allen ungleich starken Gewölben, welche aus dem gleichen Material hergestellt und gleich belastet wären, der Druck pro Flächeneinheit bei den stärkst comprimirten Fugenkanten der gleiche sein, was sicher nicht der Fall ist.

Dass die frühere Annahme der Alten, die sich das Gewölbe als ein aus vier Stäben (Fig. 173) zusammengesetztes Gebilde dachten, dann die dieser Vorstellung entsprechende Theorie von

Petit, welche den von ihm berechneten allbekannten und verbreiteten Tafeln zu Grunde liegen, und der die am stabilen Gewölbe wirkenden Kräfte gerade so wie für das gerade einfallende (siehe

Fig. 173.

Fig. 174 S. 449) berechnete, sich nicht mit der Natur des stabilen, in allen seinen Fugen in Mörtel satt aufliegenden Gewölbes vertrage, ist schon längst allgemein anerkannt; und neuere Schriftsteller, wie Villarceau, Carvallo, haben die Drucklinie in das Innere des Gewölbes gelegt.

Um dem eben Entwickelten entsprechend die Drucklinie in ein Gewölbe einzuzeichnen, müssten wir mittelst der Formel:

$$\varrho = \frac{Q}{F}\left(1 + \frac{c}{i}\right)$$

(Nr. 76 S. 216) untersuchen, wie gross dieser Druck in den Fugen sei, in denen sich die Drucklinie am meisten dem Gewölberand nähert, und ob dieselbe durch Veränderung der Lage der Drucklinie nicht noch mehr verringert werden könnte. Man geht jedoch gewöhnlich nicht so umständlich zu Werke, sondern untersucht nur, ob es möglich ist, eine Drucklinie in das Gewölbe einzuzeichnen, deren Seiten die entsprechenden Fugenflächen innerhalb des Centralkerns schneiden, denn da man dann sicher ist, dass es eine noch günstigere Drucklinie gebe, so ist man sicher, dass nach den vorausgehenden Nummern kein Kanten im Gewölbe stattfinde.

124. Die Stützlinie eines Gewölbes.

Da bei dieser Untersuchung die Schnittpunkte an den Seiten der Drucklinie mit den entsprechenden Fugenflächen maassgebend sind, so ist es üblich, diese Schnittpunkte durch eine Curve miteinander zu verbinden, und man nennt diese Curve die Stützlinie.

Geometrisch ausgedrückt entsteht also die Stützlinie aus dem Schnitt des Strahlenbüschels der Drucklinie mit dem Fugenbüschel.

Im Schnitt eines Gewölbes ist der Fugenbüschel bei kreisförmigen Gewölben ein Büschel erster Ordnung, bei Korbbogen, besteht er aus mehreren Büscheln erster Ordnung, bei elliptischen und andern Gewölben umhüllt er die Evolute der Ellipse oder andere Curven. Jeder Fuge entspricht ein Strahl der Drucklinie als Mittelkraft der ausserhalb der Fuge wirkenden Kräfte; den Inbegriff aller dieser Strahlen könnte man vielleicht den Druckbüschel nennen, es wäre dies eine richtigere Bezeichnung als das Wort Drucklinie: denn bei allen statischen Untersuchungen zur Bestimmung des Winkels, den die Mittelkraft mit der Fuge bildet, um sich zu überzeugen, dass kein Gleiten in der Fuge stattfinden könne, zur Bestimmung des Punktes der Stützlinie in der Fuge, immer nur braucht man den Strahl, nie einen Punkt der Drucklinie. Dieser Druckbüschel ist ein Büschel höherer oder transcendenter Ordnung, und wir müssen darauf verzichten, seine Natur zu bestimmen; wir begnügen uns damit, ihn zu construiren, ohne uns weiter um seine Ordnung zu bekümmern. Jeder Strahl schneidet die ihm zugeordnete Fugenfläche in einem Punkt und der Inbegriff aller dieser Punkte ist die Stützlinie.

Entspricht der Steinschnitt des Gewölbes den Bedingungen der Nr. 121 S. 438, sodass also kein Abgleiten in den Fugen stattfinden kann, so ersieht man aus der Lage der Stützlinie unmittelbar, ob und nach welcher Seite hin das Gewölbe kanten wird: Tritt an irgend einer Stelle die Stützlinie über die Begrenzungslinie aller Centralkerne im Schnitt des Gewölbes hinaus, so ist dies ein Beweis, dass an der treffenden Stelle das theoretische Kanten beginnt; tritt sie aber über das Gewölbe selbst hinaus, so wird wirkliches Kanten stattfinden, die Steine werden auf der Seite, auf welcher die Stützlinie austritt, pfetzen, auf der gegenüber liegenden Seite aber werden sich die Fugen öffnen. Liegt aber die Stützlinie schon im Innern des Centralkerns des Gewölbes, so wird kein Kanten stattfinden.

Die Art und Weise, wie man aus der Lage der Stützlinie auf alle möglichen Bewegungen eines Gewölbes schliessen kann, wollen wir speciell noch durch einige Figuren erläutern.

Fig. 174 zeigt ein Gewölbe, dessen mögliche Stützlinie im Scheitel und am Widerlager die äussere, zwischen beiden aber die innere Wölbfläche berührt; in Folge dessen wird an diesen Punkten ein Kanten stattfinden, bei dem sich die Gewölbfugen auf der

Fig. 174.

gegenüber liegenden Seite öffnen. Wird dies in der Figur angedeutet, so ergeben sich die dargestellten Brechungsverhältnisse. Es geht aus der Figur hervor, dass bei der angedeuteten Lage der Stützlinie der Scheitel sich senkt und dabei die Schenkel hinausgedrückt werden. Da im Scheitel und bei den Schenkeln die Stützlinie mit den Begrenzungsflächen des Gewölbes nahezu parallel läuft, so befinden sich dort mehrere Fugen in der gleichen Lage, und es werden daher auch mehrere derselben dort sich öffnen, wie es angedeutet ist.

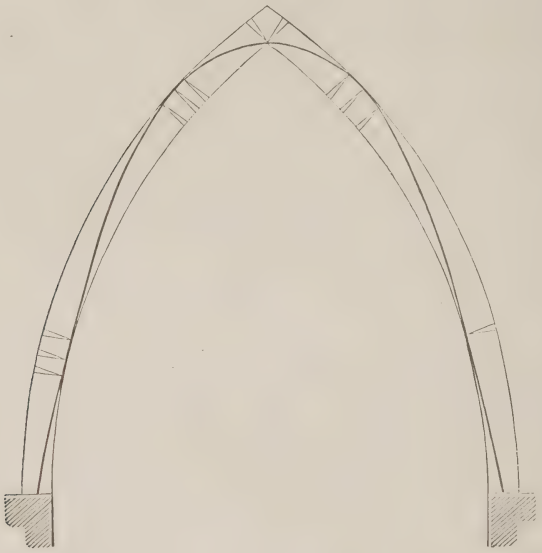
Fig. 175 S. 450 zeigt die Stabilitätsverhältnisse eines im Scheitel nicht besonders belasteten Spitzbogens. In diesem Falle ist die Tangente an dem Scheitel der Stützlinie horizontal und diese bildet kein Eck, wie der Spitzbogen; die Stützlinie durchschneidet quer das Gewölb im Scheitel, berührt in diesem die Spitze des untern Bogens und unmittelbar darauf den äussern Bogen; endlich kommt weiter unten noch eine Berührung der innern Wölbfläche vor; eine Folge sind die angedeuteten Brechungsverhältnisse, die keiner weitern Erklärung bedürfen.

In der nächsten Nummer werden wir sehen, dass die Drucklinie von der Stützlinie nur sehr wenig abweicht. Man kann daher aus der Richtung der Tangente der Stützlinie in einem ihrer Punkte auch einigermaassen auf die Richtung des entsprechenden Druckstrahls und dadurch auf die Gleitungsverhältnisse schliessen.

Aus der Lage der Stützlinie im Gewölb Fig. 176 dürfte man schliessen, dass das Gewölb auf seinem rechten Widerlager nach

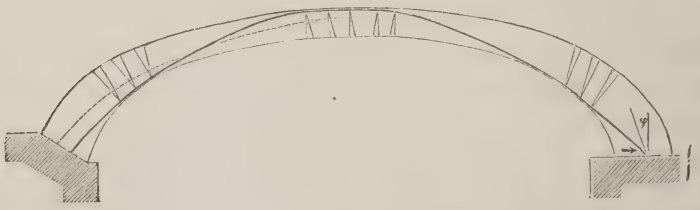
aussen gleiten würde, und aus den übrigen Berührungslinien derselben mit den Wölbflächen kann man auf die angedeutete Bre-

Fig. 175.



chungsart schliessen. Allein es ist klar, dass es genügt, der Kämpferfuge die links angedeutete, auf der Stützlinie mehr senkrecht stehende Lage zu geben, um dieses Gleiten zu verhindern;

Fig. 176.



dann wird überhaupt keine Bewegung mehr statthaben können, weil auch eine vortheilhaftere Stützlinie gezeichnet werden kann. Da, wie wir schon in Nr. 121 S. 439 gezeigt haben, auf diese Weise das Gleiten immer vermieden werden kann und muss, so geben wir keine weiteren Beispiele mehr von Gewölben, die in Bezug auf Gleiten nicht stabil sind.

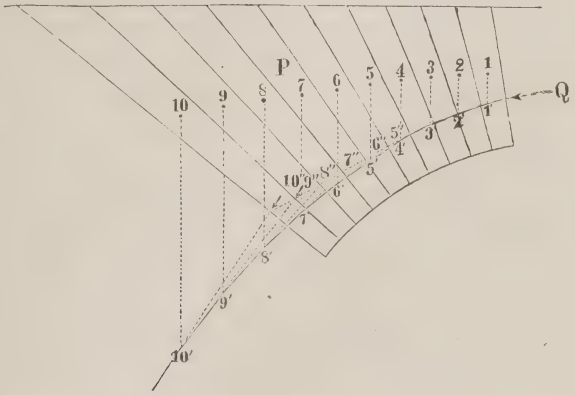
Die Gewölbe von Fig. 174 und 175 können durch Verstärkung

der Gewölbdicke oder durch genaueres Anpassen der Gewölbform an die Stützlinie stabil gemacht werden.

125. Abweichung der Stützlinie von der Drucklinie.

Diese Abweichung ist nicht sehr bedeutend; um sie merkbar zu machen, muss man (siehe Fig. 177) eine Drucklinie mit geringem Druck in den untern Theil eines Gewölbes mit sehr langen und möglichst schief stehenden Wölbsteinen, einzeichnen.

Fig. 177.



Verbindet man die Gewichte $P_{1\,2}\ldots$ mit dem Druck Q in der obersten Fuge nach Nr. 47 S. 124, so erhält man die Drucklinie $1'2'3'4'\ldots$, deren einzelne Seiten $1'2'$, $2'3'$, $3'4'$ die Lage des Druckes in den entsprechenden Fugen zwischen den Wölbsteinen 1 und 2, 2 3, 3 4 ... geben; der Angriffspunkt dieses Druckes ist bei den letzten Fugen durch kleine Pfeile angedeutet, und die Verbindungslinie $1'2'$, $2'3'$, $3'4'$, $4'5''$, $5''6''$, $6''7''$ ..... dieser Angriffspunkte ist die Stützlinie.

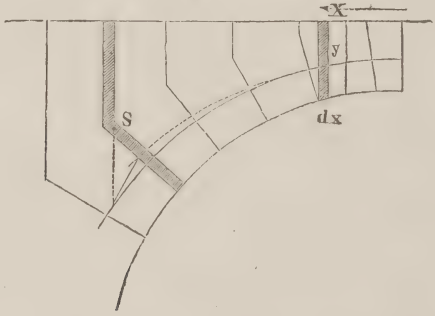
Wenn der Druckbüschel die Drucklinie beschreibt, so drehen sich seine Strahlen um die Punkte der Drucklinie, welche unter dem entsprechenden Schwerpunkte der Wölbsteine 1 2 3 ... liegen. Denkt man sich die Dicke der Wölbsteine als Elemente unendlich klein, so werden diese Drehpunkte die Berührungspunkte der entsprechenden Strahlen sein, die demnach auch vertical unter dem Schwerpunkte der entsprechenden Gewölbselemente liegen müssen.

Da ferner die entsprechenden Punkte der Stützlinie auf den entsprechenden Strahlen, die Tangenten sind, liegen: so ist die Abweichung der Stützlinie von der Drucklinie desto grösser, je weiter der Schnittpunkt 8″ 9″ z. B. vom entsprechenden Berührungspunkt weg liegt, oder je grösser der Winkel ist, den die Fugen mit der Richtung der Gewichte, der Verticallinie, bilden. Fällt die Richtung der Fugen mit der der Kräfte zusammen, d. h. geht sie durch den Berührungspunkt des entsprechenden Druckstrahls auf der Drucklinie, so ist diese Abweichung gleich 0, die Stützlinie und die Drucklinie fallen zusammen.

Im Allgemeinen weichen sie also von einander ab, wenn die Verticale durch den Schwerpunkt eines unendlich kleinen Elementes mit der Richtung und Lage seiner Fuge nicht zusammenfällt; sie fallen zusammen, wenn man verticale Fugen annimmt.

Also auch bei dem Fugenschnitt der Fig. 178, den man gewöhnlich annimmt, weicht die Stützlinie von der Drucklinie ab, weil die Schwerlinie S des schraffirten unendlich kleinen Elementes nicht mit der Fugenrichtung unter S zusammenfällt, woraus

Fig. 178.



sich die durch die Figur angedeutete Abweichung ergiebt. Denkt man sich jedoch das Gewölbe der leichtern Behandlung wegen in verticale Lamellen zerlegt, wie deren eine im Scheitel eingezeichnet ist, so fallen die Stützlinie und die Drucklinie zusammen. Sie fallen also immer zusammen, wenn man bei analytischer Behandlung der Gewölbetheorie die Fläche des Gewölbes:

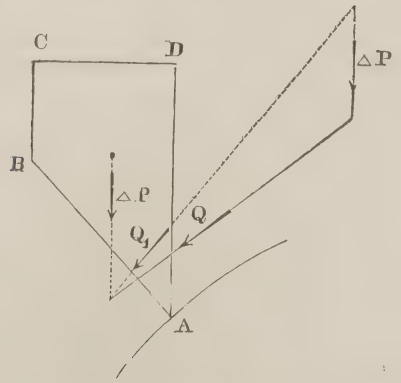
$$F = \int y \, dx$$

setzt, denn indem man dieses thut, theilt man ja das Gewölbe in verticale Lamellen ein.

Der erste, der den Unterschied zwischen Druck- nnd Stützlinie klar und scharf hervorgehoben hat, ist, so viel uns bekannt, Moseley. Von ihm haben dann spätere Schriftsteller das ganze Schlussgebilde beibehalten und noch bewiesen, dass die beiden Linien immer zusammen fallen: ohne zu bemerken, dass dieses Zusammenfallen nur eine Folge dessen war, dass sie für die Fläche das obige Integral annahmen. Da übrigens diese Annahme auch die graphischen Constructionen ausserordentlich vereinfacht (die analytische Behandlung ist ohne dieselbe beinahe eine Unmöglichkeit), so werden wir ebenfalls verticale Lamellen annehmen, wo es äusserst zulässig ist. Es ist aber immer zulässig, im Scheitel von Gewölben mit horizontaler Scheiteltangente, denn da sind die Fugen vertical; und überall da, wo die Drucklinie unter der Gewölbaxe liegt. Da die Stützlinie von der Drucklinie ausgeschlossen ist, demnach in Gewölben immer höher liegt als diese: so sind die Stabilitätsverhältnisse immer günstiger, als sie durch eine Drucklinie angedeutet werden, die sich der innern Laibung des Gewölbes zu sehr nähert, und auf die man Schlüsse wie auf eine Stützlinie baut.

Uebrigens ist es sehr leicht, in einem beliebigen Punkt der mit verticalen Lamellen construirten Drucklinie zu einer solchen mit anderm Fugenschnitt und zur entsprechenden Stützlinie über-

Fig. 179.



zugehen. Gelangt man bei dem Punkte *A* (Fig. 179) mittelst verticaler Lamellen zum Druckstrahl *Q*, und will man nun zum Fugen-

schnitt ABC übergehen, so hat man nur das Trapez $ABCD$ beizufügen; wir verlängern Q bis zur Schwerlinie von $ABCD = \triangle P$, setzen dort mittelst des Kräftedreiecks $Q \triangle P Q_1$ den Druck Q mit $\triangle P$ zu Q_1 zusammen, dann berührt Q_1 die neue Drucklinie in der Schwerlinie von $\triangle P$ und schneidet AB in einem Punkte der Stützlinie.

Auf diese Weise kann man also jederzeit leicht untersuchen, ob der Fehler, den man begeht indem man die Drucklinie mit verticalen Lamellen der Stützlinie mit unregelmässigem Fugenschnitt substituirt, und der durch das Segment der Fuge AB zwischen Q_1 und der Drucklinie gegeben wird, vernachlässigt werden kann oder nicht.

Zweites Kapitel.

Construction der Belastungscurven der Druck- und Stützlinien verschiedener Gewölbe.

---

126. Belastungscurve einer elliptischen Drucklinie.

Um den Zusammenhang zwischen der Form der Belastung und der Drucklinie deutlicher hervorzuheben, wollen wir hier noch zwei Drucklinien mit den ihnen entsprechenden Belastungen genauer, als es ausserdem nöthig wäre, verzeichnen: indem wir zuerst zu einer gegebenen Drucklinie die entsprechende Belastung ermitteln und zu einer der üblichsten Belastungen die Drucklinie bestimmen.

Da in der Praxis bei weitem die meisten Gewölbe einen kreisförmigen und sehr viele einen halbkreisförmigen Querschnitt erhalten, und demnach den beiden Widerlagern ohne Brechungspunkte sich anschmiegen: so wollen wir vor allem untersuchen, welches die Belastung sein müsste, damit die Drucklinie eine solche Form annehme.

Der Allgemeinheit wegen bestimmen wir diese Belastung (Taf. 20_1) für eine halbe Ellipse, die über einem beliebigen, der Richtung der Kräfte, d. h. hier der Verticalen conjugirten Durchmesser steht. Die Belastung dachten wir uns durch Verticallinien in eine Zahl gleichbreiter Lamellen getheilt, deren Mittellinien aufgetragen wurden. Hätten wir nun durch einen beliebigen Pol Parallele zu den Ellipsenbogen zwischen zwei aufeinander folgenden Lamellen gezogen: so hätte der dadurch erzeugte Strahlenbüschel auf einer Parallelen zur Richtung der Kräfte Segmente abgeschnitten, die der Belastung der einzelnen Lamellen proportional wären, und die daher unmittelbar als Höhen dieser Lamellen aufgetragen werden könnten. So müsste verfahren werden, wenn zu einer beliebigen Drucklinie die entsprechende Belastung construirt werden sollte; da jedoch diese Drucklinie eine Curve zweiter Ordnung ist, so schneidet laut Nr. 34 S. 96 der Strahlenbüschel, welcher die Lamellengrenzen aus dem Mittelpunkte der Curve projicirt, auf einer zur Richtung der Kräfte conjugirten Linie, auch Segmente ab, die den Lamellenbelastungen proportional sind; wir wiederholen daher nur die in der oben citirten Nummer erklärten Constructionen, indem wir vom Mittelpunkte O der Curve aus die Lamellenfugen auf die Linie P projiciren und die Abschnitte, welche mit demselben Index als wie die entsprechenden Lamellen versehen sind, als Höhen dieser auf ihrer Mittellinie auftragen. Nr. 34 wurde schon darauf aufmerksam gemacht, dass die äussersten Lamellen unendlich hoch werden.

Indem man P parallel zu sich selbst und den zur Richtung der Belastung conjugirten Durchmesser verschiebt, erhält man verschiedene Belastungshöhen. Taf. 20_1 wurden die Belastungscurven für die 2-, 4-, 6-, 8-, 10-, 12- und 23fache Belastung einfach dadurch construirt, dass die Segmente von P eben so viele Male nach einander aufgetragen wurden.

Ausser dem schon Seite 96 über die Form der Belastungscurven Gesagten machen wir noch darauf aufmerksam, dass für die Belastungscurven mit kleiner Höhe im Schlusssteine die Curven 1—10 auf Taf. 20_1, bei dem Schluss in dem gleichen Sinne wie die Ellipse, bei den Widerlagern aber, in entgegengesetztem Sinne gekrümmt sind. Zwischen den in entgegengesetztem Sinne gekrümmten Curventheilen liegen natürlicher Weise Inflectionspunkte. Mit wachsender Belastung nähern sich diese Inflectionspunkte dem

Scheitel, und der Krümmungshalbmesser des Curvenstücks zwischen denselben wird immer grösser.

Wird die Belastungshöhe im Scheitel $= 1/3$ der verticalen Ellipsenaxe, so fallen die Inflectionspunkte im Scheitel zusammen, der Krümmungshalbmesser daselbst wird unendlich gross. Sechs Punkte fallen dann zusammen und die Curve scheint dort auf einer ziemlichen Strecke geradlinig zu sein. Dieses Verhältniss wird durch die Curve 12 dargestellt.

Die Geometrie als solche hat natürlich kein Mittel, um zum Zahlenverhältniss $1/3$ zu gelangen; wir geben daher in Folgendem eine kurze analytische Ableitung.

Wir beziehen die Ellipse auf den verticalen und den zu diesem conjugirten halben Durchmesser als Coordinatenaxe, wie es Taf. 20_1 angeschrieben ist. b und y werden vertical, a und x in der jenen conjugirten Richtung gemessen. Die Abschnitte der Linie P, also auch die (variabeln) Belastungshöhen h des Gewölbes, sind bei Curven zweiter Ordnung (Nr. 34 S. 96) der Aenderung des Verhältnisses $\frac{x}{y}$ auf die Breite einer Lamelle proportional. Wird daher diese constante Breite $= dx$ gesetzt, so wird offenbar die Höhe

$$h = C \cdot \frac{d \cdot \frac{x}{y}}{dx} = C \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} \right)$$

sein, wenn C eine mit der Belastungshöhe h_o im Scheitel sich ändernde Constante ist.

Für die Ellipse ist

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}; \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{b^2 x}{a^2 y};$$

demnach

$$h = C \left(\frac{1}{y} + \frac{b^2 x^2}{a^2 y^3} \right) = C \frac{b^2}{y^3}.$$

Für den Scheitel ist $y = b$, also:

$$h_o = \frac{C}{b} \text{ und } C = b h_o;$$

demnach

$$h = \left(\frac{b}{y} \right)^3 h_o.$$

Eine Gleichung, die so einfach ist, dass mittelst derselben die Belastungshöhen auch sehr leicht, mittelst des Rechenschiebers z. B., berechnet werden können.

Aus den Belastungshöhen ergiebt sich unmittelbar die Gleichung der Belastungscurve

$$y_1 = y + h = y + \frac{b^3}{y^3} h_o.$$

Die Differentialcoefficienten sind:

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(1 - \frac{3b^3}{y^4} h_o\right) \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \left(1 - \frac{3b^3}{y^4} h_o\right) \frac{d^2y}{dx} - \frac{3 \cdot 4\, b^3 h_o}{y^5} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Soll die Belastungscurve im Scheitel geradlinig sein, so muss dort $\frac{d^2y_1}{dx^2} = 0$ sein. Es ist aber daselbst $y = b$, $\frac{dy}{dx} = 0$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ von 0 verschieden; demnach muss, wenn $\frac{d^2y_1}{dx^2} = 0$ werden soll, auch

$$1 - 3\frac{h_o}{b} = 0 \quad \text{oder}$$

$$h_o = {}^1/_3\, b \qquad \text{sein.}$$

Für noch grössere h_o ist die Belastungscurve im Scheitel wie überall im entgegengesetzten Sinne als wie die Ellipse gekrümmt. Von solchen Curven wurde nur eine einzige (23) eingezeichnet.

Um zur Anschauung zu bringen, welche Form ein freitragender elliptischer Bogen, z. B. ein Strebebogen, haben müsse, haben wir den Raum zwischen der Ellipse und dem Bogen 1 schraffirt; man sieht, dass diese schraffirte Figur so ziemlich der Form gleicht, welche die alten Architecten ihren Strebebogen gaben; die Thürmchen, die immer über die Widerlager gestellt wurden, entsprechen ganz den unendlich langen Belastungshöhen daselbst Taf. 20_1. Jene Baumeister hatten also ein vollkommen richtiges Gefühl von der Form, die sie ihren Bogen aus Stabilitätsgründen geben mussten.

So viel mir bekannt ist, war Herr Prof. Bauernfeind in München der erste, der in dem IV. Bande der Stuttgarter Eisenbahnzeitung 1846 Nr. 34 S. 299 die Gleichung der Belastungscurven für Kegelschnitte aufgestellt hat.

127. Drucklinie eines in Form und Belastung gegebenen Gewölbes.

Um die Form der Drucklinie eines beliebig gegebenen Gewölbes klar zur Anschauung zu bringen, ist es zweckmässig, ihre Evolute zu construiren, weil die parabelartige Drucklinie als Punktgebilde allein die Linie nicht hinlänglich charakterisirt.

Taf. 20_2 haben wir die Drucklinie eines halbkreisförmigen Gewölbes mit geradliniger horizontaler Belastungslinie mit ihrer Evolute gezeichnet. Die Belastung denken wir uns durch Verticallinien in Lamellen zerlegt, deren Mittellinien punktirt wurden.

Die aneinander gereihten halben Längen dieser Mittellinien bilden das Kräftepolygon P'. Da die Normallinien, die wir zur Darstellung der Evolute ziehen müssen, länger als die Curvenelemente der Drucklinien sind, und parallele Linien genauer als senkrechte gezogen werden können: haben wir das Kräftepolygon um einen Viertelskreis gedreht, sodass die Curvenelemente senkrecht auf den ihnen entsprechenden Strahlen stehen, die Normallinien aber parallel mit ihnen laufen. Der Horizontalschub H wurde durch Probiren so bestimmt, dass die Drucklinie die obere horizontale Begrenzungslinie im Scheitel und die untere kreisförmige zwischen den Strahlen 23 und 24 berühren würde, wenn erstere in das Gewölbe hinein gezeichnet worden wäre; der Deutlichkeit wegen aber wurde sie so weit vertical und parallel mit sich selbst verschoben, bis sie ganz aus dem Gewölbe herausgetreten war.

Indem jetzt bei dem Ziehen jeder einzelnen Druckpolygonseite gleichzeitig auch die Normale parallel mit dem entsprechenden Strahl des Kräftepolygons HP' bis oder jenseits der vorausgehenden Normalen gezogen wurden, erhielt man die Figur Taf. 20_2. Man ersieht aus derselben, dass die Evolute zwei Rückkehrpunkte bei A und bei B hat; A ist ein Rückkehrpunkt, weil sich rechts Alles gerade wie links wiederholt. Im Scheitel ist der Krümmungshalbmesser der Evolute ein relatives Maximum, ein absolutes Minimum ist er in dem der Spitze B entsprechenden Punkt 12 — 13, und von dort wächst er bis ins Unendliche.

Die Brechungspunkte des Gewölbes liegen da, wo die Normalen der Laibungen des Gewölbes und die der Drucklinie desselben zusammenfallen. So wie Taf. 20_2 die relative Lage des Ge-

wölbes und der Drucklinie gezeichnet ist, gehen durch den Mittelpunkt O des Gewölbes drei Tangenten an die Evolute, nämlich die Normalen 0; 12, 13 und 18, 19. Bei der ersten und letzten ist die Evolute am weitesten vom Gewölbekreis entfernt, bei der mittelsten steht sie ihm am nächsten. Es hat nun durchaus keine Schwierigkeit, sich das Verhältniss in der wahren Lage der Drucklinie vorzustellen. Rücken wir z. B. das Gewölbe in seine wahre Lage so herunter, dass die horizontale Belastungslinie den Scheitel der Drucklinie berührt, so kommt der Mittelpunkt der innern Laibung nach O' herunter. Durch diesen Punkt kann man die drei Normalen bei 0, bei 4, 5 und bei 23, 24 auf die Drucklinie ziehen. Im ersten Punkt steht die Drucklinie der äussern horizontalen Begrenzungsfläche am nächsten, weil aus dem Punkt ∞, dem Mittelpunkt der geraden Begrenzungslinie, nur eine einzige Normale an die Drucklinie gezogen werden kann. Dasselbe findet auch noch statt, solange der Krümmungsmittelpunkt der äussern Wölbfläche unter den Punkt A hinunterfällt. Ist die äussere Laibung mit der innern concentrisch, so steht die Drucklinie jener bei dem Punkt 4 5 am nächsten, und der äussere obere Brechungspunkt fällt nicht mit dem Scheitel zusammen. Dasselbe findet überhaupt nur statt, wenn der Krümmungsmittelpunkt der äussern Laibung zwischen A und C fällt, denn nur durch einen Punkt dieser Strecke können zwei von der Verticallinie verschiedene Normalen an die Drucklinie gezogen werden: weil der Schnittpunkt der Normalen mit der Verticallinie die Strecke $A\ C\ A\ \infty$ beschreibt, während die Normale selbst die Evolute beschreibt, sodass nur die Punkte der Strecke $A\ C$ zweimal bestrichen werden. In 23, 24 liegt der untere Brechungspunkt.

Die oben dargestellten Verhältnisse können nicht als allgemeine hingestellt werden, sondern wir können sie nur als Beispiel der Analyse einer Drucklinie geben. In der Regel wird die Belastungslinie eines kreisförmigen Gewölbes nicht als eine gerade Linie betrachtet werden können, sondern sie wird sich im Scheitel des Gewölbes bei Berücksichtigung des leichtern Hinterfüllungsmaterials oder der Entlastungsräume mehr einer der Belastungslinien von Taf. 20_1 nähern: dann muss sich auch nothwendiger Weise die Evolute der Drucklinie mehr der einer Ellipse nähern, d. h. es wird der Arm $A\ B\ C$ der Evolute mit der Verticallinie zusammenfallen. Man wird daher in der Praxis, ohne fürchten zu

müssen, einen zu grossen Fehler zu begehen, immer annehmen dürfen, der obere Brechungspunkt an der äussern Laibung liege im Scheitel.

Der untere Brechungspunkt liegt bei kreisförmigen Gewölben erfahrungsgemäss circa 60° vom Scheitel ab. Bei analytischer Behandlung kann man Voraussetzungen machen, die ihn immer nach 60° hinbringen, allein aus dem Obigen geht hervor dass er zu sehr von der Lage des Mittelpunktes des Gewölbes, der Evolute der Drucklinie gegenüber, abhängt, als dass man diese Lage als fest annehmen dürfte.

128. Dimensionen der Gewölbe.

Der Hauptzweck des Einzeichnens der Druck- oder Stützlinie in ein steinernes Gewölbe besteht darin, die Stärke des Widerlagers und den Fugenschnitt desselben zu bestimmen. Wenn aus den Nr. 120 S. 436 schon erwähnten Gründen die zufällige Belastung des Gewölbes seinem Eigengewicht gegenüber ausser Acht gelassen wird, so fällt, wenn das Gewölbe die übliche Schlusssteinstärke erhält und wenn selbst die Drucklinie in das innere Drittel eingeschlossen wird, der untere Brechungspunkt so weit herunter: dass die Hintermauerung bis zu ihm hinaufgeführt und dann durch wölbartiges Mauern bis über die Drucklinie hinaus diese eingeschlossen werden kann.

Es ist also nichts mehr willkürlich, wenn einmal die Bogenform gegeben ist, als die Gewölbsteinstärke. Da nun in ein Gewölbe, das dünner ist, als die Praxis es zu machen erlaubt, noch eine Stützlinie eingezeichnet werden kann, so sind die Stabilitätsconstructionen der graphischen Statik nicht im Stande, diese Stärke zu bestimmen. Die Aufstellung der Formeln, nach welchen sie gerechnet werden können, muss daher der Brückenbaukunde überlassen werden, und wir nehmen an: es werde nebst der Gewölbeform auch dessen Stärke oberhalb der untern Brechungsfuge gegeben und es sei jetzt die Stärke der Widerlager zu bestimmen.

Die Stabilität des Widerlagers kann von zwei verschiedenen Standpunkten aus untersucht werden: man kann es erstens als Fortsetzung des Gewölbes betrachten, wie es bei vielen englischen Brücken und auch französischen (à culées perdues), bei

denen das Gewölbe als solches bis zum Fundament fortgesetzt wird, wirklich der Fall ist; oder man kann es zweitens als einen Mauerkörper betrachten, der dem Drehen durch den Gewölbeschub in der untern Brechungsfuge um die hintere untere Fundamentkante, mit seinem Moment bezüglich derselben Kante widersteht. Die beiden Arten, die Stabilität zu untersuchen, sind übrigens identisch, weil die ganze Lehre von der Stützlinie auf der Untersuchung des Kantens beruht, und unterscheiden sich nur durch die Art und Weise, wie die Sicherheit des Widerlagers ausgedrückt wird.

Wird das Gewölbe bis zum Fundament fortgesetzt und der Winkel zwischen diesem und der Fahrbahn durch eine Blendmauer abgesperrt; oder nimmt die Stärke des Widerlagers von oben nach unten successive so zu, wie es die austretende Stützlinie verlangt; oder wird, wie es in England so häufig geschieht, das Widerlager nur aus einzelnen, mit der Stirne parallel laufenden Mauern hergestellt, zwischen denen sich hohle Räume befinden: so unterscheidet sich das Widerlager in nichts von dem eigentlichen Gewölbe, es ist stabil, wenn die Stützlinie in das Innere desselben eingeschlossen ist. Löst sich das verlängerte Gewölbe ganz von der die Fahrbahn begrenzenden Blendmauer ab, so ist kein Grund vorhanden, der Axe der Verlängerung nicht die Form der Stützlinie selbst zu geben.

Findet dagegen eine Trennung des Gewölbes von der Vorderwand nicht statt, wie bei den englischen hohlgebauten Widerlagern: so wird man sich damit begnügen, die Stützlinie in das innere Drittel des Widerlagers einzuschliessen, und dieses wird sicher stabil sein.

So kann man verfahren, wenn man sich durch Einlegen hohler Räume in die Widerlager die Dispositionsfreiheit über die Mauermassen bewahrt, sodass man sie der Stützlinie voll entgegenstellen kann. Sollen jedoch die Widerlager massiv gebaut werden, so müsste man ihnen, also verfahrend, ungeheure Dimensionen geben.

Geringere Dimensionen giebt die zweite Voraussetzung, die Festigkeit des Mörtels sei hinlänglich gross, um das Widerlager zu einem ganzen Mauerkörper zu verbinden, der um seine untere hintere Kante kantet. Es wird dabei der Sicherheit wegen angenommen, es bestände Gleichgewicht in Bezug auf Drehung um jene

Kante, erst dann, wenn der Schub des Gewölbes 1,5; 2; 2,5 mal grösser wäre als er wirklich ist. Untersuchungen französischer Ingenieure haben gezeigt, dass dieser Sicherheitscoefficient bei sehr leichten Gewölben nicht unter 1,4 falle. Den alten Tafeln und Formeln von Petit liegt der Coefficient 1,9 zu Grunde. Wir wollen ihn in der Folge immer = 2 annehmen.

Wird also der doppelte Gewölbschub in der untern Brechungsfuge mit dem Gewicht des Widerlagers zusammengesetzt: so soll der Mitteldruck noch durch die hintere Kante des Widerlagers gehen. Da es ganz einerlei ist, in welcher Reihenfolge die Elemente des Widerlagers zusammengesetzt werden, so gelangt man am schnellsten zu dessen Stärke, wenn man es in verticale Lamellen theilt und dieselben nacheinander mit dem doppelten Gewölbschub zusammensetzt. Das Seilpolygon, das man so erhält, schneidet dann auf dem Fundamentauflager die Widerlagerstärke ab.

Ist so die Widerlagerstärke bestimmt, so muss noch wegen des Fugenschnitts die wirkliche, mit dem einfachen Gewölbdruck construirte Drucklinie eingezeichnet werden. Bei dem Zeichnen dieser zweiten wirklichen Drucklinie sollte eigentlich der Fugenschnitt des Gewölbes seiner Lamelleneintheilung zu Grunde gelegt werden, allein es wird wohl immer gestattet sein, der einfachern Construction wegen die verticalen Lamellen beizubehalten. Die beiden Drucklinien, die man erhält, wenn man einmal den horizontalen, das andere Mal den verticalen Fugenschnitt annimmt, können in keinem Falle weit von einander abweichen: die erste und letzte Polygonseite müssen als Mittellinien gleicher Kräftesummen zusammenfallen; ferner sind sie in gleichem Sinne gekrümmt, wenn die Drucklinie bei horizontalem Fugenschnitt sich nicht auf einen Punkt reducirt, weil der sie beschreibende Strahl sich immer in gleichem Sinne dreht; da nun obendrein die beiden Curven, wie ein Blick auf Taf. 21 zeigt, ziemlich flach sind, so folgt, dass sie nur unbedeutend von einander abweichen können.

Die Normalen zu den Fugen sollen dann von den Seiten dieser zweiten wirklichen Drucklinie um nicht mehr als um den Reibungswinkel abweichen.

Die eben im Allgemeinen angedeuteten Constructionen wollen wir nun auf Taf. 21 an einigen Beispielen näher erläutern.

129. Zeichnung der Druck- und Stützlinien in Gewölben.

Auf Taf. $21_{1\,2}$ wurden die Constructionen zur Bestimmung der Widerlagerstärke eines Gewölbes mit vollem Halbkreise und eines Stichbogengewölbes ausgeführt. Taf. 21_3 aber soll dazu dienen, die Stabilitätsverhältnisse des ausgeführten bestehenden Doppelbogens der Maidenhead-Brücke in England zur Anschauung zu bringen.

Wir beginnen mit der Lamelleneintheilung. Im Schluss aller Gewölbe werden die Lamellen natürlicher Weise durch Verticallinien begrenzt. In der Nähe der Widerlager des Maidenhead-Viaducts Taf. 21_3 wurde innerhalb des Gewölbes der normale und im Widerlager der wirkliche Fugenschnitt der Lamelleneintheilung zu Grunde gelegt, in dem Gewölbe aber wurden verticale Lamellen beibehalten. Hieraus ergaben sich Gewölbelemente der schraffirten Querschnitte 12 13 und 20 21. Diese zerfallen durch Verlängerung der verticalen Lamellenbegrenzung auf der Seite des Gewölbes wieder in je zwei Flächen, die mit den obigen Zahlen bezeichnet sind, von denen je zwei als zusammengehörig zu betrachten sind und im Kräftepolygon P immer unmittelbar aufeinander folgen. So gehören auch noch zusammen 9 10 und 18 19.

Bei dem Stichbogen Taf. 21_2 sind keine andern als vertical begrenzte Lamellen einzuzeichnen. Bei dem vollen Halbkreis Taf. 21_1 wurde da, wo wir die Brechungsfuge vermutheten, die Lamelle 6 der Fig. 179 S. 453 entsprechend begrenzt, um an der normalen Fuge 6 7, sowie es Nr. 125 S. 453 gezeigt wurde, zu untersuchen, ob die Stützlinie von der eingezeichneten Drucklinie abweiche. Diese Abweichung war im vorliegenden Falle durchaus unmerklich, und obwohl die Brechungsfuge etwas über die Fuge 6 7 hinunter nach B gefallen ist, so wurden doch ausser 6 und 7 keine weitern unregelmässig begrenzten Lamellen mehr angenommen.

Nach der Eintheilung in Lamellen ist das Gewicht derselben zu bestimmen. Befinden sich innerhalb der überall punktirten Lamellengrenzen heterogene Massen von verschiedenem specifischen Gewicht oder leere Räume: so müssen erstere auf Gewölbmauerwerk reducirt, letztere aber von den Lamellen abgezogen werden. Taf. 21_1 wurde vorausgesetzt, dass das Hinterfüllungsmaterial $^2/_3$

des Gewölbmauerwerks wiege; die Reduction wird dann einfach dadurch bewirkt, dass man die verticale Höhe des Hinterfüllungsmaterials über dem Gewölbmauerwerk um ein Drittel verkürzt.

Alle Punkte der so verkürzten Verticalen wurden durch eine punktirte Linie, die Grenze der reducirten Lamellen, miteinander verbunden, und wir können nun alle Massen unter dieser Linie, bis zu der auch nur die Lamellengrenzen reichen, als homogene Massen gleichen specifischen Gewichts behandeln.

Taf. 21_2 wurde nur der Fahrbahnkasten als leichter betrachtet und seine Höhe um $^1/_3$ verkürzt.

Ueber dem grossen Bogen der Maidenhead-Brücke befinden sich Entlastungsräume, deren Querschnitte Taf. 21_4 dargestellt sind. Für die verschiedenen Höhen der Entlastungsräume in den Lamellen 5 –10 Taf. 21_3 wurde Taf. 21_4 die Flächenverwandlung der Art vorgenommen, dass die Summe der vollen Mauermassen über einer der ausgezogenen Linien, durch welche die obere Begrenzung des Gewölbes in den verschiedenen Lamellen angedeutet wird, den Raum zwischen dieser und einer der punktirten Linien ausfüllen würde.

Die einander entsprechenden ausgezogenen und punktirten Linien sind auf der Seite der Querschnitte durch verticale Striche mit einander verbunden, die die Nummer der Lamelle tragen. Indem man nun die Länge dieser Striche als Lamellenhöhe über den Bogen Taf. 21_3 auftrug, erhielt man die punktirte Linie als obere Lamellengrenze.

In den drei Gewölben der Taf. 21 wurde auch die Breite des verticalen Theiles aller Lamellen gleich gross angenommen und dann die Flächeninhalte aller Bogenlamellen in Taf. 21_1 auf dreifache, Taf. 21_2 und $_3$ auf die doppelte Lamellenbreite reducirt. Die Widerlagerlamellen aber wurden des Sicherheitscoefficienten wegen auf die doppelte Basis als wie oben, d. h. auf die sechsfache und vierfache Lamellenbreite reducirt. Bei den trapezförmigen Lamellen geschieht die Reduction einfach dadurch, dass man das $^1/_4$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_{12}$ der Summe der Lamellenseiten nimmt; bei den unregelmässig begrenzten Lamellen nach den Regeln von Nr. 6 S. 26. Die Linien nun, welche die Flächen darstellen und die auch den Gewichten der Gewölbslamellen proportional sind, wurden in P und P' zu Kräftepolygonen zusammengesetzt. Diese Gewichte müssen wir uns in dem Schwerpunkte jedes einzelnen Gewölb-

elementes wirkend denken, und haben daher durch diese als Richtungslinien der Kräfte Verticallinien gezogen, die mit einem Pfeil und mit der Lamellennummer bezeichnet sind.

Die Schwerpunkte unregelmässig begrenzter Lamellen müssen nach Nr. 57 d S. 152, die Schwerpunkte der trapezförmigen Lamellen, welche die bei weitem am häufigsten vorkommenden sind, können nach der Nr. 57 c S. 151 mit gesperrter Schrift gedruckten Regel am schnellsten construirt werden. Taf 21_2 ist die Construction für die Lamelle 7 ausgezogen worden. In den meisten Fällen aber wird man bei trapezförmigen Lamellen die Mittellinie als durch den Schwerpunkt gehend annehmen dürfen.

Jetzt kann die Drucklinie eingezeichnet werden. Wir bestimmen den Horizontalschub *H* approximativ, indem wir uns ganz nach dem Augenmaass eine Drucklinie eingezeichnet denken, und dann im Kräftepolygon den Strahl des unteren Brechungspunktes parallel mit dem entsprechenden Strahle der skizzirten Drucklinie ziehen; er schneidet dann auf *H* die approximative Länge des Horizontalschubs ab. Mit diesem Horizontalschub, den man sich nach Nr. 123 S. 447 bei allen Gewölben von Taf. 21 im obern $^1/_3$ des Schlusssteins wirkend denken kann, zeichnet man eine Stützlinie, fällt sie ganz in das innere $^1/_3$ des Gewölbes, so kann man sie als die richtige Stützlinie annehmen. In der Regel wird nun dies nicht der Fall sein, immer aber wird sie genau genug ausgefallen sein, um die Polygonseite der Brechungsfuge genau zu markiren. Dann erhält man unmittelbar die entsprechende Polygonseite der richtigen Drucklinie, wenn man durch den Punkt, in welchem die provisorische Polygonseite des Brechungspunktes den Horizontalschub *H* schneidet, eine Gerade zieht, welche die Brechungsfuge im untern $^1/_3$ schneidet, denn nach Nr. 29 S. 83 haben das provisorische und das wirkliche Druckpolygon alle Punkte des Horizontalschubs gemein, weil nur dessen Intensität geändert wurde. Wird nun durch den entsprechenden Punkt des Kräftepolygons ein Strahl parallel zu dieser definitiven Druckpolygonseite gezogen, so schneidet dieser den richtigen Horizontalschub ab.

Mit diesem richtigen Horizontalschub wurde nun Taf. $21_{1\,2}$ die eingezeichnete Stützlinie construirt, welche durch das Widerlager durch verlängert, durch seinen Schnitt mit dem Fundament dessen hintere Kante abschneidet.

Eine provisorische Stützlinie wurde nicht eingezeichnet, weil sie sich durch gar nichts, als durch ihre unrichtige Lage von der richtigen unterscheidet. Sobald diese ermittelt ist, wird die erstere als zu nichts mehr dienlich ausgelöscht.

Die so eingezeichneten Stützlinien liegen im innern $^1/_3$ und sind vom Widerlager ab mit dem doppelten Gewölbschub construirt; denn die Gewichte der Widerlagerlamellen wurden ja nur halb aufgetragen, und es kommt ganz auf das Gleiche heraus, ob man das Druckpolygon mit dem ganzen Gewicht der Widerlagerlamellen und dem doppelten Gewölbdruck von *O*) 9 10 (Taf. 21_1) und *O*) 7 8 (Taf. 21_2), oder ob man sie mit dem halben Lamellengewicht und dem einfachen Gewölbdruck ausführt. Im letztern Falle reducirt man eben den Maassstab des Kräftepolygons auf die Hälfte.

Die so eingezeichnete Drucklinie entspricht nicht ganz der Nr. 122 und 123 S. 445 aufgestellten Theorie, denn in beiden Fällen (Taf. 21_1 und $_2$) hätte man eine Drucklinie finden können, welche noch weniger als um $^1/_6$ von der Mittellinie des Gewölbes abweicht; und dann haben wir erst am Widerlager, statt schon an der untern Brechungsfuge, den Gewölbschub verdoppelt. Beide Abweichungen finden im Interesse der leichteren, schneller vor sich gehenden Construction statt. Es ist viel umständlicher, das Kräftepolygon vorerst nur bis ungefähr zur Brechungsfuge aufzutragen, dann sehr lange zu probiren, um die innerste Stützlinie zu finden und erst nachdem durch Zeichnung dieser letztern die Brechungsfuge bekannt ist, die übrigen Lamellen des Widerlagers aufzutragen und die Drucklinie durch dasselbe zu verlängern. Es geht viel rascher, wenn man sowohl den Angriffspunkt des Horizontalschubs, als auch die Widerlagerfuge von vorn herein als bekannt annimmt und dann darauf los construirt; man vollendet dann eine solche Construction innerhalb einer halben Stunde. Man erhält zwar ein etwas schwächeres Widerlager, dafür aber haben wir auch den Sicherheitscoefficienten $= 2$ statt nur $= 1{,}9$ angenommen; und wir glauben die eben erklärte Routine, die sich an unsrer Schule so ausgebildet hat, um so mehr als praktisch empfehlen zu dürfen, als die bisher allgemein üblichen Tafeln von Petit noch geringere Widerlagerstärken geben: indem sie annehmen, der Angriffspunkt des Horizontalschubs sei in der obern Kante des Widerlagers und dieses beginne noch nicht bei der

untern Brechungsfuge. Es giebt also die Construction in jeder Beziehung viel genauere Resultate, als die Tafeln, weil sie das Gewölbe nimmt, wie es ist, während die, bezüglich der Hinterfüllung und anderem, bei der Berechnung der Tafeln gemachten Voraussetzungen nicht bei jedem Gewölbe, auf das die Tafeln bisher angewendet wurden, zutreffen.

Zur Bestimmung des Fugenschnitts muss noch die wirkliche Drucklinie eingezeichnet werden; statt die Länge aller Widerlagerlamellen im Kräftepolygon zu verdoppeln, ist es es einfacher, den Schub bei der Brechungsfuge am Widerlager in den Punkten O_1 der drei Gewölbe zu halbiren, und mit diesem halben Schub und den halben Lamellengewichten die richtige Drucklinie einzuzeichnen. Sie liegt Taf. 21_1 und $_2$ etwas unter der ersten, weiter im Innern des Widerlagers. In Taf. 21_1 weicht keine Druckpolygonseite um mehr als um 17° von der Verticalen ab; man darf daher bei diesem Gewölbe unbedenklich horizontalen Fugenschnitt annehmen. Taf. 21_2 wurde ein Fugenschnitt unter der Voraussetzung einpunktirt, dass die Fugennormalen noch 20° von der Druckpolygonseite abweichen dürfen.

In den grossen Bogen des Maidenhead-Viaducts (Taf. 21_3) wurde die Stützlinie gerade so wie in den Stichbogen eingezeichnet, und nach der Lamelle 13 der Gewölbschub O_2) 22 23 des kleinen linkseitigen Gewölbes eingeschaltet. Ueber diesem Gewölbschub wurde auch das Kräftepolygon des kleinen Gewölbes H_1 P_1 construirt.

Ursprünglich konnte dieses natürlich nicht an diese Stelle gezeichnet werden, weil die Länge des Horizontalschubs H_1 von vorn herein nicht bekannt war. In dem kleinen Gewölbe fällt die Stützlinie mit der Drucklinie nicht zusammen, weil die letztere in Folge dessen, dass die Schwerpunktsverticalen nicht in der Reihenfolge des Kräftepolygons aufeinander folgen (um die zusammengehörigen Elemente 18, 19 und 20, 21 nicht von einander zu trennen) verschlungen ist; während Verschlingungen der Stützlinie der Natur der Sache nach in einem Gewölbe nicht möglich sind. Die Drucklinie wurde punktirt, die Stützlinie stark ausgezogen.

Wie schon bemerkt, wurde nach 22 der Schub des kleinen mit dem des grossen Gewölbes zusammengesetzt, die stark

ausgezogene Drucklinie im Widerlagerelement 23 geht durch den Schnitt der beiden punktirten Druckpolygonseiten und läuft mit dem Strahle O) 22 23 parallel.

In dem Punkte, in welchem dieser Mitteldruck die Mittellinie des Widerlagers schneidet — in der wir uns alle Lamellen 23 – 24 desselben wirkend denken, was erlaubt ist, wenn man, wie es auch im Kräftepolygon geschah, die Mauertheile unter der kleinen Oeffnung vernachlässigt — wird dieser mit den Lamellen zusammengesetzt. Sie wurden in halber Länge aufgetragen; zieht man daher durch jenen Schnittpunkt eine ganz ausgezogene Parallele zum äussersten Strahl O 26, so erhält man die Mittelkraft aller über dem Fundamentauflager wirkenden Kräfte. Sie fällt noch ganz in das Mauerwerk hinein, also besteht Stabilität bezüglich des Kantens.

Um die Stabilität des Gleitens zu untersuchen, muss die wirkliche Drucklinie construirt werden. Sie reducirt sich im vorliegenden Falle auf einen Punkt, den Schnittpunkt der zusammenfallenden Richtungslinien 23 24 25 26 mit dem Mitteldruck beider Gewölbe.

Der Druckbüschel ist also ein Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Strahlen mit den des Büschels O_1) 23 24 25 parallel laufen, wo O_1 in der Mitte des Strahles O) 23 24 liegt. Die Druckstrahlen des Druckpunktes sind punktirt; durch Verbindung ihrer Schnittpunkte mit den entsprechenden Fugen erhält man die stark ausgezogenen Stützlinien im Widerlager.

Keiner der Druckstrahlen bildet mit der entsprechenden Fuge einen Winkel, der kleiner als wie 70^0 wäre. Also weichen die Mittellinien der ausserhalb einer Fuge wirkenden Kräfte um nicht mehr als 20^0 von der Normalen auf diese ab. Eine Abweichung, die gewiss erlaubt ist, denn manche Gewölbe mit horizontalem Fugenschnitt, deren Stabilität wir untersuchten, würden nicht stehen, wenn der Reibungswinkel nicht $> 30^0$ wäre.

Auf Obiges wird man die Untersuchung der Stabilität eines Gewölbes unter gewöhnlichen Verhältnissen beschränken dürfen. Das Aufbringen einer zufälligen Belastung wird die Lage einer Stützlinie im Innern eines Gewölbes gar nicht, im Widerlager aber nur unmerklich hinauswerfen. Wie aber bei besonders dünnen Gewölben untersucht werden kann, ob die ungleichförmige Be-

lastung die Stützlinie nicht aus dem innern $^1/_3$ heraustreibe, werden wir, wie dies auch schon früher bemerkt wurde, am eisernen Bogen zeigen.

Drittes Kapitel.

Stabilität der Lehrgerüste.

---

130. Stabilität des nicht geschlossenen Gewölbes.

Erst nach eingesetztem Schlussstein erzeugt sich der Horizontalschub in dem Gewölbe, durch den es sich frei tragen kann. So lange dieser nicht vorhanden ist, beschränken sich die an den obersten freien Wölbsteinen wirkenden Kräfte auf die vertical wirkenden Gewichte jener, und die Mittelkraft der obersten Schichten wenigstens schneidet die Verlängerungen der unteren Fugen, statt diese selbst, und bildet Winkel mit den Normalen zur Fuge, die grösser statt kleiner als der Reibungswinkel sind. Die Wölbschichten würden sich nicht halten, wenn sie von den Lehrgerüsten nicht unterstützt würden.

Um die Kräfte zu bestimmen, welche an den einzelnen Theilen des Lehrgerüstes wirken, muss man zuerst den Druck ermitteln, der auf das Lehrgerüst wirkt; jenen kann man als die Belastung desselben betrachten und ihn dann auf die einzelnen Constructionstheile des Gerüstes vertheilen.

An den Nr. 121 und Nr. 122 aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen der ausserhalb einer Fuge wirkenden Kräfte ändert sich im Allgemeinen nichts: die Mittelkraft derselben muss die Fuge selbst, nicht deren Verlängerung schneiden, damit keine Drehung stattfinde, und sie darf von der Normalen zur Fuge höchstens um den Reibungswinkel abweichen. Die Reaction des Lehrgerüstes auf das Wölbstück ausserhalb der Fuge muss daher so gross sein, dass sie mit dem Gewicht des Wölbstückes zusammengesetzt jene Bedingungen erfülle. Ist die Kraft, welche noth-

wendig ist, um das Abgleiten zu verhindern, grösser als die, welche nothwendig ist, um das Drehen um die untere Kante zu verhindern, so bestimmt sie die Reaction des Lehrgerüstes, und wenn sie zu schwach wäre, so würden die Schichten abgleiten, und umgekehrt.

Fig. 180 und 181 zeigen das Gleichgewicht der an einem

Fig. 180.

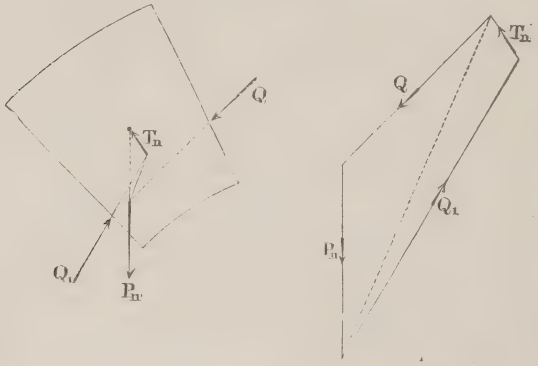
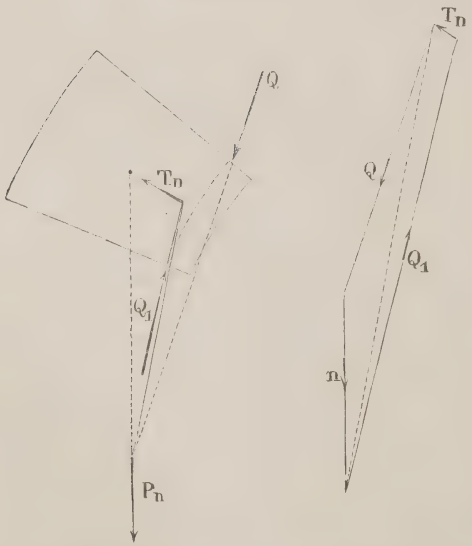


Fig. 181.



Wölbstück wirkenden Kräfte, durch das die Reaction T_n des Lehrgerüstes auf das $n$te Wölbstück bestimmt wird.

Q und Q_1 sind die Mittelpressungen, welche von dem vorausgehenden und dem folgenden Wölbstück herrühren.

T_n die gesuchte Reaction des Lehrgerüstes, und

P_n das bekannte Gewicht des Wölbstückes.

Im Seilpolygon setzen wir diese vier Kräfte in der Reihenfolge $Q\ P_n\ T_n\ Q_1$, im Kräftepolygon aber in der Folge $Q\ P_n\ Q_1\ T_n$ zusammen.

P_n und T_n gehen durch den Schwerpunkt des Wölbstückes, P ist vertical, T steht normal auf der innern Wölbfläche; die Richtungslinien beider sind demnach gegeben. Ausserdem kann noch Q, die von den oberen Wölbschichten herrührende Pressung, in Richtung und Grösse als bekannt angenommen werden. Zu bestimmen ist nun die Grösse von T und Richtung und Grösse von Q_1. Wird im Seilpolygon Q bis zur Richtungslinie von P_n verlängert, dort mit diesem Gewicht des Wölbstückes zusammengesetzt: so läuft die folgende Polygonseite die Mittelkraft $P_n\ Q$ mit der im Kräftepolygon gestrichten Linie, welche diese beiden Kräfte unterspannt, parallel. Ihr Schnitt mit T_n giebt einen Punkt der Kraft Q_1. Wird nun durch diesen Punkt eine Linie gezogen, welche mit der Normalen der untern Fuge den Reibungswinkel bildet, und schneidet diese Linie, wie in Fig. 180, die Fuge selbst, nicht deren Verlängerung, so ist sie die Richtungslinie von Q_1. Eine Parallele zu ihr durch das untere Ende von P_n im Kräftepolygon bestimmt durch ihren Schnitt mit dem in Richtung schon bekannten T_n die Grösse von T_n und Q_1.

Schneidet dagegen jene Linie nicht mehr die Fuge selbst, sondern deren Verlängerung (Fig. 181), so erhält man die Richtungslinie Q_1, indem man den Punkt T_n des Polygons mit der vordern Kante der Lagerfuge, oder besser mit einer Kante verbindet, die ,09 oder ,12 Meter im Innern des Gewölbes liegt, weil der von den oberen Wölbschichten herrührende Druck sich nicht auf eine Kante concentriren kann (einen Punkt im Querschnitt), sondern auf eine grössere Fläche sich verbreiten muss. Wie gross diese Fläche sei, hängt hauptsächlich von der physischen Beschaffenheit des Mörtels und von der Schnelligkeit des Mauerns während des Erhärtens des Mörtels ab und kann nicht genau ermittelt werden; die Entfernung, auf welche die Richtung des Mitteldrucks in das Innere des Gewölbes hineingebannt werden

muss, kann daher nur geschätzt werden. Ist aber diese Entfernung angenommen, so ist dadurch auch die Richtung des Druckes Q_1 in den kantenden Schichten, und durch diese Richtung gerade so wie in Fig. 180 auch die Grösse von T_n und Q_1 bestimmt.

131. Construction des Druckes auf ein Lehrgerüst.

Den obigen Betrachtungen über das Gleichgewicht des nicht geschlossenen Gewölbes entsprechend, wurde nun Taf. 22 der Druck eines nicht geschlossenen halbkreisförmigen Bogens von constanter Gewölbstärke auf sein Lehrgerüst construirt.

Taf. 22_{1-6} sind die Seilpolygone der bis zu verschiedener Höhe hinaufgeführten Gewölbe. Taf. 22_7 die Kräftepolygone für alle Seilpolygone. Ganz von selbst reihen sich in dieser Figur die Kräftepolygone von Fig. 180 und 181 so aneinander, dass alle P in einer geraden Linie und alle T in je einer Curve für jedes Seilpolygon aufeinander folgen. Jede dieser Curven ist mit einem T, das den Index der Figur des entsprechenden Seilpolygons trägt, bezeichnet. Die Transversalen zwischen den P und T sind die aufeinander folgenden Q. Zum Auftragen der P wurde das Gewölbe in eine Reihe fortlaufend numerirter Wölbstücke gleicher mittlerer Breite getheilt, und diese doppelte Breite a (Taf. 22_1 oben) als Basis der Flächenverwandlung zu Grunde gelegt. Der Flächeninhalt P_n eines solchen Wölbstücks wird daher durch dessen halbe Höhe ausgedrückt; diese Höhe nimmt gegen das Widerlager hin zu. Alle diese P wurden auf der Mittellinie von Taf. 22_7 nacheinander aufgetragen, und nun mit der gleichzeitigen Construction des Kräfte- und Seilpolygons, ganz wie es in der vorigen Nummer angegeben worden ist, begonnen, indem man für das oberste Wölbstück $Q = 0$ annahm. Zieht man durch die Endpunkte von P_1 Parallele zu T_1 und zu $Q_{1\,2}$, welches einen Winkel $\varphi = 15^0$ mit der Normalen zur Fuge bildet und durch den Schwerpunkt von 1 geht, so erhält man diese beiden Kräfte und so fort, wie schon erklärt, bis zu $Q_{5\,6}$. Wenn diese fünf obersten Q Taf. 22_1 so gezogen werden, dass sie mit der Normalen der ihnen zugeordneten Fugen Winkel von $\varphi = 15^0$ bilden, so schneiden sie noch die Fugen selbst, nicht deren Verlängerungen. Die obersten fünf Wölbschichten würden da-

her, wenn das Lehrgerüst zu schwach wäre, dieses durch Abgleiten eindrücken.

Um die Richtungslinien von Q leichter und rascher zeichnen zu können, wurden Taf. 22_1—$_5$ Kreisbogen einpunktirt, welche Sehnen berühren, die auf der innern Laibung des Gewölbes den Winkel $2\varphi = 30^0$ unterspannen. Wird daher vom untern Ende einer Fuge eine Tangente an diesen Kreis gezogen, so bildet sie mit der Normalen zur Fuge, mit der Kreistangente der Laibung den Reibungswinkel $\varphi = 15^0$; und das Q, das diese Fuge kreuzt, läuft mit dieser Tangente parallel.

Zieht man auch Q_{67}, sodass es 15^0 mit der Fuge 6 7 bildet, so schneidet es diese näher an der Kante, als wir als erlaubt angenommen hatten, und die Richtung wird dadurch bestimmt, dass man den Punkt T des Wölbstücks 6 mit dem Fugenpunkt verbindet, der um die angenommene Entfernung d von der Fugenkante ab im Innern liegt. Und so fort bei allen folgenden Q.

Innerhalb dieser Schichten, die wir die kantenden im Gegensatz zu den obern gleitenden Schichten nennen wollen, würde also das Gewölbe einfallen, indem es sich um die untere Kante drehen würde, wenn das Lehrgerüst zu schwach wäre.

Auf die gleiche Weise wurden auch die T für die folgenden Stände der Wölbschichten Taf. 22_{2-5} construirt. Wir bemerken hierbei, dass sowohl innerhalb der gleitenden, als auch der kantenden Schichten der Druck auf das Lehrgerüst von oben nach unten abnimmt, allein dass er auf der Grenze beider grösser als unmittelbar vorher und nachher ist. So bei den Schichten 6, 9, 12, 17 in den Figuren Taf. $22_{1\,2\,3\,4}$.

Es ist nicht schwer einzusehen, dass, während innerhalb der gleitenden und kantenden Schichten der Druck sich über das Lehrgerüste vertheilt, auf der Grenze zwischen ihnen ein auf einen Punkt concentrirter Druck stattfinden muss. In der That betrachtet man den Büschel aller Q als das Druckpolygon, was ja gestattet ist, weil man sich die Q verändernden beiden Kräfte P und T zu einer einzigen vereinigt denken kann: so reducirt sich die in die Figuren eingezeichnete zickzackförmige Drucklinie auf den Büschel der Q. Die Linie, welche dieser Büschel umhüllt, die eigentliche Drucklinie, welche innerhalb der gleitenden und kantenden Schichten eine in gleichem Sinne wie die Wölblinie gekrümmte Curve ist, bildet auf der Grenze der gleitenden und kantenden Schicht eine Ecke. Diese Ecke wäre sichtbar, wenn wir alle Q

bis zur Druckcurve verlängert hätten, was nicht geschah, weil die Zeichnung bis zur Undeutlichkeit überladen worden wäre. Allein wir können auf die Ecke aus der Art und Weise schliessen, wie Q sich dreht, während es die Drucklinie beschreibt.

Innerhalb der gleitenden Schichten dreht sich Q in gleichem Sinne mit der Tangente an die Wölblinie, mit der es ja einen constanten Winkel φ bildet. Innerhalb der kantenden Schichten dreht sich Q noch in demselben Sinne, allein der Winkel, den es mit der Tangente bildet, ist viel kleiner, nahezu $= 0$, weil die Stützlinie mit der innern Wölblinie parallel läuft. Auf der Grenze der gleitenden und kantenden Schichten muss sich daher der Strahl Q plötzlich in einem Punkt um einen endlichen Winkel rückwärts gedreht haben. Diesem Winkel entspricht die Ecke in der Drucklinie und dieser eine endliche concentrirte Last. Dieses in der Natur der Sache liegende Verhältniss springt aus Taf. 22_7 am klarsten in die Augen bei $T_{2\,3\,4}$. Der Winkel, den Q mit P bildet, wird immer kleiner bis zu den $Q_{9\,12\,17}$, dann wird dieser Winkel auf einmal wieder grösser, um innerhalb der kantenden Schichten wieder abzunehmen.

Das eben Gesagte geht auch aus der Form der Stützlinie hervor, die man erhält, wenn man die Schnittpunkte der Q mit den entsprechenden Fugen verbindet. Im obern Theil des Gewölbes folgt der eingezeichnete Linienzug der Drucklinie, um im untern mit der innern Wölblinie concentrisch zu laufen, weil von Constructionswegen die d constant gemacht wurden. Also auch diese wird eine Ecke auf der Grenze der gleitenden und kantenden Schichten bilden. Sie wurde nicht eingezeichnet, weil es viel schwerer ist, allgemeine Folgerungen auf sie als auf die Drucklinie zu gründen, die ein weniger complicirtes und unmittelbares Gebilde ist.

Die auf diese Weise construirten T wurden nun doppelt auf jeder Wölbschicht aufgetragen, wenn der Construction eine einfache Schicht, einfach aber, wenn ihr eine Doppelschicht zu Grunde gelegt war, wie es im untern Theile des Gewölbes geschah. Da die Basis der Kräfte gleich der Breite einer doppelten Wölbschicht ist, so ist der durch diese Höhe abgeschnittene Theil der Schicht dem Druck auf das Lehrgerüst proportional. Um diesen Druck klarer zur Anschauung zu bringen, wurden alle diese Höhen durch eine

Curve, die Belastungscurve, miteinander verbunden und die von ihr abgeschnittene Fläche schraffirt.

Taf. 22_4 wird der von den gleitenden Schichten herrührende Druck schon vor der concentrirten Belastung $= 0$, also kann es zwischen den gleitenden Schichten und der concentrirten Belastung freitragende Schichten geben, welche das Lehrgerüste nicht belasten.

Taf. 22_5 folgt auf die gleitenden Schichten keine weitere Belastung des Lehrgerüstes mehr.

Es kann auch vorkommen, dass alle Kräfte sich auf eine concentrirte Belastung ganz allein beschränken, über und unter der freitragende Schichten sich befinden; doch muss man, um diesen Fall zur Evidenz zu bringen, den Reibungswinkel grösser annehmen. Taf. 22_6 wurde er deshalb $\varphi = 30^0$ angenommen. Es wurden dann die Schwerpunkte der obersten 1, 2, 3, 4, 5 Wölbschichten nacheinander durch ein wieder ausgelöschtes Seilpolygon bestimmt und die Schnitte der durch sie gehenden Verticalen mit der untern Fuge durch eine Linie, die Stützlinie, miteinander verbunden. Da, wo sich diese um mehr als d der innern Wölblinie nähert, wurde der Mitteldruck P_{16-20} in dem Punkte, wo er T_6 schneidet, in diese Seitenkraft und die Seitenkraft Q zerlegt, welche die Fuge 20, 21 in der Entfernung d von der innern Wölblinie schneidet. Dieses Q dringt aber schon so sehr in das Innere des Gewölbes, dass an ein Heraustreten desselben nicht mehr zu denken ist.

Ueber und unter T_6 befinden sich also freitragende Schichten.

Aus Obigem kann man folgern:

Die oberste Reihe Schichten eines nicht geschlossenen Gewölbes belasten das Lehrgerüste, indem sie abgleiten.

Die zweite Reihe Schichten halten sich, ohne zu belasten, sind freitragende.

Dann folgt eine Schicht, welche einen concentrirten Druck ausübt.

Die dritte Reihe Schichten belasten, indem sie umkanten, sind kantende.

Die vierte Reihe sind wieder freitragende.

Von diesen Reihen Schichten können beliebige ausfallen, nur können die kantenden und die zu ihnen gehörenden, auf einen Punkt drückenden nie die obersten werden, und auf der obern Grenze der kantenden wirkt immer eine concentrirte Belastung.

Dass die obersten Schichten nur gleitende oder freitragende sein können, folgt daraus, dass alle Fugen mehr oder weniger geneigt sind; wir können uns daher die obersten Wölbschichten immer so dünn denken, dass die Verticale durch ihren Schwerpunkt die Fuge selbst, nicht deren Verlängerung schneidet, woraus folgt, dass diese oberste Schicht sich entweder frei trägt oder abgleitet.

Dass aber auf der Grenze der kantenden und gleitenden oder freitragenden Schichten immer eine concentrirte Belastung wirken muss, ist oben schon bewiesen worden.

132. Die Maximalbelastung des Lehrgerüstes.

In der vorigen Nummer haben wir gezeigt, wie gross die Theorien des Gleitens und des Kantens, auf die bisher bei Mauerwerk alle Stabilitätsuntersuchungen zurückgeführt wurden, den Druck auf das Lehrgerüst geben. Dafür aber, dass er in der Praxis genau wirklich so gross sei, können wir nicht einstehen.

Vorerst haben wir bei dem Bau der Gewölbe, den wir zu beobachten Gelegenheit hatten, nie Spuren von dem concentrirten Druck bemerken können; in der That könnte er sich auch nur dann äussern, wenn die Schicht, die ihn ausüben soll, den andern Schichten gegenüber vortreten könnte, daran wird sie aber durch deren keilförmige Gestalt verhindert. Mithin vertheilt sich dieser Druck auf die nächsten Schichten, d. h. es ist kein concentrirter mehr. Die Drucklinie kann demnach wohl sinuös sein, allein sie kann keine Ecke mehr bilden; durch Aenderung der Drucklinie wird aber das ganze Belastungsgesetz geändert. Die Frage ist nur, in welchem Sinne ändert sich dieses Gesetz, wenn man die Beobachtungen in der Praxis zu Rathe zieht.

Vor Allem ist zu bemerken, dass der Reibungswinkel nicht constant ist, er ändert sich mit dem Erhärten des Mörtels. Wenn man Gewölbe ausführt, in denen das Lehrgerüste nur den obern Theil ausfüllt, so beginnen die Steine im frischen Mörtel schon bei einem Winkel von 4—5° zu rutschen, werden sie aber dann durch Lattenstücke gespreitzt, auch nur während einer Nacht, bis der Mörtel angezogen hat, so halten sie von selbst. In den obersten Schichten ist also der Reibungswinkel zwischen den Schichten kleiner als in den untern, woraus unmittelbar geschlossen werden

kann, dass auch der Druck in den obersten gleitenden Schichten grösser sei als unsere Constructionen ergaben.

In den untern Schichten ist er kleiner, denn bei sehr steifen Lehrgerüsten beobachtet man mitunter, dass die untersten Schalhölzer lose werden, und manche Lehrgerüste, z. B. die nach englischem System gebauten, gewähren den untersten Steinen keine Unterstützung. Dies kann nun nicht durch die Vergrösserung des Reibungswinkels, der bei den untern Schichten nicht mehr in Betracht kommt, sondern nur dadurch erklärt werden, dass die bei den untersten Schichten bedeutender werdende Kraft Q das Lehrgerüst daselbst entlastet.

In den untersten Schichten darf man also den Druck auf das Lehrgerüst vernachlässigen, in den obersten aber muss das Maximum des Druckes, den die Theorie überhaupt giebt, angenommen werden.

Den grössten Druck übt die frisch aufgelegte Schicht aus. Ein Blick auf Taf. 22 zeigt es; das Aufbringen der folgenden Schichten entlastet das Lehrgerüst unter ihr.

Wir erhalten also den grössten Druck, dem ein Theil des Lehrgerüstes ausgesetzt sein kann, wenn wir annehmen, die es belastenden Schichten seien die obersten und der Reibungswinkel sei sehr klein.

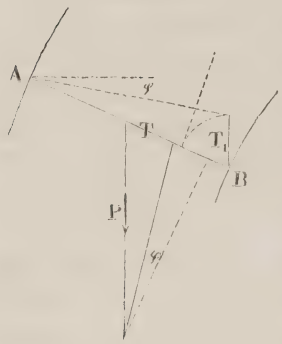
Bei Annahme eines kleinen Reibungswinkels dürfen wir auch die concentrirten Belastungen ausser Acht lassen, denn sie verschwinden mit dem Reibungswinkel. Sobald innerhalb der gleitenden Schichten der Druckstrahl mit der Tangente der Wölblinie parallel läuft: schmiegt sich dieser an die Drucklinie der kantenden Schichten an und mit der Ecke in der Drucklinie auf der Grenze der beiden Schichtenreihen, verschwindet natürlich auch die concentrirte Belastung.

Gar einfach wird die Construction der Belastungscurve, wenn wir annehmen, die Schicht sei gerade die oberste, d. h. wenn wir $Q = 0$ setzen.

Denken wir uns, AB Fig. 182 S. 478 sei die Mittellinie einer Wölbschicht, P ihr Gewicht, so haben wir dasselbe in zwei Seitenkräfte zu zerlegen, wovon die eine T nach der Richtung der Fuge wirkt und die andere mit ihrer Normalen den Reibungswinkel φ bildet, wie es in der Figur angedeutet ist. Will man den Druck wie oben durch eine Fläche darstellen, welche demselben proportional ist,

so braucht man nur die Gewölbdicke AB als unendlich schmales Gewölbelement zu betrachten und im Verhältniss von $P:T$ zu reduciren. Es geschieht, indem auf AB selbst das PT ähnliche Dreieck AT_1 construirt wird, in welchem das verticale T_1 durch eine Linie abgeschnitten wird, welche mit der Horizontalen den Reibungswinkel φ bildet. Wird schliesslich T_1 auf die Fuge AB herunter geschlagen, die Endpunkte aller T durch eine Curve miteinander verbunden, so stellt das Gewicht des zwischen der Curve und der innern Wölblinie befindlichen Gewölbtheiles den normalen Druck auf das Gewölbe dar.

Fig. 182.



Oben haben wir schon bemerkt, dass der Reibungswinkel φ sehr klein angenommen werden muss, wenn die concentrirte Belastung und damit auch die kantenden Schichten verschwinden sollen. Will man ganz sicher gehen, so setze man ihn $= 0$. Dies wird man thun, wenn man nur so schnell ohne weitere Untersuchungen den Druck auf das Lehrgerüste bestimmen will. In diesem Falle reducirt sich (siehe die Wiederholung der Fig. 182 auf Taf. 22_1 unten) T_1 auf die verticale Höhe der Fuge. Wird daher diese auf die Fugen herunter geschlagen, so erhält man ein in der Praxis nicht mehr erreichbares Maximum des Druckes auf das Lehrgerüst.

Auf Taf. 22 geschah dies, und es wurden alle Endpunkte von T_1 durch eine punktirte Curve miteinander verbunden. Vergleicht man den von dieser Curve abgeschnittenen Gewölbtheil mit dem schraffirten unter der genauer bestimmten Belastungslinie: so wird man finden, dass erstere in den obern Theilen des Gewölbes durchaus keine viel zu grosse Belastung angiebt. Wird daher in den untern Theilen des Gewölbes, die gewöhnlich von den Gerüsten nicht ausgefüllt sind oder in denen die Gerüstbalken nur relativ in Anspruch genommen sind, der Druck auf das Gerüste ganz vernachlässigt, so wird das auseinandergesetzte, wohl etwas summarische, allein gar praktische Verfahren gewiss keine übertriebenen Annahmen enthalten.

Nach demselben wurden also Taf. 23 die Stärken der drei dort verzeichneten Gewölbe reducirt.

133. Kräftepläne einiger Lehrgerüste.

Taf. 23 geben wir die Kräftepläne einiger Lehrgerüste. Nur auf Taf. 23_7 wurde das wirkliche Gerüste eingezeichnet, um zu zeigen, wie ihm das links gezeichnete Seilpolygon der Mittellinien entspricht. Taf. 23_1 und $_4$ haben wir uns dann damit begnügt, die Polygone der Mittellinien allein zu zeichnen.

Nachdem, sowie es in der vorigen Nummer erklärt wurde, die schraffirte Belastungsfläche construirt war, wurde jedem Knotenpunkt 3 4 5 Taf. 23_1, 2 3 Taf. 23_4 und 3 4 5 Taf. 23_7 der Lehrgerüste das auf ihr treffende Stück Belastungsfläche zugewiesen.

Um nun das Gewicht des durch diese Fläche dargestellten Gewölbtheiles direct in Tonnen auf dem Maassstab der Kräfte abgreifen zu können, wurde die Fläche so auf ein Dreieck mit der Doppelbasis $2h$ reducirt, dass die andere Dimension T des reducirten Dreiecks den Druck direct angiebt.

Bezeichnen wir die Anzahl Tonnen, welche die Flächeneinheit des reducirten Dreiecks wiegt, also das Gewicht der Cubikeinheit Mauerwerk mal der Entfernung der einzelnen Rippen des Lehrgerüstes von einander mit $\varkappa$: so wird $\varkappa h$ das Gewicht eines Mauerkörpers dreieckigen Querschnitts sein, dessen Grundlinie und Höhe $2h$ und 1 sind. Bezeichnet nun m die Anzahl Tonnen, welche durch die Längeneinheit dargestellt wird, d. h. den Maassstab der Kräfte, so muss, weil durch 1 auch das Gewicht des Dreiecks $2h \,.\, 1$ dargestellt werden soll, nothwendiger Weise:

$$\varkappa h = m;\ h = \frac{m}{\varkappa} \text{ sein.}$$

Wiegt z. B. der Cubikmeter 2 Tn. und beträgt die Entfernung der Lehrbogen von einander 3 Mtr., so ist $\varkappa$ der von einem □Mtr. Belastungsfläche herrührende Druck auf den Bogen $= 6$ Tn. Bezeichnet nun der Meter Länge, im Maassstab der Figur natürlich, 10 Tn., so muss $h = \frac{10}{6} = 1{,}66$ Mtr. und $2h = 3{,}33$ Mtr. hoch gemacht werden.

Da den Bogen auf Taf. 23 keine speciellen Maassnahmen zu Grunde liegen, so wurde h ungefähr der Gewölbdicke gleich gemacht; es giebt diese Annahme ganz schöne Kräftepolygone.

Ein zur innern Wölblinie concentrisch punktirter Kreisbogen schneidet auf allen Fugen die Höhe $2h$ ab, und die Reduction der Wölbsegmente nach den bekannten Regeln der Flächenverwandlung auf diese Doppelbasis $2h$ giebt den auf dem Maassstab der Kräfte abzugreifenden, voll ausgezogenen Druck T, welcher auf die einzelnen Knotenpunkte wirkt.

Die weitere Zerlegung der Kräfte nach der Richtung der einzelnen Theile des Lehrgerüstes ist ganz identisch mit derjenigen, die im IV. Kapitel S. 417 zur Bestimmung der an Dachstühlen wirkenden Kräfte ausgeführt wurde. Wir dürfen uns daher hier etwas kürzer fassen.

Jedes der beiden Lehrgerüste Taf. 23_1 und $_7$ zerfällt in zwei von einander unabhängige, für sich bestehende Sprengwerke. Das obere besteht aus einem Spannriegel und zwei Streben, das untere aus vier Streben, deren beide unteren Knotenpunkte in Taf. 23_7 und in Taf. 23_1 rechts durch einen Balken in ihrer Lage erhalten werden, während sie Taf. 23_1 links frei sind und nur durch das Gewölbe selbst am Ausweichen verhindert werden.

Taf. 23_3 und $_8$ sind die Kräftepolygone des obern Theiles. Indem man den Linienzug der Balkenmitten selbst als das Seilpolygon und die Kräfte 4 6 die Reaction des Pfosten 8 und den Druck 2 im Spannriegel als die an ihm im Gleichgewicht befindlichen Kräfte betrachtete, wurden durch die Endpunkte der Kraft 4, parallele Linien zum Spannriegel und zur Strebe gezogen. Sie schneiden sich im Pol O. Als erste Kraft wurde 2 ausgezogen, dagegen die Parallele zur Strebe als Druck in einer Polygonseite nur punktirt. Dieser letztere Druck zerlegt sich am Fusse der Strebe in die Reaction des Mauerwerks 6, welche den Reibungswinkel von Holz auf Stein mit der Normalen auf die Mauer bildet, und den Druck 8 im Pfosten. Die Parallelen 6 und 8 zu diesen Linien durch die Enden der punktirten geben die Grösse dieser beiden letzten Kräfte.

Als am untern Sprengwerk mit horizontalen Zwischenbalken wirkend wurden angenommen die Reaction der Gegenstrebe 1, die Gewölbdrücke 3 und 5, der Zwischenbalken 7, die Reaction der Mauer 9, die auch den Reibungswinkel von Holz auf Mauerwerk

mit der Normalen zur Mauer bildet, und endlich der Druck 11 im Pfosten.

Zwei Parallele zu den Streben Taf. 23_2 und $_9$ durch die Enden des Scheiteldrucks 3 bestimmen die Reaction der Gegenstrebe, die bei symmetrischer Construction dem punktirten Druck in der Polygonstrebe gleich ist. Diesen Kräften 1 und 3 wird beigefügt 5 in Richtung und Grösse und 7 in Richtung und Lage allein. Da die Mittelkraft der jetzt aufgezählten Kräfte 1 3 5 7 mit der Richtung der letzten Polygonseite zusammenfallen muss, so schneidet die durch den Pol *O* punktirte Parallele zu ihr auf 7 die Kraft, die an dem Zwischenbalken wirkt, ab. Wie die Richtung der Pfeile zeigt, ist dieser in Taf. 23_1 gespannt, in Taf. 23_2 dagegen comprimirt. Da die letzte punktirte Linie den Druck in der letzten Strebe darstellt, so geben zwei Parallele 9 und 11 zu den an ihrem untern Ende wirkenden Kräften diese letztern selbst. Im Mauerpfosten addiren sich natürlich 8 und 11. Taf. 23_3 und $_8$ sind sie addirt.

Wenn Taf. 23_1 links kein Zwischenbalken in das untere Sprengwerk eingezogen ist, so muss die Kraft 5 Taf. 23_2 bis zum Schnitt mit dem Strahl $O)_{7\,9}$ gezogen werden, sodass die Kraft 7 ausfällt und sich 5 zu 5_1 vergrössert, ebenso vergrössern sich auch 9 und 11. Diese grössere Reaction muss der untere ausgeführte Theil des Gewölbes dem obern, den Schluss machenden entgegensetzen können, wenn Stabilität vorhanden sein soll. Dies ist nun immer der Fall, denn viel grösser als 5_1 wäre die Kraft, die nothwendig ist, um den untern verspannten Theil des Gewölbes nach aussen zu werfen. Wenn aber das untere Sprengwerk beim Schluss des Gewölbes stabil ist, so ist es nicht immer stabil beim Beginn des Wölbens, wenn es mit 5, aber noch nicht mit 3 belastet ist. Dann sollte der Scheitel mit $3''$ belastet sein, das man erhält, wenn man die Figur $O\,3''5''$ der Figur $O\,3\,5'$ ähnlich und $5'' = 5$ macht. Und sollen die Seiten des Lehrgerüstes nicht eingedrückt werden, muss der Scheitel mit Steinen vom Gewicht $3''$ provisorisch belastet werden. Viel zweckmässiger ist es daher, man zieht den Zwischenbalken ein; doch ist dies eine Sache, die in den Bau der Lehrgerüste, nicht in die graphische Statik gehört.

Das kleine Lehrgerüst Taf. 23_4 links besteht nur aus einem einzigen Sprengwerk, dessen Seilpolygon durch eine einzige gerade Linie dargestellt wird. An derselben wirken: die Reaction der Gegenstrebe 1 (steht auf der rechten Seite), die Belastungen

durch das Gewölbe 2 und 3, die Reaction des Spannriegels 4, endlich die Kräfte 5 und 6 am Fusse der Strebe, bezüglich deren Alles gilt, was von den Kräften 6, 8 und 9, 11 der vorigen Lehrgerüste gesagt wurde.

Zwei Parallele durch die Endpunkte des Gewölbdrucks 2 Taf. 23_5 geben den Druck 1 in der Gegenstrebe und den punktirten Druck in dem obern Theil der Hauptstrebe. Fügt man nun den Kräften 1 und 2 noch 3 in Richtung und Grösse, 4 aber nur in Richtung und Lage bei, so wird die Reaction 4 des Spannriegels durch den Strahl O) 4 5, der mit dem untern Theil der Strebe parallel läuft und den Druck in derselben darstellt, abgeschnitten. Im vorliegenden Falle decken sich die Richtungen O) 2 3 und 4 5. Die Parallelen 5 und 6 durch die Endpunkte der Strebe geben die am Fusse derselben wirkenden Kräfte.

Etwas complicirter ist das übrigens nette Lehrgerüst Taf. 23_4 rechts. Wir betrachten den Balkenzug 1 2 3 6 als Seilpolygon. Die Kräfte 1 und 2 sind gegeben, ihre Mittelkraft ist vertical und ihre Richtung fällt mit dem Mittelpfosten zusammen. Zu derselben addirt sich nun noch die ebenfalls gegebene Scheitelbelastung 3. Der Druck in der Gegenstrebe, 4 steht auf der linken Seite, wird durch den Strahl O) 4 5 abgeschnitten, der mit der Hauptstrebe parallel läuft und dessen Länge auch dem Druck in ihr gleich ist.

Dieser Druck zerlegt sich schliesslich in die horizontale Spannung 5 des Spannriegels und in die verticale Reaction 6 des Auflagers.

Hiermit schliessen wir die Zahl der Beispiele über die Bestimmung der Kräfte, welche an den einzelnen Theilen eines Lehrgerüstes wirken. Da noch keine Lehrgerüstsysteme sich ausgeschieden haben, so können wir keine allgemeinen Regeln über die Anfertigung ihrer Kräftepläne aufstellen. Wir mussten uns auf die Construction einzelner beschränken und es dem Leser überlassen, sich in andern Fällen auf ähnliche Weise zu helfen.

Viertes Kapitel.

Der Bogen.

134. Lage der Drucklinie im Bogen.

Unter dem Bogen verstehen wir, wie früher schon gesagt wurde, vorzugsweise den eisernen Bogen, dessen Eigengewicht, im Verhältniss zur zufälligen Belastung, nicht mehr so gross ist, dass letztere vernachlässigt werden kann. Bei ihm darf man sich daher nicht auf die Construction der Drucklinie des ziemlich gleichförmig vertheilten Eigengewichts beschränken, es muss auch der der einseitigen zufälligen Belastung im Bogen Material entgegengestellt werden.

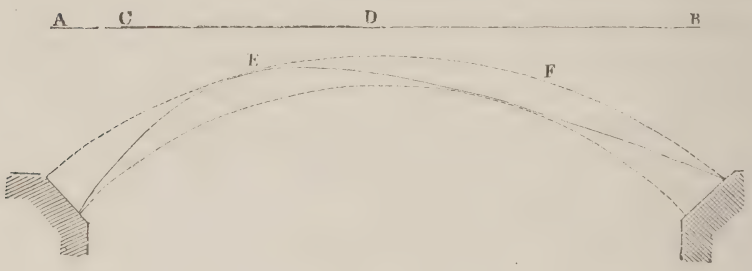
Um die Form des Bogens diesem Standpunkt entsprechend zu bestimmen, ist vor Allem zu untersuchen, welche Belastungsart des Bogens die grösste Abweichung der Drucklinie von der Drucklinie der Totalbelastung bewirkt.

Unter den Umrissen des Bogens Fig. 183 S. 484 denken wir uns die äusseren Grenzen des Centralkerns dargestellt, dessen Axe mit der Drucklinie der Totalbelastung zusammenfällt. Dieser Bogen werde auf die Strecke CD mit der grösstmöglichen zufälligen Belastung beschwert, während die übrigen Strecken AC und DB unbelastet bleiben. Denken wir uns das Kräftepolygon aufgetragen, so wird der Strahl, der es von irgend einem Pol aus projicirt, sich schneller in der belasteten als in der unbelasteten Strecke drehen; da dasselbe auch von dem Strahle gilt, der die Drucklinie beschreibt und der jenem immer parallel bleibt, so folgt, dass die Drucklinie innerhalb der belasteten Strecken viel stärker als innerhalb der unbelasteten gekrümmt ist, in den ersten mehr, in den zweiten weniger als die Axe des Balkens, der eine mittlere Krümmung einhält, wenn die Drucklinie aus letzterem nicht heraustritt.

Denken wir uns nun, die zufällige Belastung sei eine ungünstigste, sodass die Höhe des Centralkerns nicht weiter vermindert werden könnte, ohne dass der von ihm erzeugte Bogen überschrit-

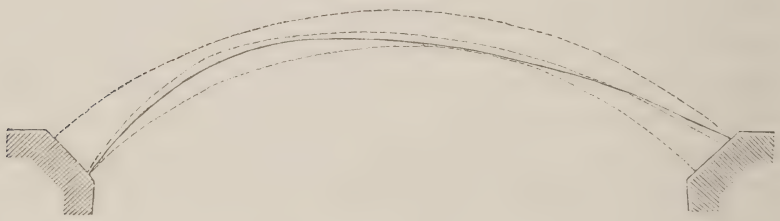
ten werde: so muss die Drucklinie die in Fig. 183 gezeichnete Lage haben, in zwei Punkten *E* und *F* die Bogenränder berühren und am Ende *A* der belasteten Seite durch die untere, an dem der

Fig. 183.



unbelasteten durch die obere Bogenecke gehen. Denn berührte die Drucklinie den Bogen nicht im Punkt *E* z. B. und läge sie weiter im Innern, wie es durch Fig. 184 dargestellt wird, so könnte durch

Fig. 184.



Annahme einer kleinern Poldistanz im Kräftepolygon und durch Hinaufrücken dieses Poles eine Stützlinie in der punktirten Lage von Fig. 184 gezeichnet werden, welche überall vom Bogenumfang absteht und die daher eine Verminderung der Bogenhöhe zulässt. Dasselbe wäre möglich, wenn die Drucklinie in irgend einem andern Punkte *AFB* den Rand des Kernbogens nicht berührte.

Ebenso klar und selbstverständlich ist es, dass, wenn die Drucklinie in dreien der Punkte *AEFB* den Rand des Kernbogens berührt und ihn im vierten überschreitet, dass dann die Höhe des Kernbogens ungenügend ist.

Ist dies für eine gegebene Belastung angenommen, so folgt unmittelbar, dass bei derjenigen Belastung, welche die Drucklinie am weitesten aus dem Kernbogen heraustreibt und den höchsten Bogen verlangt, die eine der Strecken *AE* z. B. ganz belastet, die

andere FB ganz unbelastet sein muss. Denn wäre z. B. AE nicht ganz belastet und würde die Berührung des Kernumfangs in den vier Punkten stattfinden: so würde bei Festhaltung der Lage und Belastung der Drucklinie auf der Strecke EB und bei Ergänzung der Belastung auf AE die Drucklinie innerhalb dieser Strecke sich neigen und bei A heraustreten. Da in EFB noch Berührung stattfindet, so müsste dem eben Bewiesenen entsprechend die Bogenhöhe vergrössert werden. Ebenso, wenn ein Theil der Strecke FB belastet wäre, würde durch Entlastung derselben die Stützlinie auf dieser Strecke steigen und bei B heraustreten, während bei AEF die Berührung des Umfangs des Kernbogens fortbesteht. Auch in diesem Falle wäre die Bogenhöhe ungenügend.

Wie verhält es sich nun mit der Mittelstrecke EF? Wie muss diese in dem ungünstigsten Falle belastet sein? So viel uns bekannt ist, wurde dies noch nicht genauer untersucht. Aus gewissen Analogien (s. Nr. 144 am Schluss) glauben wir vermuthen zu dürfen, es müsse für die ungünstigste Belastungsart die Totalbelastung um $^1/_{10}$ oder $^1/_8$ der Weite über die eine totalbelastete Hälfte hinausragen. Die wenigen Zeichnungen, die wir auszuführen Zeit hatten, um durch Probiren zu bestimmen, ob es schwerer sei, eine Drucklinie mit $^7/_{12}$ Totalbelastung als eine solche mit $^6/_{12}$ Totalbelastung in den Kernbogen einzuschliessen, waren wegen des zu kleinen Maassstabes nicht entscheidend genug. Auf der Zeichnung konnten beide gleich gut eingezeichnet werden, sie deckten sich beinahe.

Aus diesem Grunde nehmen wir, bis dieser Gegenstand genauer erörtert ist, hauptsächlich der einfachern, leichtern, raschern Construction wegen an:

Die Drucklinie eines Bogens, dessen eine Hälfte total und dessen andere gar nicht belastet ist, verlangt zur Umhüllung den höchsten Kernbogen.

Wir zeichnen diese Drucklinie, indem wir, wie es Fig. 183 angedeutet ist, in der Mitte einen Horizontalschub H annehmen, der auf der einen Seite eine Drucklinie der Totalbelastung erzeugt, die den obern Kernrand berührt und durch die untere Kernbogenecke geht, während auf der andern unbelasteten Seite sie den untern Kernrand berührt und durch die obere Bogenecke geht.

Wenn der Bogen symmetrisch gebaut ist, ist es zweckmässig,

alle Constructionen auf der einen Bogenhälfte auszuführen, indem man sich beide Hälften zusammengeklappt denkt, wie Fig. 185 es zeigt.

Fig. 185.

Will man beide Drucklinien als getrennt für sich allein construiren, so hat man nur darauf zu achten, dass die Horizontalschübe im Scheitel gleich gross seien und gleichen Winkel mit der Horizontalen bilden. Am zweckmässigsten ist wohl die Fig. 185 angedeutete Anordnung, wo auf der einen Seite der Verticalen vom Angriffspunkt von H ab das Eigengewicht P, auf der andern Seite die Totalbelastung P_1 auf den Tangenten an die Drucklinien über H aufgetragen und mit den Kräftepolygonen PH und $P_1 H_1$ die Drucklinien construirt werden.

Die Fig. 185 setzt eine Fuge am Widerlager voraus, wo der Bogen satt und breit aufsitzt. Vor 16, 18 Jahren glaubten die Engländer wegen der Ausdehnung des Bogens unter dem Einfluss der Temperatur den Fuss um sein Auflager drehbar machen zu müssen, damit der Bogen leichter die dem längern Bogen entsprechende Form annehmen könne. In diesem Falle geht die Drucklinie natürlich immer durch diesen Punkt und nimmt daher bei Annahme einer totalbelasteten Brückenhälfte die Form Fig. 186 an. Und diese Form muss der Bogen mit seinem Kern umhüllen, wenn er stabil sein soll. Bei gleichen Belastungsverhältnissen

muss also ein solcher Bogen viel höher als ein Bogen mit festem Auflager sein, demnach auch mehr Material kosten, wenn man von dem Bogen annimmt, er müsse die Drucklinie umhüllen; auch ver-

Fig. 186.

langt er mehr Material, wenn man ihn als elastische Linie betrachtet und analytisch behandelt, denn bei gleichem Elasticitätsmoment der Querschnittsfläche leistet der unten breit aufsitzende Bogen, dessen Endtangente also fixirt ist, grössern Widerstand als der, dessen Endtangente beweglich ist; haben doch die Versuche Hadgkinson's direct die Ergebnisse der Theorie bestätigt, dass unten breit aufstehende Pfosten nach Umständen noch einmal so viel tragen als unten abgerundete. In jeder Beziehung ist es also bezüglich der Stabilität zweckmässiger, den Bogen unten breit aufzusetzen als ihn abzurunden.

Es fragt sich nun, ob die Befürchtungen wegen den Temperaturveränderungen begründet sind. Vor dem Bau der Arcole-Brücke in Paris hat Herr Ingenieur Oudry verschiedene Belastungsversuche mit einer Bogenrippe, deren Spannweite beinahe so gross, als die der Brücke selbst war, gemacht, von denen namentlich der folgende für die vorliegende Frage entscheidend ist. Er konnte durch Antreiben der Keile, auf denen die Brücke oben und unten am Auflager ruhte, den Scheitel der Brücke um viel mehr senken und heben, als es durch die Längenänderung des Bogens durch die Temperaturdifferenzen geschehen könnte, ohne dadurch die Tragfähigkeit des Bogens zu schwächen. Das Antreiben und Nachlassen dieser Keile wirkt aber genau in derselben Weise, als wie die Temperaturänderungen. Werden durch Antreiben der oberen und gleichzeitig Nachlassen der unteren Keile die Endtangenten gesenkt, so würde die sie verbindende Curve kürzer sein können; da aber an der Länge nichts geändert wurde, so ist es gerade so, als ob man einen zu langen Bogen zwischen zu nahe Widerlager klemmte. Es ist gerade so, als ob der Bogen durch

Erwärmung verlängert worden wäre; in beiden Fällen hebt sich der Scheitel, und umgekehrt. Nachdem sich so Herr Oudry von der Unschädlichkeit der Temperaturausdehnungen überzeugt hatte, entschied er sich für das stabilere breite Auflager.

Es wurden auch interessante Beobachtungen über die Formänderungen der unten auch breit aufgesetzten, 60 Meter weiten Bogen der schönen gusseisernen Eisenbahnbrücke über die Rhone bei Tarascon in den Annales des ponts et chemins 1854 veröffentlicht, denen wir aber weiter nichts entnehmen können, als dass die Formänderungen nur langsam den Temperaturen folgen, dass sie geringer sind, als die bekannten Coefficienten erwarten lassen, und dass man nirgends erwähnt findet, dass sie schädlich seien.

Wenn aber dieser Gegenstand schon seit mehr als zehn Jahren erledigt erscheint, so muss man fürchten, es könnten Diejenigen, welche immer noch ihre eisernen Brücken auf drehbare Auflager stellen wollen, auch einmal auf die Idee kommen, bewegliche Auflager für steinerne Bogen construiren zu wollen!

Bekanntlich dehnen sich ja die Steine nicht viel weniger, als das Eisen bei gleicher Temperaturänderung aus, und doch ist der Elasticitätsmodul des Eisens viel kleiner, als der für Stein; der verlängerte steinerne Bogen kann sich also nicht so leicht der festen Spannweite anschmiegen, als der eiserne, und es wäre entschieden wichtiger, die steinernen statt die eisernen Bogen auf drehbare Kämpfer zu stellen. Da nun aber ein derartiges Gaukelwerk gar keinen besonders stabilen Eindruck machen würde, so glauben wir ein breites solides Auflager für alle Bogen empfehlen zu dürfen.

Wenn der Bogen sehr wenig hoch, so niedrig ist, dass er die Drucklinie der einseitigen zufälligen Belastung nicht mehr umhüllen kann, dagegen seine Gewölbschenkel sorgfältig versteift sind, so kann man ihn als Fachwerk betrachten. In diesem Falle muss die Stützlinie auch so, wie in Fig. 186 eingezeichnet werden. Der Druck am Widerlager muss dieses in demselben Punkte, als wie die Mittellinie des Lagers schneiden, weil ja dort das Fachwerk zu Ende, unterbrochen ist, dem Streckbaum und der Strebe demnach im Widerlagerschnitt nichts aufgebürdet werden kann; in allen übrigen Punkten kann die Drucklinie von der Bogenaxe abweichen. Der Druck, den sie in einem Schnitt angiebt, wird

nach der Richtung des Bogens, des meistens in der Scheiteltangente liegenden Streckbaums und nach der der Strebe, ganz wie bei dem Fachwerk zerlegt.

135. Der Kräfteplan eines Bogens.

Die angedeuteten Constructionen haben wir jetzt noch an einem Kräfteplan als Beispiel zu erklären.

Es sei der Kräfteplan für eine Bogenbrücke von 63 Mtr. Spannweite, 6 Mtr. Pfeilhöhe und 9,4 Mtr. Breite zu construiren.

Als zufällige Belastung wird ein Menschengedränge von 0,28 Tn. pro □Mtr. angenommen. Eine auf Grund einer Skizze vorgenommene Gewichtsberechnung ergab als Eigengewicht der Fahrbahn incl. der sechs Bogen, aus denen die Brücke hergestellt werden soll, 148 Tn. Eigengewicht, wenn die Brücke überall so schwer als am Widerlager, dagegen nur 112,3 Tn., wenn sie nur so schwer als im Scheitel wäre.

Welches sind nun die am Bogen wirkenden Kräfte?

Die zufällige Belastung einer Brückenhälfte ist $= 9{,}4 \cdot 0{,}28 \cdot 31{,}5 = 82{,}91$ Tn.

Wir dürfen nun wohl annehmen, das Gewicht der Brücke pro Längeneinheit nehme der Länge proportional vom Widerlager gegen den Scheitel hin ab; sie sei also eine Function ersten Grades der Länge, dann wird die Belastungscurve, welche für jeden Punkt der Brücke als Ordinate über der Scheiteltangente das Gewicht der Brücke zwischen ihr und dem Widerlager angiebt, eine Parabel sein. Die Widerlagertangente an dieselbe erhalten wir (Taf. 24_1), indem wir durch eine punktirte Linie den Punkt O des Widerlagers mit dem Endpunkte der Totalbelastung $148 + 82{,}91 = 231$ Tn. über dem Scheitel, welcher die Brücke überall so schwer als wie am Widerlager voraussetzt, verbinden. Die Parabel schneidet auf der Verticalen des Scheitels natürlich das wirkliche Brückengewicht nach obiger Voraussetzung $\frac{1}{2}(148 + 112{,}3) + 82{,}9 = 213$ Tn. ab. Wird nun dieser Punkt mit der Mitte der Parabeltangente verbunden, so erhält man die zweite Tangente, und kann nun leicht die übrigens sehr flache Parabel, die Belastungscurve des totalbelasteten Bogens einzeichnen. Um das Eigengewicht zu erhalten, hat man von dieser

Totalbelastung die zufällige Belastung, 83 Tn. im Scheitel, mittelst der geraden Linie der zufälligen Belastung abzuziehen. Der Rest ist gleich dem links der Scheitelverticalen aufgetragenen Eigengewicht P.

Um nach einander das Gewicht jeder der 18 gleich langen Lagerlamellen zu erhalten, in die der Bogen eingetheilt wurde, hat man nur die Höhen der Parabeln bei den Lamellengrenzen, über der Scheiteltangente und über der Linie der zufälligen Belastung, von der Totalbelastung und von dem Eigengewicht, von oben abwärts abzuziehen, und man erhält die beiden Belastungsgebilde P und P_1.

Leicht hätte man die Belastungscurven so disponiren können, dass man P und P_1 unmittelbar durch Projiciren ihrer Punkte parallel zur Scheiteltangente und parallel zur Linie der zufälligen Belastung hätte erhalten können; es wäre nur nothwendig gewesen, die Belastungscurve vom Scheitel des Bogens aus, natürlich das Nothwendige modificirend, aufsteigen zu lassen. Wir thaten es nicht, um für den Querschnitt Taf. 24_2 den nothwendigen Platz zu behalten; auch geht das Abgreifen mit dem Zirkel beinahe so schnell vor sich als das Projiciren, und schliesslich giebt die getroffene Anordnung einen schöneren Kräfteplan.

Das eben beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Belastungscurve wird wohl in der Praxis immer hinlänglich genau sein. Wollte man aber noch genauer zu Werke gehen, so müsste man die Belastungscurve so construiren, wie die von Taf. 25, die für eine Hängebrücke construirt wurde; wie dort könnte man auch hier die Gewichte des Bogens der Füllungsglieder des Streckbaums, und endlich der zufälligen Belastung für jede Lamelle auf irgend eine Weise bestimmen und auftragen. Wenn aber bei der Hängebrücke, die eine viel grössere Spannweite voraussetzt, die Belastungscurve einer Parabel substituirt werden könnte, so kann es bei dem Bogen gewiss wohl immer geschehen.

Mit einem beliebigen Horizontalschub und der Totalbelastung P_1 zeichnen wir eine Drucklinie, deren Eckpunkte auf den Lamellenmitten liegen. Ihre verlängerten Polygonseiten schneiden die Scheiteltangente in der Verticalen durch die Schwerpunkte der entsprechenden Bogenstücke, durch welche die Schwerlinien der Totalbelastung über der Scheiteltangente gezogen wurden, worauf die erste provisorische Drucklinie wieder ausgelöscht

werden konnte. Die wirkliche Drucklinie der Totalbelastung, die Axe des Bogens, erhält man nun laut Nr. 29 S. 84, wenn man vom Widerlager A ausgehend die Druckpolygonseiten nach den Fusspunkten der entsprechenden Schwerlinien zieht. Zieht man mit der äussersten Polygonseite A 18 eine Parallele durch den Endpunkt von P_1, so schneidet diese den Pol des entsprechenden Kräftepolygons OP_1 auf der Scheiteltangente ab. Die Strahlen dieses Poles sind in Richtung und Grösse die Pressungen der Bogenstücke bei der Totalbelastung.

Genau auf die gleiche Weise wurden nun auch die Schwerlinien des Eigengewichts, die nach unten gezogen wurden, und ihr Pol O_3 construirt. Die Drucklinie deckt vollkommen die der Totalbelastung, obgleich die beiden Gebilde nicht identisch sind, wie die Abweichungen der Schwerlinie zeigen.

Die Pole O_1 und O_2 der einseitig belasteten Brücke kann man durch Probiren wie folgt bestimmen. Da nach der vorigen Nummer der Scheitelschub der total belasteten und der der unbelasteten Hälfte gleichen Winkel mit der Horizontalen bilden, so nehme man ungefähr in der Mitte zwischen O und O_3 die Pole O_1 und O_2 gleich hoch über und unter der Scheiteltangente an, verbinde sie mit dem Scheitel und ziehe durch die Punkte, in welchen diese Verbindungslinien die beiden letzten Schwerlinien schneiden, Parallele A 18 zu den äussersten Strahlen der Büschel $O_1 P_1$ und $O_2 P$; diese Parallele sind die letzten Seiten der beiden gesuchten Drucklinien; liegt A in der Mitte derselben, so hat man den Scheiteldruck richtig getroffen; liegt A unter der Mitte, so hatte man ihn zu gross angenommen und umgekehrt.

Ist die Grösse des Scheitelschubs richtig bestimmt, so muss der Winkel, den er mit der Horizontalen bildet, oder der verticale Abstand $O_1 O_2$ so bestimmt werden, dass die beiden Drucklinien da, wo sie vom Scheitel ausgehend am weitesten von einander abstehen, noch um das weniger als bei A von einander entfernt sind, um was man den Bogen im Scheitel niedriger, als am Widerlager machen will. Diesen Abstand der Drucklinie aber, der nur auf den Grund bautechnischer Schätzungen hin angenommen wird, kann man unmittelbar aus der Zeichnung abgreifen, ohne die Drucklinie zu zeichnen. Da wo die Druckpolygonseiten am weitesten von einander abstehen, müssen sie, also auch die entsprechenden Strahlen von O_1 und O_2, mit einander parallel

laufen. Man hat also nur die Distanz $O_1\ O_2$ in Zirkel zu nehmen und an P und P_1 herunterfahrend die Lamelle 7 zu bestimmen, deren obere Enden um mehr, deren untere aber um weniger als $O_1\ O_2$ in P und P_1 von einander abstehen. Auf der Lamelle 8 also sind die Drucklinien am weitesten auseinander. Da nun aber auch die entsprechenden Seiten des Druckpolygons mit einander parallel laufen, so muss (nahezu) die Höhe der Schwerlinie 7 zwischen den vom Scheitel nach O_1 und O_2 gezogenen Linien, in denen der Scheitelschub wirkt, dem Maximalabstand der Drucklinien gleich sein. Ist die Differenz der Abstände der Drucklinie nicht die gesuchte, so muss je nach Umständen $O_1\ O_2$ grösser oder kleiner gemacht werden. Auf diese Weise probirend, erhält man bald die Drucklinie in der gewünschten Lage.

Durch Bestimmung der Pole O_1 und O_2 sind nun alle Maximalkräfte, welche am Bogen wirken, bekannt. Man hat in der Regel die folgenden vier Maxima zu berücksichtigen: Druck im Scheitel und am Widerlager bei Totalbelastung, Druck am Widerlager und im Querschnitt 7 des Maximalabstandes der Drucklinien bei einseitiger Belastung in der belasteten Hälfte.

Der Scheitel- und der Widerlagerdruck der totalbelasteten Brücke vertheilen sich gleichmässig über die treffenden Querschnitte, sie geben im vorliegenden Falle kleinere Spannungen in den äussersten Fasern der Querschnitte, als die einseitige Belastung, weshalb wir sogleich zu dieser übergehen.

Wir haben Taf. 24_2 und $_3$ die angenommenen Querschnitte in der Lamelle 7 und bei dem Widerlager, wo die Maximalabweichungen der Drucklinien stattfinden, gerade so wie das Schienenprofil auf Taf. 8 behandelt, und in der gleichen Weise alles bezeichnet; wir dürfen uns daher auf die folgenden Bemerkungen über diese Constructionen beschränken.

Alle Blechstärken wurden $=$ 1 Ctm., a aber $=$ 2 Ctm. angenommen; die z' sind daher gleich der halben Längensumme der Bleche, aus welchen die treffenden Lamellen zusammengesetzt sind. z' ist für den obern Bruchpunkt $=$ 51 Ctm., daher die ganze Querschnittsfläche $F = 4\ .\ 51 = 204$ □Ctm.; für das Widerlager ist $z' = 69$ Ctm. und $F = 276$. Zur Construction von z'' diente eine Poldistanz von $b = 50$ Ctm., zu der von z''' z' selbst,

so dass man die halbe Höhe der Centralellipse nach Nr. 71 S. 196 unmittelbar aus

$$k = \sqrt{b\, z'''}$$

erhält. Die Stelle, an der diese Höhe construirt wurde, ist leicht in Taf. $24_{1\,2}$ zu finden, indem alle Buchstaben eingeschrieben sind.

Mit k wurde von der Mitte des Querschnitts aus ein Kreisbogen beschrieben und dieser der Centralellipse substituirt; es ist dies erlaubt, weil alle Kräfte in der Verticalebene wirken und wir uns mit der Widerstandsfähigkeit der Bogen in der auf dessen Ebene senkrechten Richtung nicht zu befassen brauchen.

Die Polare des höchsten Punktes der Mittelplatte schneidet auf der Mittelplatte die Höhe des Centralkerns in K ab. Im vorliegenden Beispiele erreicht aber der Angriffspunkt der äusseren Kräfte nicht ganz den Kernbogen, die Drucklinie schneidet den Querschnitt in S. Die Polare N von S, die man sich aber auf der andern nicht gezeichneten Seite des Querschnitts liegend denken muss, ist die neutrale Axe; das Verhältniss $\frac{c}{i}$ der halben Balkenhöhe zum Abstand der beiden Axen von einander ist nach diesen Constructionen = 0,69 für den obern Bruchpunkt und = 0,94 für das Widerlager.

Aus Taf. 24_1 kann man ferner den Maximaldruck als Längen der Strahlen (O_1 oder O_2) 7,8 und 18 gleich 440 Tn. und 479 Tn. in den beiden Querschnitten für alle sechs Bogen der ganzen Brücke ablesen. Für einen Bogen sind sie 73,3 und 79,8 Tn. Wird nun die scheerende Seitenkraft dieses Druckes im Widerlager vernachlässigt, in dem obern Bruchquerschnitt ist sie ohnedies = 0, so erhält man laut Nr. 122 S. 441 den Maximaldruck ϱ in den äussersten Fasern des obern Bruchschnittes

$$\varrho = \frac{73{,}3}{204} \cdot 1{,}69 = 0{,}608,$$

des Widerlagers

$$\varrho = \frac{79{,}8}{276} \cdot 1{,}94 = 0{,}570.$$

Dies das Resultat der Untersuchung.

136. Bestimmung der Kräfte, welche an den Füllungsgliedern eines versteiften Bogens wirken.

Um die Kräfte zu bestimmen, welche an den Füllungsgliedern eines Bogens mit versteiften Gewölbschenkeln wirken, sollte zuerst eine Drucklinie von der Form der Fig. 186 eingezeichnet werden und dann die Pressungen dieser Drucklinie für jeden Schnitt, der den Bogen, den obern Streckbaum in der Scheiteltangente und ein Füllungsglied schneidet, nach der Richtung dieser Glieder zerlegt werden. Da das Vorgehen bei dem Einzeichnen einer Drucklinie, deren beide Arme das Widerlager in einem und demselben Punkte schneiden, genau dasselbe ist, als das oben beschriebene: so glaubten wir die Construction nicht wiederholen zu müssen und begnügen uns damit, die Mittelkräfte der ausserhalb eines Schnittes wirkenden Kräfte, so wie die Drucklinie auf Taf. 24 sie giebt, nach den Richtungen des Bogens, eines Füllungsgliedes und des obern Streckbaums zu zerlegen. Wir durften uns dies um so mehr gestatten, als die Figur, die wir erhalten, viel instructiver ist und die Aenderung in der Wirkungsweise der Füllungsglieder der Gewölbschenkel besser zeigt, als die Stützlinie der Fig. 186.

Die Zerlegung ist ganz dieselbe, als wie die auf Taf. 16 und Nr. 109 S. 376 dargestellte und erklärte; sie unterscheidet sich von jener nur dadurch, dass die Lage der einzelnen Linien eine andere ist. Die bei der Zerlegung eingehaltene Reihenfolge ist: Die Druckpolygonseite wurde bis zum Schnitt mit dem obern Streckbaume der Scheiteltangente verlängert, dort der Druck in dieser Polygonseite nach der Richtung des obern Streckbaums und nach der des Schnittes der Strebe oder des Pfostens mit dem Bogen, endlich die letzte Seitenkraft nach der Richtung dieser beiden letzten Constructionstheile zerlegt.

Die Eckpunkte und Seiten der Vierecke, welche die Kräfte, die in dem durch den Pfosten 16 geführten Schnitt wirken, darstellen, sind durch Buchstaben und Pfeile näher bezeichnet, für die belastete Brückenhälfte. Wir denken uns dabei den Druck in der Drucklinie gegen das Widerlager gerichtet, also den Theil des Bogens zwischen dem Schnitt und dem Widerlager vorhanden, den mittlern Theil der Brücke fort.

Der Einfachheit wegen nehmen wir ferner an, es seien nur die oberen Knotenpunkte des horizontalen Streckbaums belastet, ohne dies wiegen ja das Eigengewicht und die zufällige Belastung der Fahrbahn am schwersten: dann wird die Mittelkraft T der ausserhalb des angedeuteten Schnittes wirkenden Kräfte in Richtung durch die Druckpolygonseite 16, 17 angegeben, welche dem Schnitt im obern Streckbaum entspricht. Dieser Druck, der durch den Schnitt des Scheiteldrucks $O_1 B$ mit der Schwerlinie 15 16 geht, schneidet die punktirte Mittellinie des obern Streckbaums in C, der Pfosten S den Bogen in D. Wird daher durch den Endpunkt O_1 von T im Kräftepolygon eine Parallele zu CD gezogen, so schneidet diese auf der Horizontalen 16 17 die Kraft Q ab, die im obern Streckbaume wirkt. Eine weitere Parallele zu $R = O)$ 15 16 durch O_1 und eine zum verticalen Pfosten S durch das Ende von Q bestimmen schliesslich die noch fehlenden Kräfte.

Dass R immer presst, dass der Bogen immer comprimirt ist, versteht sich von selbst. Q, der obere Streckbaum, ist gedrückt oder gespannt, je nachdem T zwischen R und Q oder ausserhalb wie im Schnitt 15 16 wirkt. Q wechselt also den Sinn da, wo die Drucklinie die Bogenaxe schneidet. Im Schnitt 12 13 zerlegt sich das T der belasteten Hälfte einfach nach den Richtungen RS, weil sich diese drei Kräfte dort in einem Punkte schneiden. Die Drucklinie der unbelasteten Hälfte dagegen schneidet die Mittellinie etwas vor dem Pfosten 13, was sich dadurch zeigt, dass die Linie, welche die in ihm wirkende Kraft darstellt, nicht mehr mit der Verticalen P im Kräftepolygon zusammenfällt. Wenn die Drucklinie, wie es eigentlich sein sollte, immer auf derselben Seite der Bogenaxe bliebe, so hätte Q immer denselben Sinn in der gleichen Bogenhälfte. Die vom Widerlager aus abwärts gerichteten Streben sind in der belasteten Hälfte immer gespannt, die aufwärts gerichteten verticalen Pfosten immer comprimirt: denn T dreht um den Schnittpunkt RQ der beiden Streckbäume immer in dem durch einen Kreispfeil angedeuteten Sinne, weil der Schnitt von $O_1 B$ mit der Schwerlinie der Totalbelastung immer über diesem Punkte liegt, und ist daher in der gleichen Brückenhälfte immer in gleichem Sinne in Anspruch genommen.

In der unbelasteten Hälfte findet alles in ungekehrtem Sinne statt; also sind sowohl der obere Streckbaum als auch die Füllungsglieder in jedem Fache bald rückwirkend, bald absolut in Anspruch

genommen. Sie müssen also so construirt werden, dass sie in jedem Sinne widerstehen können; ist dies nicht der Fall, hat man z. B. bei hölzernen Brücken nur Zangen, die absolut, und Streben, die rückwirkend widerstehen können, so müssen in jedem Fache Gegenstreben vorhanden sein.

Wir machen hier noch darauf aufmerksam, dass die verticale Seitenkraft der rückwirkend angegriffenen Füllungsglieder immer grösser, als die der absolut angegriffenen ist, sowohl in der belasteten als auch der unbelasteten Brückenhälfte. Es rührt dies daher, dass wir annehmen, es werde die Belastung in den oberen Knotenpunkten aufgegeben; hätten wir umgekehrt angenommen, sie werde in den unteren Knotenpunkten des Bogens aufgegeben, so dass die Spannungsdifferenzen in den Knotenpunkten von Q durch den Zug der tiefer liegenden Belastungen bewirkt würden, so würden die verticalen Seitenkräfte der absolut angegriffenen Constructionsglieder die grösseren geworden sein.

Gerade so wie auf Taf. 16 reihen sich auch auf Taf. 24 die Constructionen der Q, S und R in den verschiedenen Fächern auf eine ganz natürliche Weise so aneinander, dass die auf einander folgenden Füllungsglieder einen fortlaufenden Linienzug bilden, der das eben bezüglich des Sinnes der verschiedenen Kräfte Gesagte bestätigt. Der fortlaufende Zug der Füllungsglieder trennt die Trapeze der auf einander folgenden Q in der Art von den, welche durch die Verlängerungen der R gebildet werden, dass bei der angenommenen Numerirung jeder verticale Pfosten zwei Flächen trennt, welche seinen Index tragen. Die Streben aber trennen Flächen, welche dieselben aufeinander folgenden Indexe tragen, mit denen sie selbst bezeichnet sind. Indem man sich bei dem Zeichnen solche Merkmale macht, die Folgen einer consequent durchgeführten Bezeichnung sind, wird es nicht schwer, Irrthümer zu vermeiden.

Der Kräfteplan Taf. 24 hat die am obern Streckbaum wirkenden Kräfte sehr klein gezeigt. Der Druck in den Füllungsgliedern ist immer kleiner als das Doppelte des entsprechenden P_1; die Pfosten und Diagonalbänder müssen daher kaum viel grösser sein, als sie sein müssten, um die über sie wegrollenden Lasten auf den Bogen zu übertragen. Ebenso verhält es sich mit dem Q, das nicht das $^1/_8$ des Bogendrucks R erreicht; so schwach, als diese Kräfte es verlangen, wird man in der Praxis diese Glieder wohl

nie machen dürfen. Das blose Vorhandensein dieser Constructionsglieder im Bogen wird also zur Versteifung, d. h. zur Verhütung der so schädlichen Formänderungen genügen. Man sollte daher nie versäumen, selbst bei Bogen, die wie der vorliegende die Drucklinie umhüllen, die versteifende Füllung anzubringen.

Wenn man den Bogen als Fachwerk betrachtet und die Drucklinie so, wie Fig. 186 S. 487 anordnet, so werden die Kräfte im obern Streckbaume und in den Füllungsgliedern grösser; viel grösser, wenn das Eigengewicht im Verhältniss zur zufälligen Last sehr klein ist.

Betrachtet man den Bogen als Fachwerk, so müssen dessen Querschnitte fort und fort den Maximalpressungen, d. h. der Länge der Strahlen des Büschels $O P_1$ proportional sein. Betrachtet man dagegen den Bogen als Gewölbe, das alle Drucklinien umhüllen soll, so muss sein Querschnitt allen Kräften, die durch den Büschel $O P_1$ dargestellt werden, und allen denjenigen des einseitigen Druckes, also denen, die sich durch die Constructionen von Taf. 24_2 und $_3$ ergeben haben, widerstehen können.

Wie aus der Form der einseitig belasteten Drucklinie und den weiter oben gefundenen Resultaten hervorgeht, sind diese Kräfte beim Widerlager und beim obern Bruchpunkte grösser, als die gleichförmig vertheilte Maximalbelastung es erfordert; demnach bedarf der Bogen, als Gewölbe betrachtet, an diesen Stellen eine Verstärkung, wie wir sie durch Fig. 187 andeuten, und zwar am Widerlager, mehr unten als oben, weil dort der von der belasteten Hälfte

Fig. 187.

herrührende Druck in der Regel grösser ist, als der von der unbelasteten herrührende; beim Bruchpunkt, aber gleichviel auf beiden Seiten, weil dort laut Obigem S. 491 der Druck in der belasteten wie in der unbelasteten Hälfte, also über wie unter der Axe genau gleich gross ist.

Wenn der Bogen ein gekrümmtes Fachwerk wäre, das aus einem obern, einem untern Bogen und Füllungsgliedern zwischen beiden bestände, dann müssten die Drucklinien wie bisher eingezeichnet und dann der Druck in jedem Fache nach der Richtung der drei Constructionstheile zerlegt werden.

Weiter zu untersuchen, welches die zweckmässigsten, am wenigsten Material erfordernden Dispositionen der einzelnen Bogentheile sind, gehört in die Baukunde, nicht in die graphische Statik.

Fünftes Kapitel.

Hängebogen.

---

137. Kräfteplan eines Hängebogens.

Der Hängebogen bildet den tragenden Constructionstheil der Ketten- und Drahtbrücken. Beide, Kette und Drahtseil, werden, wie schon Nr. 120 S. 436 gesagt wurde, so flexibel vorausgesetzt, dass sie sich, ohne den geringsten Widerstand zu leisten und daher auch ohne im Mindesten an Tragfähigkeit zu verlieren, vollkommen der Form der Seilcurve anschmiegen können; und die Spannung in denselben vertheilt sich überall gleichmässig über den ganzen Querschnitt. Alle Querschnitte der Kette oder des Seils werden daher bei der Totalbelastung desselben am stärksten in Anspruch genommen, und der Kräfteplan der eigentlichen Kette beschränkt sich auf das Zeichnen der Drucklinie für die Totalbelastung.

Hierzu kommt dann noch die Bestimmung der Kräfte, welche von der Spannkette auf die Verankerung übertragen werden und die je nach der Art der Verankerung verschieden sind. Taf. 25 haben wir den Kräfteplan eines Hängebogens mit zwei Verankerungsarten gezeichnet und gehen unmittelbar zur Erklärung desselben über.

Da bei Hängebrücken die Länge selbst verschiedener Constructionstheile durch die Form der Seilcurve bestimmt wird, so ist es von Wichtigkeit, diese genauer zu zeichnen als bei anderen steifen Constructionen, wo die Druckcurve nur auf die Querschnittsdimensionen der Brückentheile Einfluss ausübt. Wir nehmen daher hier die Nr. 135 S. 490 angedeutete genauere Construction der an der Kette wirkenden Belastungen vor.

Die Kettenbrücke hat von Pylonenmitte zu Pylonenmitte eine Spannweite von 197 Mtr.

Die zufällige Belastung wurde zu 3,4 Tn. pro lf. Meter angenommen, und auf Grund einer vorläufigen approximativen Rechnung und Skizze der Querschnitt der Kette, ihr Gewicht und das aller übrigen Brückentheile, ein versteifendes Fachwerk, dessen Streckbäume einen Querschnitt haben, der Taf. 26 proportional ist, mit inbegriffen, berechnet, und die Resultate dieser Berechnung Taf. 25_3 für ein Viertel der ganzen Brücke, die von vier Ketten getragen wird, zusammengestellt.

Links unten beginnend wurde auf der Verticalen durch den Scheitel des Bogens zuerst die gleichmässig vertheilte zufällige Belastung und das von der Fahrbahn, den Streben und den Streckbäumen herrührende Eigengewicht aufgetragen, und mit dem Punkt unter der Mitte des letzten Kettengliedes, die auch ungefähr mit der vordern Kante des Mauerwerks zusammenfällt, verbunden. Dann stellt, unter der Voraussetzung dass in der Verticalen jedes Hängeisens die Hälfte des Gewichts der bei ihr zusammenstossenden Constructionstheile vereinigt sei, das Segment eines jeden verlängerten Hängeisens innerhalb der mit zufälliger Belastung, Fahrbahngewicht, Streben und Streckbäume bezeichneten Dreiecke, den Theil, welcher der gleichmässig vertheilten Totallast zwischen diesem Hängeisen und der Pylone entspricht, dar.

Das Gewicht der aus Streckbäumen und Streben bestehenden Steifigkeitsconstruction wurde auf Grund der im Voraus angefertigten Skizze direct berechnet und für jedes Hängeisen von der Pylone ab summirt aufgetragen.

Das Gewicht der Kette wurde construirt; zuerst muss sie gestreckt werden. Sind alle Kettenglieder gleich lang, so geschieht es nach Nr. 10 S. 36 am einfachsten durch Umschlagen der gleich langen Kettengliederlängen auf der Scheiteltangente. Sind aber

die Kettenglieder nicht gleich lang, sondern, wie es bei Drahtseilbrücken meistens der Fall ist, nur auf ihrer horizontalen Projection gleich lang, so kann man das auf Taf. 25_1 eingezeichnete und durch Fig. 188 erläuterte Verfahren anwenden.

Setzt man

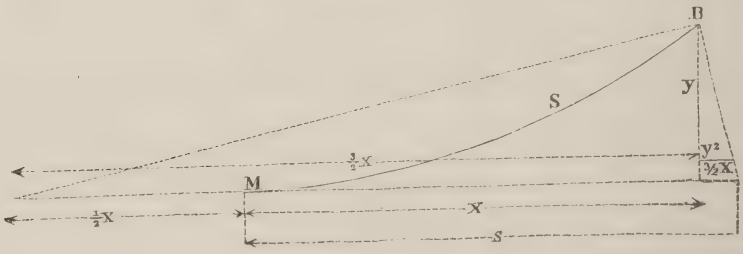
$$ds = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx = dx + {}^1/_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx - \text{etc.}$$

und integrirt unter der Voraussetzung, dass x und y die Coordinaten einer Parabel, also $x^2 = py$ sei, so erhält man:

$$s = x + \frac{2y^2}{3x} \ldots.$$

Laut Fig. 188 ist das Stück der Scheiteltangente, welches von der Ordinate und einer Linie abgeschnitten wird, die durch den Curvenpunkt geht und auf der Linie senkrecht steht, welche diesen

Fig. 188.



mit dem um ${}^1/_2 x$ jenseits des Scheitels liegenden Punkt der Scheiteltangente verbindet, $= \frac{y^2}{{}^3/_2 x} = \frac{2y^2}{3x}$. Demnach kann da, wo es angedeutet ist, s abgegriffen werden. Der Endpunkt der gestreckten Kette fällt nach K (Taf. 25_1); aus der Länge kann man nun das Gewicht bestimmen, nachdem in Folge der angefertigten Skizze der Querschnitt zwischen IK zu 650 □Ctm. und zwischen I und der Mitte zu 620 □Ctm. angenommen worden war. Wird nun das Gewicht der ganzen Kette in der Mitte des Stückes IK über I aufgetragen, und verbindet man die drei so erhaltenen Punkte, so erhält man die Gewichtslinie der Kette; über der Mitte jedes gestreckten Kettengliedes kann man das Gewicht zwischen diesem Glied und der Pylone abgreifen. Diese Gewichte wurden über dem der Streckbäume aufgetragen und so zu allen

vorausgehenden addirt. Zu bemerken ist, dass das Gewicht der Kette nicht bei der Mitte des letzten Gliedes, sondern bei der Pylonenmitte beginnt. Es ist jetzt nur noch das Gewicht der Hängeisen zu bestimmen. Am einfachsten ist es, diese mittelst der Zirkelspitzen zu summiren, und auf den Schenkeln eines Dreiecks wie das Dreieck *K I* die diesen summirten Längen proportionalen Gewichte abzugreifen.

Auch die Gewichte dieser Hängeisen wurden zu den früheren addirt, und so erhielt man schliesslich die Curve des Totalgewichts, auf welcher mit Nummern die Lamellengrenzen bezeichnet sind. Diese Lamellengrenzen auf die Verticale *P* projicirt, geben die Gewichtscurve der totalbelasteten Brücke. Die Lamelle 28 ist das Gewicht eines halben Kettengliedes.

Leicht findet man nun den Pol *O* des Kräftepolygons *O P*, das Taf. 25_1 ein Seilpolygon mit dem gewünschten Pfeil, gleich einem Zehntel der Spannweite giebt.

138. Kräfteplan des Verankerungsgewölbes.

Aeusserst einfach wären die weiteren Constructionen, wenn man wie gewöhnlich der Spannkette dieselbe Neigung gegen den Horizont, als wie der Tragkette bei der Pylone geben, dieselbe dann bis in die Fundamenttiefe verlängern und dort im Mauerwerk verankern würde. Statt diese gewöhnliche Construction auszuführen, wollen wir die Aufgabe hier lösen: wie weit muss das Mauerwerk, z. B. das Gewölbe Taf. 25_2, rückwärts geführt werden, um der Verankerung den nöthigen Widerstand darzubieten.

Durch den Fugenschnitt wird verhindert, dass Gleiten in irgend einer Fuge stattfinde; damit aber keine Drehung um die vordere Kante des Pylonenfundaments stattfinde: muss der Zug der Kette an der Spitze der Pylone, zusammengesetzt mit allen hinter dieser Kante liegenden Theilen des Mauerwerks, das sich mit drehen müsste, wenn die Verankerung herausgerissen werden sollte, das Fundamentauflager selbst, nicht dessen Verlängerung schneiden. Wir setzen also ganz einfach das Mauerwerk hinter der Pylone mittelst eines Seilpolygons mit der Kettenspannung zusammen. Die Form des Mauerwerks bestimmten wir mittelst einer vorläufigen

Skizze, bei deren Entwurf wir uns ein Gewölbe hinter der Pylone unter der Strasse durch dachten.

Das Gewölbe theilten wir in Lamellen von 4 Mtr. Breite und könnten nun direct die Höhe der Lamellen, wie bisher immer, als Gewicht derselben auftragen, dann aber müssten wir die Spannung der Kette an der Spitze der Pylone in Gewichten ausdrücken, deren Einheit gleich dem Gewicht einer Lamelle von 1 Meter Höhe wäre. Da man jedoch zur Construction der Verankerung den Zug der Spannkette jedenfalls in Tonnen zu haben wünscht, so ist es im vorliegenden Fall zweckmässiger, das Gewicht einer Lamelle in Tonnen auszudrücken.

Wir nehmen an, es habe das ganze Gewölbe eine Breite von 16 Mtr., dann treffen auf eine Kette 4 Mtr. Breite; da ferner die Lamellen 4 Mtr. lang sind und das spec. Gewicht des Mauerwerks zu 2,2 angenommen werden kann, so ist das Gewicht eines Lamellenstücks von 1 Mtr. Höhe $= 4 \,.\, 4 \,.\, 2{,}2 = 35{,}2$ Tn. Dieses Gewicht ist so gross, dass der Kräfteplan im Maassstabe von Taf. 25_3 auf der Tafel keinen Platz hätte, wir reduciren ihn daher um das Zehnfache, so dass ,003 = 100 Tn. ist. Da nun dieselbe Länge auch 2 Meter darstellt, also die gleiche Länge 50 Mal mehr Tonnen als wie Meter darstellt, der Meter Lamellenhöhe aber nur 35,2 Mal mehr darstellen soll, so müssen die Lamellenhöhen im Verhältniss von $50 : 35{,}2 = 1 : 0{,}702$ reducirt werden, um auf dem Maassstab der Kräfte das Gewicht der Lamelle in Tonnen auszudrücken. Dies geschah nun mittelst eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypothenuse und Kathete im obigen Verhältniss standen, und die so erhaltenen Lamellengewichte wurden, von der Pylonenspitze aus abwärts, als P' aufgetragen.

Der Sicherheit wegen wird wie gewöhnlich bei Mauerwerk die Spannung T an den Pylonen doppelt so gross, als sie wirklich ist, angenommen und in der Tangente des Curvenpolygons aufgetragen. Da der Maassstab des Kräftepolygons nach Taf. 25_2 10 Mal kleiner als der von Taf. 25_3 ist, so muss $T = 2 \,.\, {}^1/_{10} = {}^1/_5$ des längsten Strahles O) 28 sein. Vom Endpunkt O_1 des T als Pol aus wurde nun das Seilpolygon der Kette verlängert durch Beifügung der Lamellengewichte 1 2 3 ..., bis nach dem Gewicht 11 die letzte Polygonseite das Pylonenauflager, nicht dessen Verlängerung schneidet. Die Stabilität des Fundaments verlangt, dass wenn noch das Gewicht der Pylone und ihres Fundaments als $n$te

Lamelle beigefügt wird, die letzte entsprechende Polygonseite auch das Fundamentauflager, nicht dessen Verlängerung schneide, wie es auch in der Zeichnung der Fall ist.

Nachdem auf diese Weise die Länge des Verankerungsgewölbes bestimmt war, wurde die Spannkette von der Spitze der Pylone an die Verankerungsplatte hingezogen; eine Parallele zu ihr durch den Pol des Kräftepolygons giebt die doppelte Spannung in derselben und gleichzeitig in der Verticalen den Pylonendruck 9. Um schliesslich noch die übrigens ganz unbedeutende Abweichung der Spannkette von der geraden Linie zu erhalten, kann man aus der bekannten Spannung der Spannkette deren Querschnitt und daraus deren Gewicht k berechnen und über dem Pylonendruck 9 auftragen: dann sind die Strahlen, welche von O_1 aus die Enden von k projiciren, zu den Endtangenten der Spannkette parallel. Nimmt man, was gewiss gestattet ist, an, die Spannkette habe die Form einer Parabel, so schneiden sich diese Tangenten auf der horizontal eingemessenen Mitte der Spannkette, und ihre Form ist vollständig bestimmt.

Um die Form des Verankerungsbogens zu erhalten, hat man den Zug der Spannkette am Ende desselben mit den Gewichten des Bogens 11, 10, 9.... zusammenzusetzen; diese sind schon von der Pylonenspitze aus abwärts, nur in umgekehrter Folge, aufgetragen; man gelangt daher einfach zum Kräftepolygon, wenn man durch den Endpunkt von 11 einen Strahl parallel und eben so lang als den Strahl $O_1)kn$ zieht, dessen Endpunkt O_2 als neuen Pol annimmt und mit ihm und den schon vorhandenen Gewölbgewichten die Drucklinie des Gewölbes zeichnet.

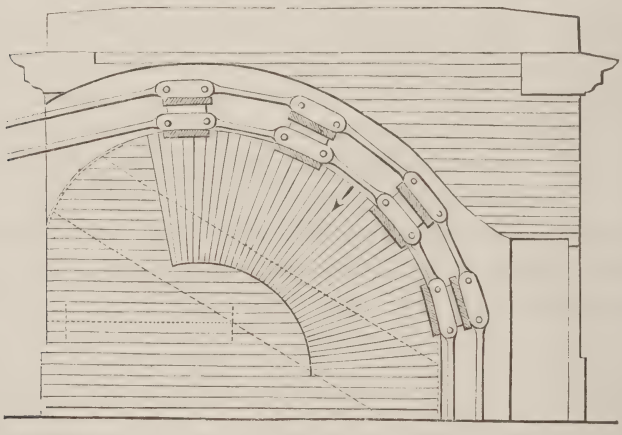
Je zwei Seiten der Drucklinie dieses Gewölbes und je zwei Seiten des über der Pylone verzeichneten Polygons müssen sich auf einer und derselben Verticalen, der Schwerlinie der zwischen ihnen liegenden Wölbsteine schneiden, was für die äussersten Seiten durch eine verticale punktirte Linie angedeutet ist. Ferner müssen die letzten Seiten des Polygons und der Drucklinie die Verticale der Pylonenmitte in einem und demselben Punkte schneiden: denn ihre äussersten Polygonseiten müssen auf dieser Verticalen ein gleich langes Stück abschneiden, weil dieses Stück dem Moment derselben Mauermassen bezüglich der Pylonenmitte proportional ist. Die letzte Seite der Drucklinie endlich, die man erhält, wenn man nach 1 den Pylonendruck 9, das Kettengewicht

k und das Pfeilergewicht n beifügt, muss mit der letzten Seite des Kettenpolygons identisch zusammen fallen, weil beide die Mittelkraft derselben Kräfte sind.

Das Gewölbe muss nicht allein dem doppelten Zug der Kette widerstehen können, es muss auch bei geringerem Druck stabil sein; um nachzuweisen dass dies der Fall sei, dass es der Spannkette zur Stabilität nicht bedürfe, wurde eine Drucklinie ohne alle Berücksichtigung des durch die Spannkette ausgeübten Druckes einpunktirt. Ihr Pol ist O_3.

Auf die eben beschriebene Weise vorgehend wird es nicht schwer sein, den Kräfteplan für jede Widerlagerform zu bestimmen und einen richtigen Fugenschnitt zu zeichnen. Den letztern wird man übrigens auch ohne den Kräfteplan nur nach dem Gefühl richtig zeichnen, sobald man einmal mehrere Kräftepläne gezeichnet hat. Es springt z. B. in die Augen, dass in vorhandenen Pylonen, wie Fig. 189, die Drucklinie die Form von Fig. 190 haben wird,

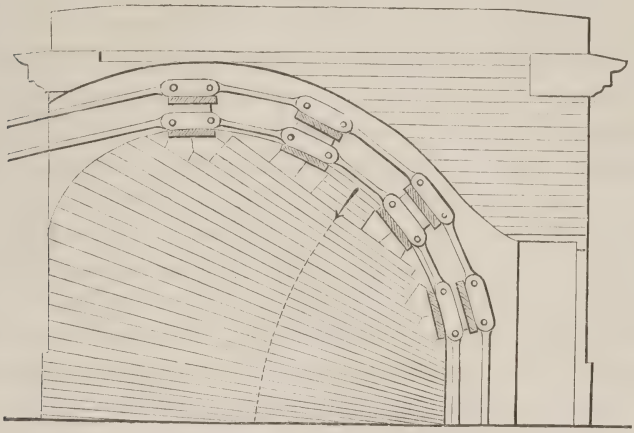
Fig. 189.



und der Fugenschnitt, der dort eingezeichnet, hätte innegehalten werden sollen. Der Zweck, den man sich bei dem Entwurf solcher Pylonen gestellt hatte, war offenbar, möglichst viel Mauerwerk in der unmittelbaren Nähe der Pylonen mit der Kette zu verbinden, weil wahrscheinlich kein Raum für lange Spannketten vorhanden ist; er ist aber nur auf eine sehr unvollkommene Weise erreicht worden. Die Disposition Fig. 190 verbindet schon mehr Mauerwerk mit der Kette. Den Schlüssel aber zur Anordnung, die alle

Massen hinter der Pylone unmittelbar mit der Kette verbindet, finden wir in der Anordnung, die man bisweilen bei kleineren Hängebrücken in englischen Parks findet, wo die Kette bei der

Fig. 190.



Pylone sich strahlenförmig vertheilt und wo jeder Strang für sich selbst mittelst eines Schraubenpfahles, in dem er endigt, verankert ist.

139. Vertheilte Spannketten.

Denken wir uns, wie auf Taf. 25_4, dicht an der Pylone das Verankerungsmauerwerk angeschlossen und in Lamellen getheilt, die so breit sind, als man glaubt Mauerwerk mit einer im Fundament liegenden Verankerungsplatte solidarisch verbinden zu können; ferner, jede dieser Verankerungsplatten an einem Gliede der entsprechend gekrümmten Spannkette, die bei der letzten Lamelle endigt, angehängt, so ist klar: dass der ganze Mauerkörper um seine vordere Kante umgedreht werden würde, wenn der Zug zu gross werden würde.

Die zur Bestimmung der Spannkettenform und der Lage der einzelnen geradlinigen Verankerungsketten nothwendigen Constructionen haben wir Taf. 25_4 ausgeführt. Das Kräftepolygon O_4) 1 2 ... 7 n wurde des beschränkten Raumes wegen nur im halben Maassstab, als wie Taf. 25_2 ausgeführt; allein wie dort wurden die verticalen Gewichte des Widerlagers auf der Pylonenaxe auf-

getragen. Da das Mauerwerk voll ist, so sind die sieben Gewichte der Lamellen gleich gross, die $n$te Lamelle, welche das Pylonengewicht und das unter ihr stehende Mauerwerk darstellt, ist gleich dem doppelten Gewicht einer der übrigen Lamellen 1 ... 7. Wegen der Gleichheit dieser Gewichte umhüllt das Seilpolygon, das durch Verbindung des Kettenzuges T mit ihnen entsteht und das zur Bestimmung der Länge des Widerlagers dient, eine Parabel, die durch das Widerlager von Taf. 25_2 durchgezogen worden ist. Die Seite nach der Lamelle 7 schneidet die Verticale der Pylone ungefähr in derselben Höhe D, als wie die letzte Seite des Polygons des hohlen Widerlagers; es wird also durch das volle Widerlager Taf. 25_4 derselbe Zweck, als wie durch das hohle Taf. 25_2 erreicht. Der Druck in der Polygonseite nach 7 wurde schliesslich noch mit dem Gewicht der letzten Lamelle n zusammengesetzt, und gab so die Mittelkraft aller am Widerlager wirkenden Kräfte, welche das Fundament selbst in C, nicht dessen Verlängerung schneidet und schneiden muss, wenn das Ganze nicht um dessen vordere Kante kanten soll.

Bei Anordnung der Ketten hinter der Pylone nehmen wir nun an, es werden die Fundamentpunkte 1 ... 7 durch Stäbe mit der Spannkette so verbunden, dass die verticale Seitenkraft der Spannung jedes der ersten sechs Stäbe gleich dem Gewicht der Lamelle sei, an deren Fuss er befestigt ist. In diesem Falle ist die Mittelkraft einer jeden Spannung des Stabes und des treffenden Lamellengewichts horizontal, und ihre Richtung fällt mit dem Fundamentauflager zusammen. Die Mittelkraft aller an dem Mauerwerk der Lamellen wirkenden Kräfte geht daher durch den Fundamentpunkt 7, in welchem das Ende der Spannkette das Fundamentauflager schneidet; anderseits geht diese Mittelkraft auch durch den Punkt D, in welchem die letzte Seite des Polygons das zur Bestimmung der Widerlagerlänge diente, die Verticale der Pylone schneidet (und der zufälliger Weise mit dem Punkt 5 6 des Kräftepolygons zusammenfällt), denn wenn diese Mittelkraft mit dem Pylonendruck zusammengesetzt wird, muss sie den Druck in der letzten Seilpolygonseite geben, es müssen sich demnach diese drei Richtungen in einem Punkte schneiden. Die punktirte Linie D_7 ist daher die Richtung der Mittelkraft aller an den Lamellen 1 — 7 wirkenden Kräfte. Da nun diese Mittelkraft auch die des ersten Spannkettengliedes S als Mittelkraft aller folgenden Kettenspan-

nungen und des Gewichtes P_1 der Lamellen ist, so müssen sich auch S und P_1 auf dieser Linie schneiden. Die Richtung des ersten Kettengliedes S geht daher durch den Schnitt der Verticalen des Schwerpunktes der Lamellen P_1 mit der Verbindungslinie D_7; die Verticale P_1 ist durch den Schnitt der äussersten Seilpolygonseiten gegeben, und fällt im vorliegenden Falle mit der Mittellinie der mittelsten Lamelle 4 zusammen, weil alle Lamellen gleich schwer und gleich breit sind.

Ist einmal so die Richtung der Kette S am Kopf der Pylone bestimmt, so ergeben sich alle weiteren Constructionen von selbst.

Parallele durch die Endpunkte des Kräftepolygons $1 \ldots 7 = P_1$ zu der ersten Kettenspannung, welche in Folge der besondern Lage des Kräftepolygons mit ihr zusammenfällt, und zur Mittelkraft aller an den Lamellen wirkenden Kräfte D_7 schneiden sich in O_5; die Länge der mit der Richtung des obersten Kettengliedes zusammenfallenden ist die Spannung in diesem selbst, die andern die Mittelkraft aller an den Lamellen wirkenden Kräfte, endlich giebt eine Parallele zur Kettenrichtung an der Pylone die Spannung in derselben, die demnach $O_5\ S$ gleich sein muss, und schneidet auf der Verticalen der Pylone den Druck in derselben ab. (Der Schnittpunkt liegt Taf. 25_4 unter dem Blattrand.)

Trägt man auf S die Länge eines Kettengliedes ab, so erhält man durch Verbindung des Endpunktes desselben mit dem Fundamentpunkt 1 die Richtung des ersten Hängeisens, eine Parallele 1_1 zu derselben durch das Ende der Kettenspannung $O_5\ S$ giebt innerhalb der Horizontalen durch die Endpunkte von 1 die Spannung des Hängeisens, sogleich in der Lage, in der es mit der Kettenspannung zusammengesetzt erscheint. $S) 1_1\ 2_1$ ist demnach die Richtung des zweiten Kettengliedes; reiht man es an das erste, so erhält man durch Verbindung seines Endpunktes mit dem Fundamentpunkt 2 die Länge des zweiten Hängeisens, dadurch die Spannung 2_1 in demselben, die Spannung $S) 2_1\ 3_1$ im dritten Kettenglied u. s. f. Hat man richtig construirt, so geht die Richtung des letzten, des siebenten, durch den Fundamentpunkt 7.

Auf diese Weise ist alles Mauerwerk hinter der Pylone auf eine viel innigere Weise als in Fig. 190 S. 505 so mit jener verbunden, dass bei zunehmender Kettenspannung alles Mauerwerk als Ganzes sich um die vordere Kante des Widerlagers drehen müsste. Um die Wirkungen der Wärmeausdehnung zu vermindern,

haben wir vorausgesetzt, die Pylone sei wie die Kette aus Eisen hergestellt, sodass sie sich bei Temperaturänderungen nahezu um ebenso viel als die Ketten ändert. Ferner wird vorausgesetzt, das Mauerwerk sei im Stande, in den Richtungen zwischen 7 *D* und 7 *E*, welche letztere Richtung die Mittelkraft der an der Lamelle 7 wirkenden Kräfte ist und demnach mit O_5 $7_{''}$ parallel läuft, zu widerstehen. Sollte dies nicht der Fall sein, so müsste der Fugenschnitt senkrecht auf diese Richtungen gestellt werden.

Vergleicht man Taf. 25_2 mit Taf. 25_4, so zeigt ein Blick, dass letztere Anordnung viel mehr Mauerwerk als erstere erfordert, weil es in dieser an einem kleinern Hebelsarm bezüglich *C* wirkt. Diese Anordnung ist daher nur dann anzuwenden, wenn die Ketten sich möglichst wenig weit hinter die Pylone erstrecken sollen, oder wenn die Erde als Beschwerungsmaterial in Mitleidenschaft gezogen werden darf. Denken wir uns z. B. das Fundamentauflager unter dem tiefsten Wasserstand, sodass ein hölzerner Rost daselbst nicht faulen würde, die Hängstangen mit den Rostschwellen verbunden, eine einzige Mauerschicht auf demselben, um den Horizontalschub aufzuheben, und das Ganze mit Erde beschwert, es müsste dies die billigste Verankerung abgeben.

Uebrigens sind wir weit entfernt, hier wirkliche Verankerungsvorschläge zu machen, diese gehören wo anders hin, sondern wir wollten hier nur zeigen, wie leicht die graphische Statik das Wirken der Kräfte an allen derartigen Constructionen, deren man noch viele andere, auch zweckmässige ersinnen kann, zur Anschauung bringt.

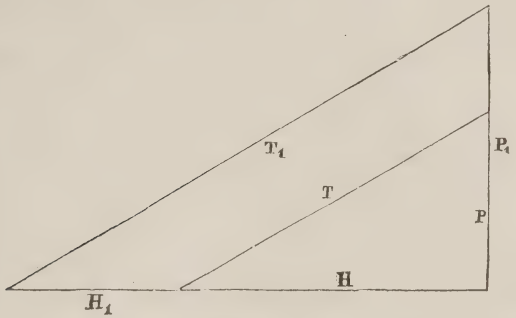
140. Annähernde Kräftepläne.

Alle Dimensionen der Hängebrücken waren auf Grund voraus angefertigter Skizzen approximativer Kräftepläne angenommen worden. Sowohl bei der Kette als auch bei dem Bogen haben wir derselben öfter erwähnt; sie lassen sich auch bei Bestimmung der Kräfte auf analytischem Wege nicht umgehen, und es werden z. B. beinahe alle Längen, deren man zu den Gewichtsbestimmungen bedarf, so angenommen, als ob die Kette eine Parabelform habe. Wir wollen nun hier zeigen, dass diese Annahme auch in der graphischen Statik alle Constructionen ausserordentlich vereinfacht und

wie diese approximativen Kräftepläne sich auf die Construction zweier Dreiecke beschränken.

Ist der Bogen eine Parabel, so sind durch Pfeil und Spannweite auch die Endtangenten gegeben. Denn trägt man auf der Mitte der Spannweite den Pfeil doppelt auf, so erhält man den Schnittpunkt der beiden Endtangenten. Wird daher auf einer Verticalen Fig. 191 das Eigengewicht und die Totalbelastung P und P_1,

Fig. 191.



die annähernd angenommen wurden, aufgetragen und durch die Endpunkte T und T_1 Parallele zu den Endtangenten gezogen, so schneiden dieselben auf der Horizontalen durch die Fusspunkte von P und P_1 den Druck oder die Spannung im Scheitel des Bogens oder der Kette ab; während die Längen von T und T_1 selbst, der Druck und die Spannung derselben am Widerlager sind.

Hiernach können nun Skizzen aus freier Hand angefertigt, alle Gewichte nach denselben bestimmt und dann zur Anfertigung des genaueren Kräfteplans geschritten werden.

Bei Bogen, die unten breit aufsitzen, kann man sogar mittelst obiger Skizze das Austreten der Drucklinie aus der Bogenmitte berücksichtigen. Man fehlt kaum ein $^1/_{20}$ oder $^1/_{25}$, wenn man annimmt, der Druck der einseitig belasteten Drucklinie sei am Widerlager $= {}^1/_2 (T + T_1)$ und bei dem obern Bruchpunkt ${}^1/_2 (H + H_1)$; mithin muss an diesen Stellen die Querschnittsfläche:

$$F = 2 \cdot \frac{(T + T_1)}{2\,\varrho} = \frac{T + T_1}{\varrho}$$

und

$$F = \frac{H + H_1}{\varrho}$$

sein, weil der Druck in den äussersten Fasern eines Balkenquer-

schnitts, bei dem die mittlere der äusseren Kräfte den Centralkern berührt, doppelt so gross ist, als wenn dieselbe, im Schwerpunkt wirkend, sich gleichmässig über den Querschnitt vertheilte.

Die Annäherungsconstruction ist so genau als die meisten Rechnungen nach Formeln, welche parabolische Bogenform voraussetzen. Der Kräfteplan selbst aber ist genauer als jede Rechnung, denn der Kräfteplan nimmt die Lasten wie sie sind, die analytischen Formeln aber stecken immer eine Hypothese zwischen die Wirklichkeit und die Rechnung, um die Belastung durch eine Formel auszudrücken.

Um grosse Genauigkeit zu erhalten, müsste natürlich der Kräfteplan in einem grössern Maassstabe ausgeführt werden, und es hat durchaus keine Schwierigkeit, denselben hinlänglich gross zu zeichnen, namentlich, wenn man sich gestattet, wie Geometer es thun, mehrere Blatt zur Zeichnung zu nehmen oder die Zeichnung auf demselben Blatt zusammenzulegen.

Im Maassstab von 0,03 = 1 Mtr. z. B. würde ein Bogen Maschinenpapier von 1,20 Mtr. Länge und 0,60 Cmtr. Breite eine Länge von 40 Mtr. und eine Höhe von 20 Mtr. darstellen und würde in Taf. 25_1 das Rechteck links einnehmen. In diesem könnte man dann, wie es in diesem Rechteck angedeutet ist, die Kette zweimal so abbrechen und zusammenlegen, dass jeder Eckpunkt der Kette gleich hoch läge, die Eckpunkte 13 — 23 um 40 Mtr., die von 24 bis zur Pylone um 80 Mtr. horizontal verschoben erschienen. Vollkommen genau aber wäre es möglich, diesen Kräfteplan auszuführen, wenn man sich die Mühe gäbe, das Rechteck in quadratische Felder zu runden Längen zu theilen, sodass man nie weit zu einer Quadratseite zu messen und für den grössern Theil der Längen eine runde Zahl Meter zu addiren hätte.

Das Kräftepolygon würde man nicht in einer Ecke des Blattes construiren, sondern für die zu bestimmende Richtung jedes neuen Kettengliedes würde man dessen Anfangspunkt als Pol betrachten und von ihm aus H horizontal auftragen, das treffende P vertical addiren und die Richtung wäre bestimmt, wie es für das Glied 25 — 26 angedeutet wurde. Die Taf. 25_3 entsprechende Bildung und Zusammensetzung der P würde jedesmal erst unmittelbar vor der Festsetzung der Lage jeder Polygonseite, nachdem alle Längen bekannt sind, vorgenommen werden. Auf diese Weise würde man

alle Längen auf 0,01 genau erhalten, gewiss sicherer, als nach der Rechnung mittelst einer complicirten Kettenbrückenformel.

Ueberhaupt haben wir nie den Nutzen dieser Formeln einzusehen vermocht; gesetzt auch, es sei die graphische Construction nicht hinlänglich genau, so würde es doch viel einfacher sein, die Tangente der Neigung jedes Kettengliedes, als Quotient des Brückengewichts getheilt, durch den mittelst Zeichnung vorläufig bestimmten Horizontalschub zu bestimmen: und mittelst dieser die Coordinatendifferenzen der aufeinander folgenden Kettenknoten zu rechnen, als nach der Kettenbrückenformel von Noyon und Leclerc u. a. zu rechnen.

Sechstes Kapitel.

Die Steifigkeitsconstruction.

---

141. Theorie der Steifigkeitsconstruction.

Eine Kettenbrücke, an die alle Lasten unmittelbar, ohne irgend ein Zwischenglied, aufgehängt wären, würde ausserordentlich schwanken; tief würde sie sich unter einem darüber wegfahrenden Wagen an der Stelle einsenken, an der sich dieser gerade befindet, auf beiden Seiten des Wagens, zwischen ihm und den Pylonen, würde sie sich um ein Entsprechendes heben, während sie an den festen Pylonen nur und dann an noch zwei Stellen in der Mitte ihre normale Lage behalten würde. Eine Doppelwelle würde mit dem Wagen über die Brücke weg sich bewegen.

Ganz abgesehen davon, dass diese Bewegungen unangenehm wären, würden sie auch noch sehr schädlich sein. Wenn auch die biegsame Kette die Bewegungen ertragen könnte, so würden doch die Fahrbahntheile, welche fester miteinander verbunden sein sollen, sehr unter dieser Wellenbewegung leiden. Der Zweck der Steifigkeitsconstruction ist, sie zu verhüten.

Schon längere starke Balken, aus denen man die Fahrbahn bildet, wie man sie bei mehreren österreichischen Kettenbrücken findet, wirken versteifend. Richtiger ist es, wenn man das Geländer aus einem leichtern Fachwerk herstellt, wie es bei den meisten französischen Hängebrücken geschieht und wie man es schon in stärkeren Dimensionen an der Pesther Kettenbrücke zwischen der Fahrbahn und den beiderseitigen Fusswegen findet. Solche leichte Constructionen wirken schon ungemein versteifend, und wer Gelegenheit hatte, über eine solche flexible Brücke vor und nach Aufbringen der Steifigkeitsconstruction zu gehen, kennt den Unterschied. Sie wirken dadurch, dass sie die auf einen Punkt concentrirte Last über eine längere Strecke der Kette vertheilen; dadurch, dass sie den Druck einer nur über einen Theil der Brücke verbreiteten Last auf die ganze Länge jener vertheilen. Die meisten Steifigkeitsconstructionen sind nun zu schwach, um diesen Zweck ganz zu erfüllen. Bei der Niagarabrücke allein ist die Steifigkeitsconstruction, als Hauptelement der Brücke, als vollkommenes regelrechtes Fachwerk ausgebildet.

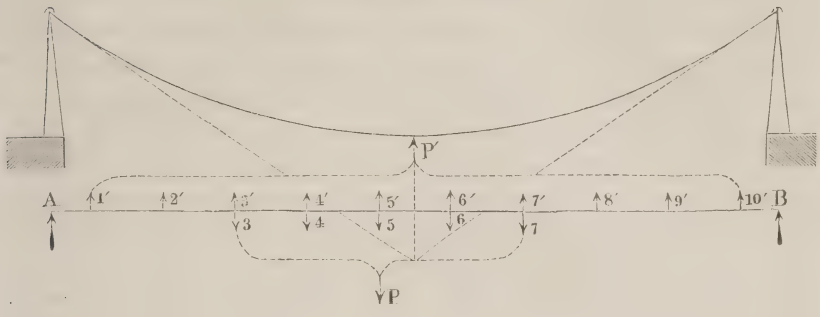
Wir wollen jetzt untersuchen, wie gross die Kräfte sind, die an einer solchen Steifigkeitsconstruction wirken, wenn diese im Stande sein soll, die ungleichförmig vertheilte Belastung gleichmässig über die ganze Brücke zu vertheilen.

Es sei Fig. 192 die Kette oben durch das Fachwerk oder den Balken AB, den wir der Deutlichkeit wegen etwas heruntergerückt haben, so versteift, dass der Balken bei der totalbelasteten, sowie bei der gar nicht belasteten Brücke gar nicht, sondern nur bei den Belastungen in Anspruch genommen werde, die sich nicht über die ganze Brücke erstrecken. In diesem Falle haben wir das Eigengewicht des Balkens gar nicht zu berücksichtigen, weil es ganz durch den Bogen getragen wird, sondern nur die zufällige Belastung P, die über den durch einen stärkern Strich angedeuteten Theil des Balkens vertheilt ist. Die Belastung denken wir uns in den Knotenpunkten 3 — 7 concentrirt, wo ihre Gewichte durch kleine, abwärts wirkende Pfeile dargestellt werden.

Ferner wirken an allen Aufhängepunkten, die gewöhnlich mit den Knoten zusammenfallen, die Kettenreactionen $1' \ldots 10'$ aufwärts. Wir haben aber vorausgesetzt, es sei die Steifigkeitsconstruction im Stande, jede Formänderung der Kette zu verhüten. In diesem Falle sind die Verhältnisse dieser, unmittelbare Func-

tionen der Kettenform und mit ihr gegeben. In der That, zieht man durch einen beliebigen Punkt als Pol des Kräftepolygons Strahlen parallel zu den Kettenstücken zwischen zwei Knoten-

Fig. 192.



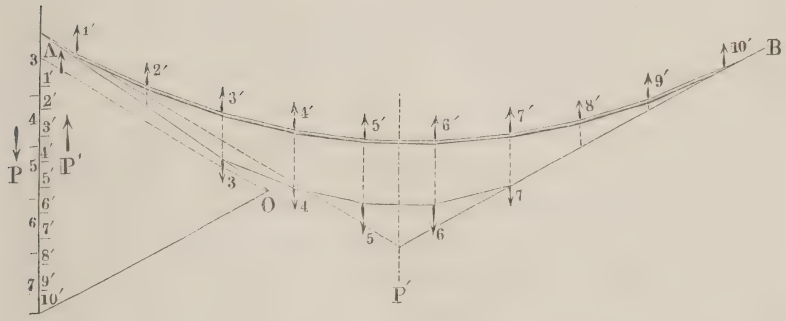


Fig. 193.

punkten: so schneiden diese Strahlen auf einer Verticalen P' die an den Aufhängepunkten der Kette wirkenden Kräfte ab. Die absolute Grösse derselben kann sich ändern je nach der Poldistanz, in der P' angenommen wird; allein das gegenseitige Verhältniss der Reactionen $1', 2', \ldots 10'$ bleibt unverändert. Die Richtung der Mittelkraft P' aller dieser Kettenreactionen ist mithin auch gegeben, sie geht immer durch den Schnitt der beiden äussersten Kettenseiten.

Die Steifigkeitsconstruction soll nicht als Balken wirken, sie soll nicht die Lasten auf die Widerlager übertragen, sondern sie nur über die Kette gleichmässig vertheilen; gerade bis zum entferntern Widerlager B hin, dessen Reaction wir also $= 0$ voraussetzen müssen. Die Reaction A des andern Widerlagers kann

nicht = 0 sein, wenn die Richtungslinien von P' und P nicht zusammenfallen, was nur bei der gleichmässig vertheilten Totalbelastung stattfindet, wo dann A und B gleichzeitig = 0 sind.

Ausser den bis jetzt aufgezählten Kräften wirken keine weitern mehr an der Steifigkeitsconstruction. Das Gleichgewicht derselben wird durch das der drei Kräfte $A\,P\,P'$ ausgedrückt. Ist P gegeben, so kann es nur auf eine Weise in die Seitenkräfte A und P' zerlegt werden, wodurch diese beiden Kräfte bestimmt sind; wird dann noch P' als Summe von $1'\ldots10'$ nach dem durch die Form der Kette gegebenen Gesetz in diese Partialbelastungen getheilt, so sind alle an der Steifigkeitsconstruction wirkenden Kräfte gegeben; wir können die ausserhalb eines durch sie geführten Schnittes wirkende Kraft bestimmen und diese nach der Richtung der geschnittenen Constructionstheile zerlegen. Fig. 193 sind die nothwendigen Constructionen angedeutet. Das Kräftepolygon besteht aus den fünf Belastungen 3 — 7 und dem in O angenommenen Pol, dessen Entfernung von P gleich einem vielfachen der Höhe der Steifigkeitsconstruction ist. Die letzten Seiten des mit $O\,P$ construirten Seilpolygons 3 ... 7 wurden nur bis zu ihren Schnitten mit A und P' verlängert und diese Schnitte durch die gestrichte Schlusslinie $A\,P'$ miteinander verbunden: eine Parallele zu dieser Schlusslinie durch den Pol O theilt die Belastung P in den Widerlagerdruck A und die Kettenreaction P'. Um die Reactionen der einzelnen Knotenpunkte zu erhalten, hat man nur zwischen den äussersten Strahlen eines Büschels, dessen Strahlen mit den einzelnen Kettenseiten parallel laufen, eine Linie zu ziehen, deren Länge = P' ist, sie wird durch die übrigen Strahlen in die einzelnen Kräfte $1'\ldots10'$ getheilt; man trägt sie nun in das Kräftepolygon P' ein und verzeichnet mit $O\,P'$ das Seilpolygon $1'\ldots10'$ zwischen der Schlusslinie $A\,P'$ und der letzten Polygonseite des Polygons 3 ... 7 und das Polygon der an der Steifigkeitsconstruction wirkenden Kräfte ist vollendet. Die Seiten des Polygons $1'\ldots10'$ sind comprimirt, die des Polygons 3 ... 7 gespannt; es wurde dies in Fig. 193, wie bisher üblich, durch doppelte und durch einfache Striche angedeutet.

Die Anordnung des Seil- und Kräftepolygons wurde so getroffen, dass wenn durch eine und dieselbe Verticale die Steifigkeitsconstruction und das Seilpolygon geschnitten werden: der abgeschnittene Theil des Seilpolygons gerade die Kräfte miteinander

verbindet, welche an dem geschnittenen Stück der Steifigkeitsconstruction wirken, und dass diese Kräfte im Kräftepolygon unmittelbar aufeinander folgen. Da ferner alle diese Kräfte miteinander parallel laufen, so ist nach Nr. 48 S. 127 der Abschnitt der schneidenden Verticalen zwischen den äussersten, also den geschnittenen Polygonseiten dem Moment der ausserhalb wirkenden Kräfte proportional. Wäre die Poldistanz O gleich der Höhe der Steifigkeitsconstruction angenommen worden, so wäre die Länge dieses Abschnitts, auf dem Maassstab der Kräfte gemessen, gleich der Kraft, die in den Streckbäumen wirkt.

Da diese Kräfte auch in derselben Reihe im Kräftepolygon aufeinander folgen, so ist die Summe der ausserhalb des Schnittes wirkenden Kräfte, der scheerenden Kräfte, gleich der Höhendifferenz der gleichnamigen Elemente in P und P'. Es ist z. B. die Summe der ausserhalb des Schnittes 3 4 wirkenden Kräfte gleich der Höhe des Punktes 3 4 in P über $3'4'$ in P'. Für die Intervalle unter 3 und über 7 werden die scheerenden Kräfte vom obern und untern Ende des Polygons abgemessen. Bei dem Widerlager A, dann bei dem der Grenze der zufälligen Belastung P sind sie natürlich am grössten. Bei dem Punkt 6 in der vorliegenden Figur wechseln die scheerenden Kräfte ihr Zeichen, weil $6'$ ganz in 6 liegt. Bei diesem Knotenpunkt ist das Moment der an der Steifigkeitsconstruction wirkenden Kräfte ein Maximum laut Nr. 49 S. 127.

Besteht die Steifigkeitsconstruction aus einem Fachwerk, so ist laut Nr. 110 S. 382 diese scheerende Kraft die verticale Seitenkraft der in den Füllungsgliedern wirkenden Kräfte und somit alle an den einzelnen Theilen einer Steifigkeitsconstruction wirkenden Kräfte bekannt.

142. Ungünstigste Belastungsart der Steifigkeitsconstruction.

Bevor wir die Herstellung des Kräfteplans für eine solche Steifigkeitsconstruction unternehmen, müssen wir ermitteln, welches die ungünstigste Belastungsart der Steifigkeitsconstruction sei. Wir gelangen dazu am leichtesten, wenn wir untersuchen, welches die Wirkung einer neu an verschiedenen Stellen zukommenden Last $\triangle P$ auf die Steifigkeitsconstruction sei.

Fig. 194 haben wir die von einem zwischen A und P' herrührenden $\triangle P$ Wirkungen auf die Steifigkeitsconstruction untersucht. Die Figur ist nichts als eine Wiederholung der

Fig. 194.

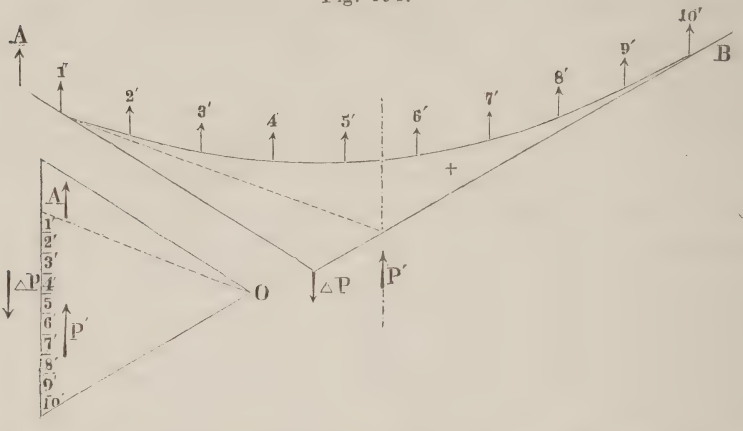


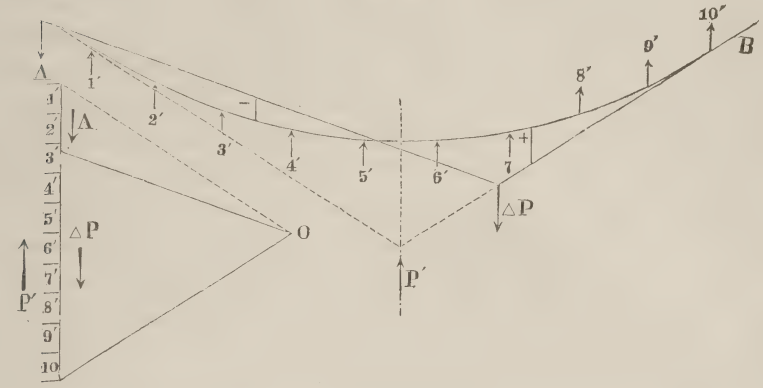
Fig. 193 für den speciellen vorliegenden Fall. Der Unterschied zwischen Fig. 193 und 194 beschränkt sich eigentlich darauf, dass Fig. 194 das Polygon von $\triangle P$ nur aus zwei sich auf $\triangle P$ kreuzenden Linien besteht. Das Polygon von P' ist natürlich wie dort ein Polygon von so viel Ecken, als Knotenpunkte vorhanden sind. Da alle Linien dieselbe Lage als wie in Fig. 193 haben, so bedarf Fig. 194 keiner weitern Erklärung mehr, und wir lesen unmittelbar aus der Figur heraus: durch eine zwischen A und P' aufgebrachte Last $\triangle P$ wird das Moment in allen Punkten der Spannweite AB, also auch im Maximalmomentenpunkt der Steifigkeitsconstruction vergrössert. Ferner wird die scheerende Kraft auf der Seite und bei A auch vergrössert, denn die A haben in beiden Figuren den gleichen Sinn, ebenso auch die scheerende Kraft entgegengesetzten Sinnes auf der Seite B des Maximalmomentenpunktes.

Wenn also das Moment und die Summe der ausserhalb eines Schnittes der Steifigkeitsconstruction wirkenden Kräfte ein Maximum sein soll, muss jedenfalls die ganze Strecke AP' total belastet sein.

Fig. 195 zeigt den Einfluss eines $\triangle P$, das jenseits der belasteten Bogenseite auf der unbelasteten Seite aufgebracht wird. Die Construction ist identisch mit der von Fig. 194, nur ist die

Lage und der Sinn der Kräfte nicht überall derselbe. In Folge dessen dass A und P', die Mittelkräfte von $\triangle P$, beide auf der gleichen Seite von $\triangle P$ liegen, sind sie verschiedenen Sinnes; da nun

Fig. 195.



P' gleichen Sinn behalten musste, so nahm, wie auch die Figur es zeigte, A entgegengesetzten Sinn an. Das Moment der ausserhalb eines Schnittes der Steifigkeitsconstruction wirkenden Kräfte ist zwischen $5'B$ überall der gleiche Sinn als wie in Fig. 194, was durch das $+$ in der Momentenfläche angedeutet werden soll, zwischen A und $5'$ aber entgegengesetzten Sinnes. In der Nähe von $5'$ selbst aber ist das von $\triangle P$ herrührende Moment der Kräfte $= 0$. Dieser Schnittpunkt entsteht erst, wenn $\triangle P$ in die Strecke $P'B$ tritt und beschreibt den Bogen AB, während $\triangle P$ jene Strecke $P'B$ beschreibt. Hieraus kann man schliessen, dass durch Aufbringen jeder Last zwischen A $\triangle P$ das Moment bei $5'$ vergrössert, durch eine zwischen $\triangle P$ und B aufgebrachte Last aber vermindert werde. Es ist demnach klar, dass die Brücke über die Mitte P' hinaus bis zu $\triangle P$ total belastet sein müsse, wenn das Moment der bei $5'$ an der Steifigkeitsconstruction wirkenden Kräfte ein Maximum sein soll. Denn wäre eine Strecke zwischen A und $\triangle P$ noch nicht total belastet, so könnte man durch Belastung derselben das Moment bei $5'$ vergrössern, durch Belastung einer Strecke zwischen $\triangle P$ und B aber würde es vermindert werden.

Das eben Gesagte gilt von allen Punkten der Strecke AP', also auch von dem auf dieser Strecke sich befindlichen Maximalmomentenpunkt. Damit das Maximalmoment nicht noch mehr vergrössert werden könne, muss die Totalbelastung über die Mitte

hinaus bis zu einem $\triangle P$ reichen, dessen Nullmomentenpunkt mit dem Maximalmomentenpunkt zusammenfällt.

Wenn die Totalbelastung bis zu einem Widerlager A reicht, so ist das Maximum der scheerenden Kräfte $= A$. Da nun das A jeder jenseits der Mitte P' aufgebrachten Last negativ ist, die scheerende Kraft daselbst also vermindert wird, so folgt: dass die scheerende Kraft in einer Steifigkeitsconstruction bei einem der Widerlager vorkomme und dort ein Maximum werde, wenn die treffende Brückenhälfte total belastet ist. Wir fassen das eben Entwickelte also zusammen:

Das Moment der ausserhalb eines Querschnitts der Steifigkeitsconstruction wirkenden Kräfte ist ein Maximum, wenn die Totalbelastung so weit über die Mitte der Brücke hinausreicht, dass eine weitere Ausdehnung der totalbelasteten Strecke am Moment jenes Querschnitts nichts mehr ändert.

Die eben ausgesprochene Bedingung muss auch erfüllt sein für das grösste aller auf der Brücke vorkommenden Maximalmomente.

Das Maximum der scheerenden Kräfte findet bei einem Widerlager statt, wenn die an dieses anstossende Brückenhälfte total belastet ist.

Das jetzt einigemal gebrauchte Wort Brückenhälfte gilt strenggenommen nur von symmetrisch gebauten Bogen, bei unsymmetrischen ist der Theil der Brücke zwischen dem Widerlager und der Verticalen durch den Schnitt der äussersten Bogenendtangenten darunter zu verstehen.

143. Kräfteplan einer Steifigkeitsconstruction.

Taf. 26 finden sich die Anwendungen des Vorstehenden auf eine Steifigkeitsconstruction. Da angenommen wurde, es werde das ganze Eigengewicht von dem Bogen selbst getragen, so kommt dieses bei diesem Kräfteplan gar nicht in Betracht und wir bemerken hier nur nebenbei, dass der Bogen am stärksten in Anspruch genommen ist, wenn die ganze Brücke total belastet ist, und die Steifigkeitsconstruction gar nichts zu tragen hat. Die zufällige Belastung des Fachwerks Taf. 26_I wurde pro Knotenpunkt constant

angenommen, um keine zu unregelmässigen Curven der Momente und der scheerenden Kräfte zu erhalten. In den Kräftepolygonen wurde sie mit ,008 für jeden Knotenpunkt aufgetragen. Da gar keine andern Lasten vorkommen, also auch nichts auf das Verhältniss der zufälligen Belastung zum Eigengewicht ankommt: so kann man sich unter dieser ,008 langen Strecke jede beliebige Last vorstellen, z. B. 16 Tonnen. Ebenso verhält es sich auch mit dem Maassstab der Längen, die 0,192 grosse Spannweite könnte z. B. im Maassstab von ,002 = 1 Mtr. eine Weite von 92 Mtr. vorstellen.

Bei Construction der Kräftepolygone Taf. 26_2 wurde jederzeit angenommen, es seien die letzten Knotenpunkte belastet und ihre mit arabischen Ziffern bezeichneten Belastungen entsprechen den *P* von Fig. 192 S. 513. Diese Ziffern zeigen also auch unmittelbar an, welche Knotenpunkte von Taf. 26_1 belastet sind. Die Pole aller Kräftepolygone wurden in einer Entfernung, die gleich $2^1/_2$ mal der Höhe des Fachwerks ist, so in Taf. 26_2 angenommen, dass die höchsten Strahlen aller Kräftepolygone miteinander parallel laufen. Indem man daher bei dem Zeichnen der Seilpolygone Taf. 26_3 von einer und derselben mit diesen parallelen Strahlen parallelen Seilpolygonseite ausging, erhielt man die dortige compendiöse Anordnung. Durch Verbindung des Punktes, in welchem die mit arabischen Ziffern bezeichneten Polygone der Belastung die Verticale des rechtseitigen Widerlagers schneidet, mit dem für alle Polygone gleichen Punkt 6, in welchem die mit der Brückenmitte zusammenfallende Mittellinie der Bogenreactionen die erste feste Polygonseite schneidet, erhält man die strichpunktirten Schlusslinien. Durch alle nur mit kleinen Ringchen bezeichnete Pole der Kräftepolygone Taf. 26_2 wurden nur die feingestrichten Parallelen zu diesen Schlusslinien gezogen. Sie theilen die ganze Länge der Kräftepolygone in zwei Theile, der obere ist die Bogenreaction, der untere die Totalreaction des rechtseitigen Widerlagers. Die Totalreactionen des Bogens sind nun in die einzelnen Reactionen der Knotenpunkte zu theilen. Es geschah dies mittelst des Büschels *O*, dessen Strahlen mit den Bogenseiten parallel laufen. Unter der Voraussetzung, dass dieser eine Parabel sei, schneiden sie auf allen Verticalen gleich lange Stücke ab, und die Reactionen der Knotenpunkte sind alle gleich gross. Die Partialbelastungen zwischen den einzelnen Strahlen des Büschels wurden auf die ein-

zelnen Kräftepolygone übertragen, mit römischen Ziffern bezeichnet, und nun der obere, auch römische Ziffern tragende Theil der Momentenpolygone construirt. Uebrigens wurden die Belastungscurven überhaupt nur für die Belastungen 4, 5, 6 — 11 eingezeichnet, für die Curven 3 und 7 — 11 war es nicht nothwendig: weil diese nur für die Construction des Maximums der scheerenden Kräfte nothwendig waren, die durch die Richtung der Schlusslinie und ihre Lage im Kräftepolygon allein bestimmt werden können. Die äussersten Seiten dieser beiden Polygone hat man unmittelbar erhalten, indem man die ganze zufällige Belastung mit einem Male in der Verticalen ihres Schwerpunktes, in der Verticalen 7 für die Belastung 3—11 und in der Verticalen 9 für die Belastung 7—11 aufgebracht hat und nach bekannten Regeln verfahren ist.

Unmittelbar kann man jetzt mit den Zirkelspitzen auf jeder Verticallinie der übereinander liegenden Momentencurven das Maximalmoment heraussuchen, es wurde Taf. 26_4 links aufgetragen. Da übrigens die meisten Maximalmomente auf den Belastungscurven 5 und 6—11 liegen, so wurden, um den Verlauf derselben zu zeigen, diese ganz herausgezeichnet.

Aus demselben Grunde wurden auch die Curven der scheerenden Kräfte für die Belastungen 4, 5 und 6 — 11 auf Taf. 26_5 herausgetragen.

Die scheerende Kraft ausserhalb eines jeden Schnittes ist gleich der Höhendifferenz der gleichnamigen Theilstriche auf der römischen und auf der arabischen Seite. Diese Curven sollten im vorliegenden Falle eigentlich aus zwei geraden Linien bestehen, weil alle Belastungen der Länge proportional vertheilt sind, die kleinen Unregelmässigkeiten im Verlaufe rühren von der zufälligen Lage der Knotenpunkte her. Wie in der vorigen Nummer schon bemerkt wurde, kommen die Maxima der scheerenden Kräfte auf den Grenzen der Belastungen vor. Das Maximum von A findet bei der Belastung 6 — 11 statt, die Maxima in der Mitte dann, wenn die zufällige Belastung gerade bis zum treffenden Punkt hin reicht, und ist dann natürlich gleich der Summe der Bogenreactionen auf der vorausgehenden unbelasteten Strecke. Also das Maximum der scheerenden Kraft bei 3 findet bei der Totalbelastung 3 — 11 statt und ist gleich den Intervallen I II auf der Linie 3 — 11 des Büschels O. Ebenso das Maximum der scheerenden Kraft bei 7 ist gleich den Intervallen I ... VI auf der Linie 7 — 11. Alle diese

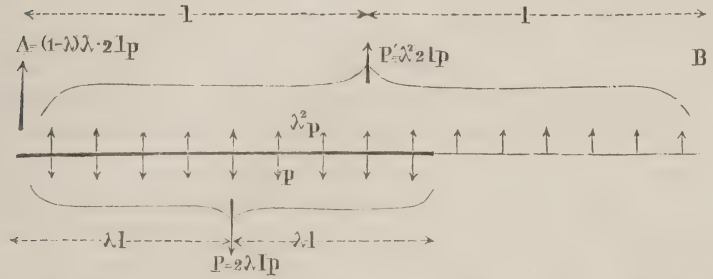
Maxima zusammengetragen, gaben die Curve der scheerenden Kräfte.

144. Analytische Bestimmung der bei gleichförmiger Belastung an der Steifigkeitsconstruction wirkenden Kräfte.

Unter der Voraussetzung dass alle Lasten, Eigengewicht und zufällige Belastung, gleichförmig vertheilt, der Bogen also eine Parabel sei, lassen sich sehr einfache Formeln für die an der Steifigkeitsconstruction wirkenden Kräfte aufstellen.

Bei der ungünstigsten Belastung irgend welcher Art steht diese, wie wir in der vorigen Nummer gesehen haben, immer an einem Widerlager an. Bezeichnet man also (vgl. auch Fig. 196) das Verhältniss dieser belasteten Strecke zur ganzen Spannweite

Fig. 196.



mit λ, die Strecke selbst mit $\lambda \cdot 2l$, wenn $2l$ die ganze Spannweite ist, und mit p die zufällige Belastung, so hat man, wenn gerade so wie in Nr. 141 S. 513 vorgegangen wird:

Die ganze zufällige Belastung . . . . . $P = 2\lambda l p$.

Die Entfernung des in ihrer Mitte liegenden Angriffspunktes der Mittelbelastung vom Widerlager . . . . . $= \lambda l$.

Die Entfernung derselben von P' der Brückenmitte $= (1 - \lambda)\, l$.

Demnach ist . . . . $A = (1 - \lambda) \cdot 2\lambda l p = (1 - \lambda)\, \lambda \cdot 2 l p$

und . . . . . P' . . . . . $= \lambda^2 \cdot 2 l p$.

Die Bogenreaction pro Längeneinheit . . . . $= \lambda^2 p$.

Die eigentliche Belastung des belasteten Endes der Steifigkeitsconstruction pro Längeneinheit, die wir einen Moment mit p, bezeichnen wollen,

nämlich die Differenz zwischen der Belastung p und der Bogenreaction $\lambda^2 p$ ist . . $= p_1 = (1 - \lambda^2) p$.

Laut Nr. 48 S. 128 (ganz oben) ist die Länge des Balkenstücks, welches das Widerlager links vom Maximalmomenten-Querschnitt trennt, $= \frac{A}{p_1}$, weil das Gewicht dieses Balkenstücks $= A$ sein muss, und man hat . . . $\frac{A}{p_1} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot 2l$.

Nach S. 127 (gesperrter Satz) ist das Maximalmoment gleich dem der unendlich fernen Kraft $A - A$, die Entfernung der zwei einzelnen Kräfte A ist offenbar gleich der halben Länge des eben erwähnten Balkenstücks, also $= {}^1/_2 \frac{A}{p_1}$ und demnach das Maximalmoment der auf die Länge $\lambda \cdot 2l$ belasteten Steifigkeitsconstruction

$$= \frac{A^2}{2p_1} = \frac{\lambda^2 (1-\lambda)}{1+\lambda} \cdot 2 l^2 p.$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum für $1 - \lambda - \lambda^2 = 0$ oder für $\lambda = {}^1/_2 \sqrt{5} - {}^1/_2 = 0{,}618034$.

Bei Belastung der 0,62 der Spannweite ist also die Steifigkeitsconstruction am stärksten in Anspruch genommen.

Substituirt man diesen Werth in die oben gefundenen Ausdrücke, so findet man bei dieser ungünstigsten Belastung:

Länge der belasteten Strecke also . . . . $= 0{,}61803 \cdot 2l$.

Druck auf das Widerlager der belasteten Seite

$A = (1-\lambda)\,\lambda \cdot 2\,lp = (\sqrt{5} - 2)\,2\,lp$. $= 0{,}23607 \cdot 2lp$.

Die Bogenreaction:

$$P_1 = \lambda^2 \cdot 2\,lp = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) 2\,lp \quad . \quad = 0{,}38196 \cdot 2lp.$$

Um die Bogenreaction auf die Längeneinheit zu erhalten, hat man nur P_1 durch $2l$ zu dividiren. Die Belastung der Steifigkeitsconstruction auf der belasteten Strecke ist p_1

$= (1 - \lambda^2) p = {}^1/_2 (\sqrt{5} - 1) p$ . . . . $= 0{,}61803 \cdot p$.

Die Entfernung des Maximalmomentenpunktes vom Widerlager:

$$\frac{A}{p_l} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot 2\,l = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \cdot 2\,l = 0{,}38196 \cdot 2\,l.$$

Das Maximalmoment:

$$\frac{A^2}{2\,p_l} = \frac{\lambda^2\,(1-\lambda)}{1+\lambda} \cdot 2\,l^2 p = (5\sqrt{5} - 11)\,l^2 p = 0{,}18034 \cdot l^2 p.$$

Die hier entwickelten Verhältnisszahlen beziehen sich auf das Maximalmoment, nicht auf die Maximalkraft, der die Streben zu widerstehen haben. Die verticale Seitenkraft dieser ist offenbar für jedes $\lambda = A$. A aber wird nicht für $\lambda = 0{,}618$, sondern für $\lambda = 1/2$ ein Maximum und zwar $= 1/4 \cdot 2\,l p = 1/2\,l p$ (statt $0{,}236 \cdot 2\,l p$, wie bei der für das Maximalmoment ungünstigsten Belastungsart).

Das Maximum der verticalen Seitenkraft einer jeden einzelnen Strebe wollen wir hier nicht mehr bestimmen, weil wir ja nur allgemeine Zahlenverhältnisse darstellen wollen.

Wenn ein Balken frei über eine Oeffnung gelegt und gleichförmig belastet wird, so ist das Maximalmoment der ausserhalb seines Mittelschnitts wirkenden Kräfte nach Nr. 48 S. 128 gleich $1/2\,p\,l^2$. Bei gleicher Belastung wird also das Maximalmoment der an ihm wirkenden Kräfte dadurch im Verhältniss von $1/2$ auf 0,18, also nahezu auf $1/3$ reducirt, dass man den Balken auf einen über die Oeffnung gesprengten biegsamen Bogen stützt, den er zu versteifen hat. Werden aber diese Formeln auf eine Brücke angewendet, so ist diese Reduction noch viel grösser, weil in diesem Falle die Steifigkeitsconstruction eben nur die zufällige Belastung zu tragen hat.

Bezeichnet man mit p_e das Eigengewicht, so ist das Verhältniss der Momente, also auch bei parallelen Streckbäumen, das der Streckbaumstärke eines versteifenden zu einem freiliegenden Fachwerk gleich:

$$\frac{0{,}18\,p\,l^2}{1/2\,(p_e+p)\,l^2} = 0{,}36\,\frac{p}{p_e+p}.$$

Bringt man $0{,}18\,p\,l^2$ in die Form $1/2\,p \cdot (0{,}6\,l)^2$, so prägt sich der folgende Satz leicht dem Gedächtniss ein:

Die Streckbäume einer Steifigkeitsconstruction müssen gerade so stark als die eines Fachwerks sein, das nur über 0,6 der Spannweite gestreckt und nur mit der zufälligen Belastung beschwert wäre.

Diese Stärke müssten also auch Fachwerke erhalten, welche, wie das der Niagarabrücke, biegsame Ketten zu einer unveränderlichen Form versteifen. Gewöhnliche Kettenbrücken versieht man meist in den Geländern mit schwachen Fachwerken, allein sie werden in der Regel sehr bald lotterich, und wenn sie auch neu sehr gut versteiften, so werden doch in sehr kurzer Zeit die Undulationen der Kette bei darüber wegfahrenden Lasten so bedeutend, als ob kein versteifendes Geländer vorhanden wäre. Es rührt dies daher, dass ihre Dimensionen immer zu schwach gegriffen werden. Die schwachen Geländerrippen sind nicht im Stande, die Schwankungen der Kette zu verhüten, durch die immerwährenden Undulationen derselben werden sie mehr und mehr geknickt und nach kurzer Zeit functioniren sie nicht mehr.

Zwischen den Spannungen in den Streckbäumen und den in den äussersten Fasern eines flachen Bogens müssen nothwendiger Weise die innigsten Beziehungen herrschen, denn beide drücken die Kraft aus, die nothwendig ist, um die Form des Bogens zu fixiren, und es kann unmöglich einen grossen Unterschied bedingen, dass in einem Falle das Material in einer besondern Construction, das andere Mal in den äussersten Fasern des Bogens selbst den Biegungen entgegengesetzt wird.

Wenn in den bis jetzt aufgestellten analytischen Formeln dieser Zusammenhang noch nicht dargestellt worden ist, so rührt dies eben daher, dass die Analysis kaum ordentliche allgemeine Gleichungen für die Form der Stütz- und Drucklinien aufgestellt, geschweige denn die Spannungen in den äussersten Fasern des Bogens als Function der Kräfte dargestellt hat. Wird aber dieser Zusammenhang zwischen der Inanspruchnahme der äussersten Bogenfasern und der der Streckbäume einer Steifigkeitsconstruction anerkannt: so muss nothwendiger Weise die Belastung, welche die Steifigkeitsconstruction am stärksten belastet, auch die Drucklinie am meisten von der Axe des Bogens wegtreiben. Gestützt auf diese Analogie, haben wir Nr. 134 S. 485 behauptet, die Drucklinie entferne sich am weitesten vom Bogen, wenn etwa die 0,62 des Bogens total belastet sind, d. h. wenn die Totalbelastung um $^1/_8$ bis $^1/_{10}$ der Weite über die Mitte des Bogens hinausragt.

SIEBENTER ABSCHNITT.

DER WERTH DER CONSTRUCTIONEN.

Erstes Kapitel.

Der Werth einfacher Constructionen.

145. Der Werth der Constructionen im Allgemeinen.

Der Zweck aller Stabilitätsuntersuchungen, aller Ermittelungen der an den einzelnen Constructionen wirkenden Kräfte ist: den beabsichtigten Bau mit einem Minimum von Material auszuführen. Es ist durchaus nicht schwierig, für jedes Brückensystem alle Dimensionen so zu greifen, dass sie sicher genügend sind, und es erfordert gar keine Anstrengung des Geistes, mit einem einzigen Satz über die Grenzen des Nothwendigen hinüber in das Ueberflüssige zu springen. Dies thut z. B. der englische Ingenieur beinahe bei jeder eisernen Brücke, die er entwirft; es charakterisirt gerade die englischen Bauten, dass sie wie gemästet aussehen und dass ihr Anblick selbst im Laien das Gefühl hervorruft: „das hält". Man kann mit grosser Zuversicht darauf rechnen, nicht durch den Einsturz der Brücken zu verunglücken, und sich mit der Zuversicht in den Wagen setzen, wohlbehalten das Ziel zu erreichen, wenn man nicht gerade überfahren oder sonst angerannt werden soll. Allein was dem reichen Engländer ziemt, der überall das grosse, volle Bewusstsein mit sich herumträgt: „ich bin im Besitz des Eisens und brauche mich nicht mit der Statik zu plagen", passt weniger für die armen Teufel des Continents; die müssen difteln und probiren, für jede zu bauende Bahn deren viele, viele abstecken und veranschlagen, um die billigste zu finden, und für jede zu

bauende Brücke verschiedene Kräftepläne zeichnen, um ja kein Material zu vergeuden und nur das nothwendigste zu verwenden: denn es giebt keine unerschöpflichen Vorräthe, selbst Eisen- und Kohlenminen sind keine solchen. Vom national-ökonomischen Standpunkt aus betrachtet schreitet aber der Amerikaner auf der richtigsten Bahn einher; er wendet nie mehr als das absolut Nothwendige auf, oder lieber noch etwas weniger; das Bauwerk könnte vielleicht doch halten. Das Gefühl der Unsicherheit, das dann bei Einzelnen entstehen kann, beruhigen diese bei Versicherungsgesellschaften verschiedener Art. Wie in Allem, so ist auch hier die Mittelstrasse die beste, und in dem folgenden kurzen Abschnitt wollen wir versuchen, Regeln für die Anordnung der Theile einfacherer Constructionen aufzustellen, nach welchen der für sie nothwendige Materialaufwand ein Minimum wird, und für complicirtere Constructionen Methoden zu entwickeln, mittelst deren man auf einfache Weise zu Verhältnisszahlen des Materialaufwandes gelangen kann, um unter verschiedenen Entwürfen den leicht herauszufinden, der bei gleicher Sicherheit am wenigsten Material erheischt.

Man kann wohl ganz allgemein annehmen, die Kosten eines Bautheiles seien dem Volumen desselben proportional. Das Volumen aber kann dem Product der Länge des Constructionstheiles mit seinem Querschnitt proportional gesetzt werden.

Wird angenommen, das Knicken rückwirkend in Anspruch genommener Theile sei durch eine hinlängliche Zahl auf sie gestellter Knotenpunkte beseitigt, so kann man annehmen, der Querschnitt desselben sei der an ihm wirkenden Kraft proportional. Wenn es also möglich wäre, allen Constructionstheilen genau einen der an ihnen wirkenden Kräfte proportionalen Querschnitt zu geben: so würden die Kosten der Summe der Producte allen Längen der Constructionstheile mit der an jedem derselben wirkenden Kraft proportional sein. Diese Productensumme wollen wir den theoretischen Werth einer Construction nennen.

In der Praxis aber ist es nicht möglich, allen Constructionsgliedern genau einen, den an ihnen wirkenden Kräften proportionalen Querschnitt zu geben; in vielen Fällen kann man mit letzterem nicht unter gewisse Grenzen gehen, und dann giebt es viele kleinere Constructionselemente, die im Kräfteplan gar nicht auftreten, und die man doch nicht entbehren kann, trotzdem dass der

heutige Stand der Wissenschaft die Grösse der an ihnen wirkenden Kräfte nicht zu ermitteln weiss. Bildet man nun die Summe der Producte der Länge aller Constructionstheile, auch der im Kräfteplan nicht erscheinenden, mit Linien, die den wirklichen Querschnitten proportional sind: so erhält man den praktischen Werth der Construction.

Wir wollen uns in Folgendem nur mit dem theoretischen Werth beschäftigen, weil wir keine Baukunde treiben und keine wirklichen Constructionen mit einander vergleichen wollen. Das Verfahren aber ist in beiden Fällen identisch dasselbe.

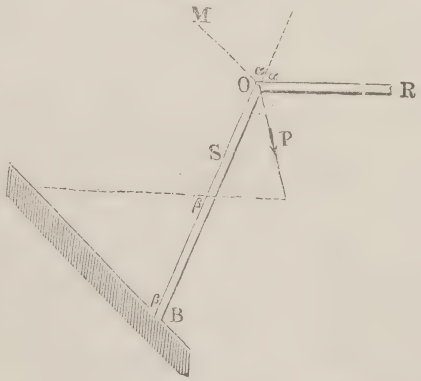
Wir untersuchen also zunächst, wie einfachere Constructionen anzuordnen sind, damit der theoretische Werth derselben ein Minimum werde, und werden dann den Werth complicirterer Constructionen zu ermitteln suchen.

146. Zweckmässigste Stellung von Streben.

Wir wissen hiervon nicht viel mehr, als die Anordnung der Streben anzugeben, welche Lasten tragen sollen.

1) Wie muss die Strebe S (Fig. 197), welche mit einer andern Strebe R am Endpunkt O derselben die Last P tragen und auf der schraffirten Mauer stehen soll, gestellt werden, damit ihr Werth ein Minimum werde?

Fig. 197.



Es wird hier vorausgesetzt, dass der Werth der Strebe R nicht in Betracht komme. Wir tragen von O aus abwärts in Richtung und Grösse die Kraft P und vollenden mit der, zu R punktirten Parallellinie, das Kräftedreieck SP. Dann ist das Segment S zwischen O und der Parallelen zur Strebe der Druck in dieser; da ferner OB die Länge derselben ist, so haben wir die Strebe so zu stellen, dass das Product $\overline{OB} \,.\, S$ ein Minimum werde. Denken wir uns auf jedem durch O geführten S, $\sqrt{\overline{OB} \,.\, S}$

aufgetragen, so kann die Curve des Orts aller Endpunkte höchstens eine Curve zweiter Ordnung sein. O ist der Mittelpunkt derselben, denn obige Wurzelgrösse kann positiv und negativ aufgetragen werden; ferner liegt ein unendlich ferner Punkt in der Richtung R, ein anderer in der Richtung der Mauer OM, demnach ist die Curve eine Hyperbel, und $O) RM$ sind ihre Asymptoten. Da ferner der Scheitel der Hyperbel ihrem Mittelpunkt am nächsten liegt, so muss S den Asymptotenwinkel halbiren, also $\alpha = \alpha$ oder auch $\beta = \beta$ sein, damit $\sqrt{OB} \,.\, S$ oder $OB \,.\, S$ ein Minimum werde. S muss also mit der festen Strebe und mit der Mauer einen gleich grossen Winkel bilden, damit ihr Werth ein Minimum werde.

Wir machen darauf aufmerksam, dass die Richtung der Strebe von der der Kraft P ganz unabhängig ist und nur von der der Mauer und der vorhandenen festen Strebe R abhängt.

2) Wo ist (Fig. 198) auf der gegebenen Richtung einer Kraft der Angriffspunkt zweier Streben, die durch zwei feste Punkte gehen sollen, anzunehmen, damit ihr Werth ein Minimum sei?

Fig. 198.

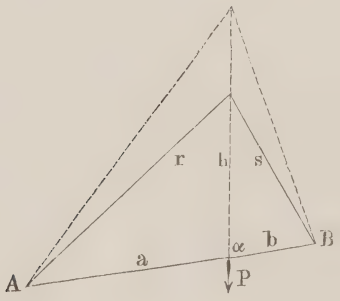
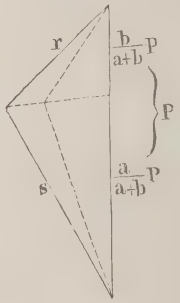


Fig. 199.



Es sei P (Fig. 198) die gegebene Richtungslinie der Kraft, A und B die Punkte, auf welche sie durch Streben übertragen werden soll. Die Segmente, in welche ihre Entfernung durch P geschnitten wird $= a$ und b. Die Höhe des gesuchten Angriffspunktes über diesem Schnitt, in der Richtung der Kraft P gemessen $= h$.

Das Kräftepolygon erhalten wir, indem wir durch die Endpunkte der Kraft P zwei Parallele zu den Streben R und S ziehen. Der Ort des Schnittpunktes aller Streben ist eine Parallele zu AB;

denn zieht man noch ein (punktirtes) Strebenpaar in beide Polygone, so haben die beiden Vierecke, deren Ecken die beiden Schnittpunkte der Strebenpaare und einerseits A, B, andrerseits die Endpunkte von P sind, je zwei Paare gegenüber liegende Seiten und die verticalen fünften Seiten P und h parallel: mithin sind auch die sechsten Seiten, die Verbindungslinien von A, B, und die der beiden Streben-Schnittpunkte in Fig. 199 parallel.

Die beiden Dreiecke, in welche die letztere Parallele das Kräftepolygon theilt, sind demnach auch den beiden Dreiecken ähnlich, welche über AB stehen: woraus unmittelbar folgt, dass P durch sie in die a und b proportionalen Theile $\frac{aP}{a+b}$ und $\frac{bP}{a+b}$ getheilt werde.

Aus derselben Aehnlichkeit folgt auch noch, dass die Drücke R und S in den Streben r und s gleich:

$$R = \frac{r}{h} \cdot \frac{bP}{a+b} \text{ und } S = \frac{s}{h} \cdot \frac{aP}{a+b}$$

seien.

Der Werth K der beiden Streben zusammen aber ist

$$K = rR + sS = \frac{P}{(a+b)h}(br^2 + as^2).$$

Nun ist aber

$$br^2 = b(a^2 + h^2 + 2ah\cos\alpha)$$
$$as^2 = a(b^2 + h^2 - 2bh\cos\alpha),$$

demnach

$$K = \left(\frac{ab}{h} + h\right) P.$$

Dieses K ist für jeden Werth von P ein Minimum, wenn

$$h = \sqrt{ab}$$

ist.

Die Höhe, in welcher die beiden Streben P über der Verbindungslinie AB fassen sollen, ist gleich der mittleren geometrischen Proportionalen der beiden Segmente, in welche P die Entfernung AB theilt, wenn der Werth der beiden Streben ein Minimum sein soll.

Schneidet P die Mitte von AB, so müssen die beiden Dreiecke über AB gleichschenkelig sein.

147. Zweckmässigste Anordnung einfacher Constructionen.

Mittelst der beiden in der vorigen Nummer entwickelten Sätze können wir die zweckmässigste Anordnung einiger einfacher Constructionen angeben.

In allen Fällen, in denen eine Strebe den Winkel zweier Constructionselemente fixiren soll, z. B. eine Decke von einer Wand aus, den Schnabel einer krahnenartigen Verbindung von einem Pfosten aus unterstützen soll, muss laut 1 der vorigen Nummer das Dreieck, dessen Basis die Strebe bildet, gleichschenkelig sein.

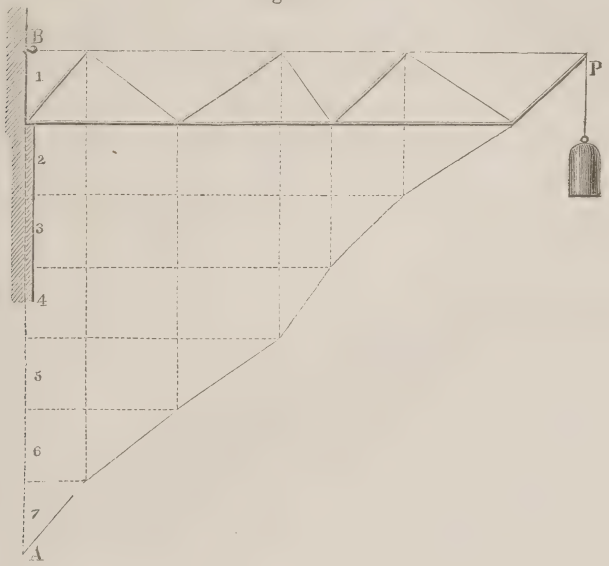
Wenn eine Hängsäule in einfachen Hängwerken von zwei Streben getragen wird, so sollen auch die beiden Dreiecke, welche die Streben mit der Hängsäule und mit der Verbindungslinie der Stützpunkte bilden, gleichschenkelig sein, wenn die Hängsäule die Mitte ihrer Verbindungslinie schneidet; und wenn die Länge der beiderseitigen Segmente ungleich ist, so soll die Höhe der Hängsäule über der Verbindungslinie gleich der mittleren geometrischen Proportionalen der ungleichen Segmente sein.

Auch die zweckmässigste Stellung der Streben in Fachwerken mit parallelen Streckbäumen können wir nach Obigem bestimmen.

Zeichnet man in dem Fachwerk Fig. 200 alle Streben fortlaufend unter einander, indem man die Neigung der einen abfallenden Schaar auch in umgekehrtem Sinne aufträgt: so erhält man einen Zug von Streben, die eben so stark in Anspruch genommen sind, als die vertical über ihnen stehenden Streben des Fachwerks selbst; unter der Voraussetzung natürlich, dass die bei dem Zusammenstoss zweier nicht in der gleichen Linie liegenden Streben entstehende Seitenkraft, durch horizontale Bänder aufgehoben werden, deren verticaler Abstand gleich der Höhe des Fachwerks wäre. Der Werth aller Streben des Fachwerks ist daher gleich dem des Strebenzugs, welcher P von der verticalen Mauer in A aus stützt; und diejenige Anordnung, welche den Werth der Streben AP zum Minimum macht, macht auch den der Streben des Fachwerks zum Minimum: wenn jedes Stück des ersten Zuges innerhalb eines Parallelstreifens ungeraden Zeigers als Strebe, und jedes innerhalb eines Streifens geraden Zeigers als Diagonalband so in das Fachwerk ver-

setzt wird, dass die Enden der Streben auf denselben Verticalen bleiben. Nun hat aber diejenige Strebe AP den geringsten Werth, welche das Dreieck ABP gleichschenkelig macht, die also einen Winkel von 45° mit dem Horizont bildet, wenn die Richtung der Kraft vertical ist und die Streckbäume horizontal liegen. Da diese Richtung nicht allein von der ganzen Strebe AP, sondern auch

Fig. 200.



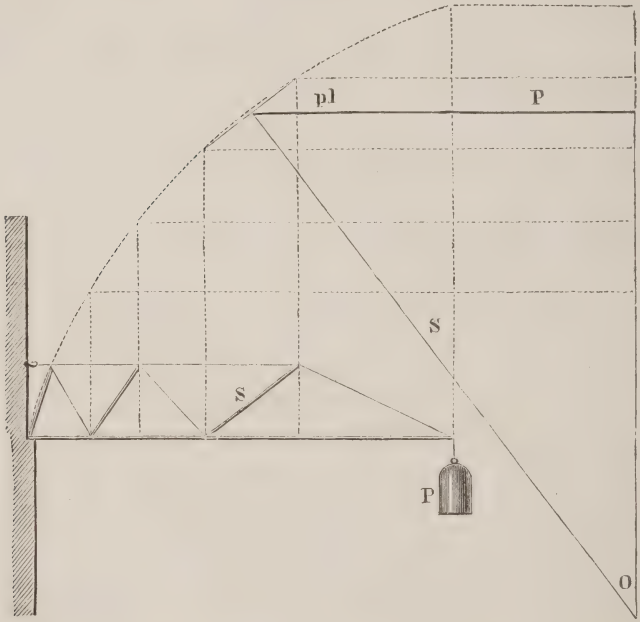
von jeder einzelnen Strecke desselben gilt, so gilt es auch dann noch, wenn für die absolut in Anspruch genommenen Streben ein anderer Tragmodul, als für die rückwirkend angegriffenen zur Anwendung kommen soll. Also auch dann noch, wenn die zwei Strebenschaaren aus verschiedenartigen Materialien hergestellt werden sollen.

Bei eisernen Fachwerken wird der Querschnitt aller Constructionstheile den an ihnen wirkenden Kräften angepasst; bei hölzernen kann man jedoch gewöhnlich nicht unter eine gewisse Grenze der Dimensionen herunter. In diesem Falle müsste, wenn das Material gehörig ausgenutzt werden sollte, die Strebe so schief gestellt werden, dass sie mit ihrer ganzen Tragfähigkeit arbeitet.

Sind auf dem Kräfteplane eines Fachwerks die scheerenden Kräfte construirt, so kann man leicht die Neigung jeder Strebe und

jedes Diagonalbandes so bestimmen, dass der Druck in derselben constant sei. Man construire nur über der scheerenden Kraft jeder Strebe ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypothenuse gleich dem constanten Widerstand der Strebe ist. Setzt man einen gleichförmig belasteten Träger voraus, so würden in diesem Falle die einzelnen Streben mit den Sehnen eines Kreisbogens parallel laufen, der über ihm beschrieben worden wäre. Denn wählt man den Maassstab der Kräfte Fig. 201 so, dass die Längeneinheit gleichzeitig auch die Belastung pro Längeneinheit darstellt: so ist für jede Strebe die Summe der ausser ihr wirkenden Kräfte gleich der

Fig. 201.



Entfernung ihrer Mitte von einer Verticallinie, die um die Belastung P jenseits des Endes der Construction liegt. Beschreibt man dann von irgend einem Punkt O dieser Verticalen aus mit dem dem constanten Widerstand S gleichen Radius einen Kreisbogen, so laufen die Streben mit den vertical über ihnen liegenden Sehnen parallel; denn wie für die Strebe S, so kann auch für jede andere mit entsprechender Aenderung O,S, $p\,l$, P das zur Bestimmung des Kräftedrucks nothwendige Kräftedreieck um 90° gedreht, darstellen.

Was jetzt von dem gerade hinausragenden Fachwerk bewiesen wurde, gilt auch von dem an beiden Enden aufliegenden; ist es möglich, den Querschnitt der Füllungsglieder den an ihnen wirkenden Kräften anzupassen, so ist die Neigung von 45° die vortheilhafteste, die man ihnen geben kann. Ist aber dies nicht der Fall und sollen die Querschnittsdimensionen sowie die an ihnen wirkenden Kräfte constant sein, so müssten die Streben mit den vertical über ihnen liegenden Sehnen vom Kreisbogen parallel laufen, deren Radien und Mittelpunkte gerade so, wie in Fig. 201 für jede Brückenhälfte zu bestimmen wären. Uebrigens ist diese Anordnung praktisch unzweckmässig; es sind die Knotenpunkte mehr der Streckbäume, als der Streben willen da, sie sollen in nicht zu grossen Zwischenräumen angebracht werden, um das Knicken der ersteren zu verhindern, und ihre Lage kann daher der zufälligen Tragkraft der Füllungsglieder nicht untergeordnet werden.

Was nun die Streckbäume betrifft, so ist ihr Werth für jede Strecke desto geringer, je weiter man sie auseinander stellt, welches auch das Moment der ausserhalb eines ihrer Schnitte wirkenden Kräfte sei. Die Höhe eines Fachwerks ist daher, weil sie durchaus ohne Einfluss auf den Werth der Füllungsglieder ist, so gross anzunehmen, als letztere überhaupt lang gemacht werden können, ohne dass ein Knicken derselben zu befürchten ist. Da die Stärke der Füllungsglieder nahezu proportional der Spannweite wächst und mit ihrer Stärke auch ihre Länge grösser gemacht werden kann, so wird man einem längern Fachwerk auch eine grössere Höhe geben können. Durch die Praxis hat sich der Gebrauch gebildet, dem Fachwerk $^1/_{10}$ bis $^1/_{12}$ der Spannweite zur Höhe zu geben. Hat man aber einmal diese Höhe angenommen, so ist sie auf die ganze Länge des Fachwerks einzuhalten, damit der Werth der Streckbäume ein Minimum werde.

Durch gekrümmte Streckbäume, deren Höhe der Momentencurve angepasst wird, lässt sich zwar der Werth der Füllungsglieder bedeutend, jedoch wegen der einseitigen Belastung und wegen der Glieder, welche das Fahrbahngewicht auf die Bogen zu übertragen haben, nicht auf 0 reduciren; allein wir werden in der nächsten Nummer sehen, dass diese Reduction nicht im Stande ist, die Werthvermehrung der Streckbäume zu compensiren; will man daher nicht aus höheren, der Theorie der Festigkeit entlehnten Grün-

den, wie bei dem Pauli'schen System, gekrümmte Streckbäume anwenden und durch Reduction des Tragmoduls den praktischen Werth der Construction vermindern: so verlangt das Minimum des Werthes parallele Streckbäume in den Fachwerken. In jedem Punkt ihrer Länge ist ihnen das Maximum der Höhe zu geben, das man ihnen überhaupt geben kann und will.

Zweites Kapitel.

Der Werth zusammengesetzter Constructionen.

---

148. Darstellung des Werthes einer Construction.

Will man die Werthsummen der verschiedenen Theile verschiedener Constructionen mit einander vergleichen, so bleibt nichts Anderes übrig, als diesen Werth graphisch darzustellen. Die Länge jedes einzelnen Constructionstheiles ist durch den Plan gegeben, die Kraft durch eine Linie des Kräfteplans, sein theoretischer Werth, das Product dieser zwei Linien, kann daher durch ein Rechteck dargestellt werden, das diese beiden Linien zu Seiten hat. Da alle Constructionstheile eines Fachwerks entweder sich der Länge nach über die ganze Brücke erstrecken, oder in bestimmten, durch die Knotenpunkte gebildeten Intervallen auf einander folgen: so wird es nicht schwer sein, das Rechteck in ein anderes oder in ein Trapez zu verwandeln, das die Horizontalprojection des Constructionstheils oder die Entfernung der Knotenpunkte, die es verbindet, zur Seite und zur mittleren Höhe eine andere Linie hat, unter der man sich eine verwandelte Kraft denken kann. Summirt man dann alle diese verwandelten Kräfte über einer beliebigen, z. B. horizontalen Linie, und zieht man dann durch die Endpunkte der in der Mitte zweier auf einander folgender Knotenpunkte stehenden Verticalen eine gerade Linie, die zwischen verticalen durch diese geradlinig ist, so wird das so erhaltene Trapez die Werthsumme aller zwischen zwei auf einander folgen-

den Knotenpunkten befindlichen Constructionstheile darstellen. Trapez an Trapez reihend erhält man eine zusammenhängende Fläche, welche den Werth einer ganzen Tragrippe z. B. darstellen kann.

In der Regel werden die einzelnen Theile eines Fachwerks wohl in keiner andern, als einer der folgenden Lagen vorkommen können.

a) In horizontaler Lage, z. B. die einzelnen Theile der Streckbäume eines Fachwerks mit parallelen Streckbäumen. Dann ist die in einer Strecke wirkende Kraft selbst die mittlere Höhe des über der Strecke beschriebenen Trapezes.

b) In schiefer Lage, z. B. Bogen oder gebogene Streckbaumstücke, und Streben zwischen zwei auf einander folgenden Knotenpunkten. Das Parallelogramm Fig. 202, dessen Höhe AB gleich der im Balken A wirkenden Kraft ist, stellt den theoretischen Werth des Balkens dar. Jede durch den Endpunkt C der mittleren Verticallinie AC gezogene Linie begrenzt mit den äussersten Verticalen und dem Balken, oder einer durch den Punkt A gehenden Horizontallinie, ein Trapez, dessen Inhalt gleich dem des Parallelogramms ist. Die gesuchte mittlere verticale Höhe

Fig. 202.

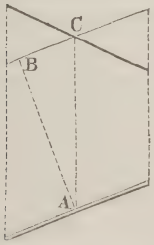
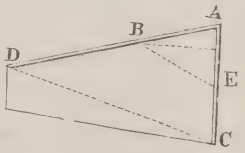


Fig. 203.



des Trapezes ist daher die Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete auf dem treffenden Constructionstheil senkrecht steht, und deren Länge gleich der in ihm wirkenden Kraft ist.

c) In verticaler Lage, z. B. verticale Hängsäulen und Pfosten. Diese reichen natürlich nie von einem Pfosten zum andern. Wird auf einem der Streckbäume der Punkt B so bestimmt, dass seine horizontale Entfernung von dem Pfosten AC gleich der im Pfosten wirkenden Kraft ist, so ist der Inhalt des Dreiecks ABC (BC wurde nicht gezogen) gleich dem halben Werth des Pfostens.

Wird nun BE parallel zur Diagonale CD gezogen, so ist dieser halbe Werth auch gleich dem Dreieck ADE. AE ist demnach die mittlere Seite des Trapezes, das zwischen der Verticalen von A und D beschrieben, zum Inhalt den Werth des Pfostens AC hat. Das Gebilde ABD kann natürlich auch, wie es Taf. 27 geschah, horizontal gelegt werden.

Die eben angedeutete Construction kann ferner angewendet werden, wenn AC schief steht und nicht bis zum nächsten Knotenpunkt reichen sollte.

In allen hier nicht aufgezählten Fällen wird man sich immer durch directe Flächenverwandlung helfen.

149. Werth verschiedener Constructionssysteme.

Nach den obigen Regeln haben wir nun Taf. 27 den Werth eines gewöhnlichen Fachwerks, eines continuirlichen Balkens, eines Pauli'schen Trägers und eines Bogens in Flächen ausgedrückt.

Jeder der obigen vier Constructionen wurde $^1/_4$ des Blattes in der Art zugewiesen, dass die halbe Länge des Blattes, also 0,12, gleich der Spannweite von 50 Mtr. jeder der vier Brückenconstructionen sei. Der Maassstab ist also 0,24 (8‴) = 100 Mtr.

In diesem Maassstabe wurde in dem Blattviertel Taf. 27_4 das Fachwerk der Taf. 17, und in dem von Taf. 27_2 der Pauli'sche Träger von Taf. 18 aufgetragen; in dem einen der beiden übrigen Fächer Taf. 27_1 wurde ein Bogen, in dem andern Taf. 27_3 ein continuirlicher Balken, welche, wie der Pauli'sche Träger und das Fachwerk, $^1/_{10}$ der Spannweite oder 5 Mtr. zum Pfeil und zur Höhe haben.

Zum Auftragen der an dem Pauli'schen Träger und am Fachwerk wirkenden Kräfte wurden die Kräftepläne von Taf. 17 und 18 benutzt. Zur Bestimmung der am Bogen und am continuirlichen Balken wirkenden Kräfte wurden besondere Kräftepläne angefertigt, und denselben genau die gleichen Belastungen durch das Eigengewicht und durch die Verkehrsbelastung, als wie jenen zu Grunde gelegt. In den Constructionen ist daher die Spannweite = 50 Mtr., der Pfeil oder die Höhe = 5 Mtr.

Das Eigengewicht ist = 5 Tn., wohl hinlänglich gross, selbst für die schwersten Brücken, und die zufällige Belastung gleich der Belastung durch eine Engerth'sche Locomotive $= \frac{56 \text{ Tn.}}{10{,}6 \text{ Mtr.}} = 5{,}3$ Tn. pro lf. Mtr. Die Mittheilung der Kräftepläne des Bogens und die für den continuirlichen Balken ausgeführten Rechnungen dürfen wir füglich unterlassen, weil es sich nicht um einen wirklichen Vergleich, sondern nur darum handelt, zu zeigen, wie ein solcher vorgenommen werden könnte; wir beschränken uns daher auf die Bemerkung, dass der Bogen als Fachwerk behandelt und die an den Füllungsgliedern wirkenden Kräfte durch Zerlegung des Drucks einer Fig. 186 S. 487 ähnlichen Drucklinie bestimmt wurden.

Die so bestimmten Spannungen in allen geradlinigen Streckbäumen der Taf. $27_{3 \text{ und } 4}$ wurden unmittelbar über der Mitte jeder einzelnen Strecke im Maassstabe von 0,001 = 20 Tn. in ähnlicher Weise, wie es schon Taf. 17_4 und Taf. 12_7 geschah, aufgetragen, die Endpunkte der erhaltenen Höhen durch eine gebrochene Linie verbunden, und so die den Werth der Streckbäume darstellende und mit diesem Wort bezeichnete Fläche erhalten.

Die Ordinaten der parabolischen Figur, die man auf Taf. 27_4 erhielt, sind wegen des Verhältnisses des Maassstabes $^2/_3$ der Ordinaten der ähnlichen Figur Taf. 17_4.

Die Höhe des Streifens, welcher den Werth der Bogen auf Taf. $27_{1\,2}$ darstellt, wurde mittelst der durch Fig. 202 erläuterten Construction auf der obern Horizontalen des Blattes in der zweiten Hälfte der Oeffnung bestimmt. Die constante Kraft, welche im Druck- und Spannbogen des Pauli'schen Trägers wirkt, ist wegen des Verhältnisses der Maassstäbe gleich der Hälfte derselben Kraft $Q = R$ auf Taf. 18_1.

Genau auf dieselbe Weise wurde auch oben auf derselben Horizontalen in Taf. $27_{1\,2}$ und auf den oberen Streckbäumen der Taf. $27_{3\,4}$ die Höhe des Streifens bestimmt, der den Werth der Streben und Gegenstreben darstellt.

Endlich wurde die Höhe des Streifens, welcher den der verticalen Pfosten in Taf. $27_{1\,2}$ darstellt, in den Figuren des Fachwerks selbst so, wie es Fig. 203 zeigt, bestimmt, und dadurch die Umrisse der schraffirten Flächen Taf. 27 erhalten, welche den Werth all der verschiedenen Constructionstheile der vier behandelten Träger darstellen.

Das Umfahren dieser Flächen mit dem Planimeter gab die folgenden, auf Taf. 27 eingeschriebenen Werthe der einzelnen Brückentheile:

	Fig. 3. Der continuirliche Balken. □Ctm.	1. Der Bogen. □Ctm.	4. Das Fachwerk. □Ctm.	2. Der Pauli'sche Träger. □Ctm.
Der Bogen		40,4		
Die Streckbäume	26,4	12,9	52,7 8,6	82
Die Pfosten		1,9		3,1
Die Streben	18,3	3,2	17,4	3,0
Die Gegenstreben				2,7
Summe	44,7	58,4	78,7	90,8

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass bei Anwendung gleicher Tragmodule der Pauli'sche Träger am meisten Material erfordert. Hierauf wurde schon in Nr. 115 S. 406 aufmerksam gemacht. Die Materialersparung hat daher nur darin ihren Grund, dass in Folge der zweckmässigen Construction und der sorgfältigen Auswahl des Materials ein grösserer Tragmodul angewendet werden darf. Das Material, das die Füllungsglieder erheischen, ist gering, nur $^1/_{10}$ des gesammten Materialaufwandes.

Nach dem Pauli'schen Träger erfordert am meisten Material das gewöhnliche Fachwerk. Da es nicht möglich ist, den Querschnitt der Streckbäume der Theorie entsprechend bei den Widerlagern auf 0 zu reduciren, so haben wir angenommen, der Querschnitt derselben müsse innerhalb der äussersten beiden Fächer constant sein und dort den Streifen, der ihren Werth darstellt, durch einen horizontalen, stark punktirten Strich begrenzt. Genau um eben so viel muss natürlich auch die Linie erhöht werden, welche den Streifen der Streben begrenzt, und so ergaben sich in den Ecken jene weniger stark schraffirte Dreiecke, welche den dieser Verstärkung der Streckbäume entsprechenden Materialaufwand von 8,6 □Ctm. darstellen. Eigentlich sollte man bei dem Fachwerk auch noch etwas für verticale Pfosten beifügen; streng genommen sind sie zum praktischen Werth zu rechnen, weil sie nur dazu dienen, das Fahrbahngewicht auf die Knotenpunkte zu übertragen und wir diese Constructionstheile nie hier berücksichtigt haben; allein in dieser Beziehung bietet der Pauli'sche Träger, wie wir

ihn gezeichnet haben, mehr Haltepunkte der Fahrbahn dar, als das Fachwerk; vergrössert man aber nur um wenig die 79 □Ctm. des Fachwerks, oder vermindert man um etwas die 90 □Ctm. des Pauli'schen Trägers unbedeutend, so nähern sich die Werthe dieser beiden Constructionen so sehr, dass man sagen darf, sie erfordern bei Anwendung gleicher Tragmodule gleich viel Material. Der Pauli'sche Träger ist daher dem Fachwerk gegenüber um so viel, als durch Anwendung eines grössern Tragmoduls an Material erspart wird, in Vortheil.

Viel weniger Material als die beiden obigen Constructionen erfordert der Bogen. Die Ersparung des einen Streckbaums fällt so bedeutend ins Gewicht, dass sein Werth selbst bei so kurzen Fächern als wie bei dem Pauli'schen Balken nur = 58,4 □Mtr. ist. Wir haben bei Ermittelung dieser Zahl vorausgesetzt, dass der Streckbaum sich im Scheitel mit dem Bogen vereinige, also dort wegfalle; will man jedoch dies nicht zulassen und annehmen, der Streckbaum laufe über dem Bogen weg, so hat man den Inhalt des schwächer schraffirten Rechtecks in der Mitte zwischen den beiden Streifen, welche den Werth der Streckbäume in jeder der beiden Brückenhälften darstellen, mit 1,8 □Mtr. zu addiren. Und dann erst erreicht der Bogen den Werth von 60,2 □Ctmr. oder $^2/_3$ des Werthes des Pauli'schen Trägers. Wenn man sich also nicht gestattet, den Festigkeitscoefficienten bei letzterem $\frac{90,8}{60,2}$ oder rund $\frac{3}{2}$ mal so gross als bei dem Bogen anzunehmen, ist der Bogen überall, wo genügende Constructionshöhe vorhanden ist, vorzuziehen.

Noch geringer ist der Materialaufwand, den der continuirliche Balken erfordert; er wird durch 44,7 □Ctmr. dargestellt. Wenn man jedoch noch etwas für verticale Pfosten zur Befestigung der Fahrbahn beifügte, so würde man den Bogen nahezu erreichen. Es werden daher wohl unter allen Verhältnissen mittelst Bogen und continuirlichen Balken, wo solche zulässig sind, Oeffnungen mit dem geringsten Kraftaufwand überbrückt werden können.

Die eben erhaltenen Resultate kann man kaum überraschend nennen. Ein Blick auf Taf. 27 zeigt, dass vor Allem das Material, das die Streckbäume erfordern, ins Gewicht fällt. Der Pauli'sche Träger und das Fachwerk, die deren immer zwei haben, erfordern daher immer am meisten Material.

Der Bogen erfordert nur einen Streckbaum, bei dem continuirlichen Balken werden die an ihm wirkenden Kräfte auf die Hälfte reducirt, und deshalb erfordern diese beiden Constructionen am wenigsten Material.

Auf der andern Seite erfordern weniger Material als der Bogen und als der Pauli'sche Träger: der continuirliche Balken und das Fachwerk, weil die an ihren Streckbäumen wirkenden Kräfte bei ersterem gegen die Inflectionspunkte, bei letzterem gegen die Widerlager hin abnehmen. Und diese Abnahme wird nicht durch den grössern Materialaufwand für die Streben compensirt, der bei beiden Constructionen ziemlich gleich gross (siehe Nr. 93 S. 277) und ungefähr doppelt so gross als bei dem Pauli'schen Träger und dreimal so gross als bei dem Bogen ist.

Wären daher die theoretischen Werthe der Constructionen allein entscheidend für deren Vorzüglichkeit, so würden bei mehreren aufeinander folgenden Oeffnungen continuirliche Balken, bei einzelnen Oeffnungen mit genügender Constructionshöhe Bogen, bei ungenügender Constructionshöhe aber Fachwerke oder Pauli'sche Träger anzuwenden sein. Allein schon im Eingang dieses Abschnittes haben wir darauf aufmerksam gemacht, dass es bei der Wahl einer Construction mehr auf ihren praktischen Werth als auf ihren theoretischen ankomme, die sich gegenseitig wie eine Curve zu ihrer Asymptote verhalten. Ist der praktische Werth einer Construction viel grösser als der theoretische, so wird es möglich sein, durch Verbesserungen jenen immer mehr dem letztern zu nähern, allein unmöglich wird es sein, ihn ebenso weit herunter zu bringen. Die erhaltenen Flächenzahlen F sind daher Grenzwerthe, die sehr leicht in Materialinhalte oder Gewichte verwendet werden können. In der That dividirt man die F Ctmr. durch die Centimeter-Maassstäbe der Figuren 0,24 Ctmr. = 1 Mtr. und 0,005 Ctmr. = 1 Tn., so erhält man Metertonnen; und wenn wir weiter annehmen, dass alles gleich stark gedrückte oder gedehnte Material auf eine Länge von 1 Mtr. reducirt sei, also obige Zahl Metertonnen mit 1 Mtr. dividiren, so erhalten wir die Zahl Tonnen, welche durch Division mit dem Tragmodul ϱ pro □Mtr. die Querschnittsfläche des 1 Mtr. langen Materialprismas bestimmt. Nehmen wir z. B. an, es handle sich um den Vergleich verschiedener Eisenconstructionen und es sei der Tragmodul 0,6 Tn. pro □Cmtr. oder 6000 Tn. pro □Mtr.: so erfordert eine Construction,

deren Werth $= F$ ist, $\frac{F}{0{,}24 \,.\, 0{,}005 \,.\, 6000} = \frac{F}{7{,}2}$ Cubikmeter Eisen.

Wird endlich das Gewicht der Cubikeinheit des Eisens zu 7,8 Tn. angenommen, so erhält man als Grenzwerth des Eisenbedarfs $\frac{7{,}8}{7{,}2} F = \frac{13}{12} F = 1{,}083 \,.\, F$ Tn. Eisen.

Die Grenzwerthe der verschiedenen Constructionen auf Taf. 27 also die Anzahl Tonnen, die sie mindestens erfordern (ohne Fahrbahn etc.) ist daher:

		Tn.	Tn. pro lf. Mtr.
Bei dem continuirlichen Balken	$44{,}7 \,.\, \frac{13}{12}$	$= 48{,}4$	oder 0,97
„ „ Bogen	58,4 . „	$= 63{,}3$	„ 1,27
„ „ Fachwerk	78,7 . „	$= 85{,}3$	„ 1,71
„ „ Pauli'schen Träger . . .	90,8 . „	$= 98{,}4$	„ 1,97
Wird bei dem Pauli'schen Träger dem Nr. 116 S. 410 Entwickelten entsprechend der Tragmodul zu 7,8 pro □Ctm. angenommen, so vermindert sich der theoretische Eisenbedarf pro lf. Meter auf $\frac{6}{7{,}8} \,.\, 1{,}97$			1,52

In diesem Fall würde sich also der Pauli'sche Träger zwischen den Bogen und das Fachwerk stellen; wäre also zweckmässiger als letzteres.

Viel einfacher gestalten sich obige Verhältnisse, wenn zur Bestimmung der praktischen Werthe statt der Kräfte die auf irgend eine Basis reducirten Querschnittsflächen der einzelnen Constructionstheile aufgetragen wurden; es ist dann der Materialinhalt einfach gleich jener Basis multiplicirt mit der Werthfläche.

Auf die Bestimmung wirklicher Werthverhältnisse zwischen den einzelnen Constructionsgliedern und auf die Ableitung von Formeln zur Bestimmung des Gewichts pro lf. Meter der einzelnen Constructionen treten wir hier nicht mehr ein: es ist dies nicht eine Sache der graphischen Statik, sondern der Baukunde, die sich dabei auf zahlreich construirte praktische Werthe zu stützen hat.

ACHTER ABSCHNITT.

THEORIE DER STÜTZ- UND FUTTER-MAUERN.

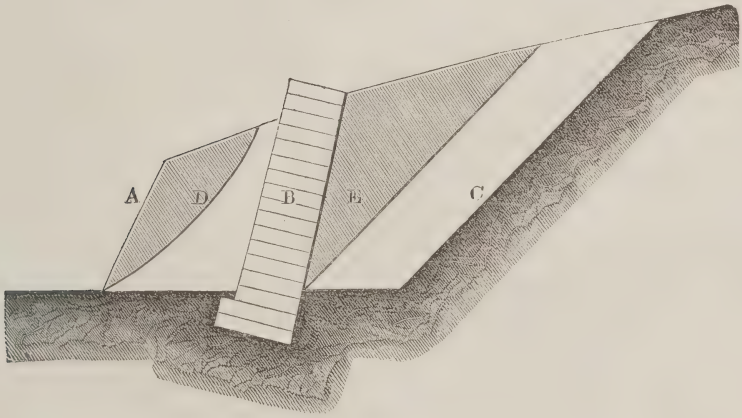
Erstes Kapitel.

Das Gleichgewicht nicht gestützter Erdkörper.

150. Die an gleitenden Erdprismen wirkenden Kräfte.

Wenn eine Erdmasse (Fig. 204) unter einem steilen Winkel A angeschnitten wird, so hält sie sich frei nur bis zu einer gewissen Höhe; wächst diese Höhe, so muss die Erdmasse entweder durch

Fig. 204.



eine Mauer B gestützt oder mittelst einer flacheren Böschung C angeschnitten werden.

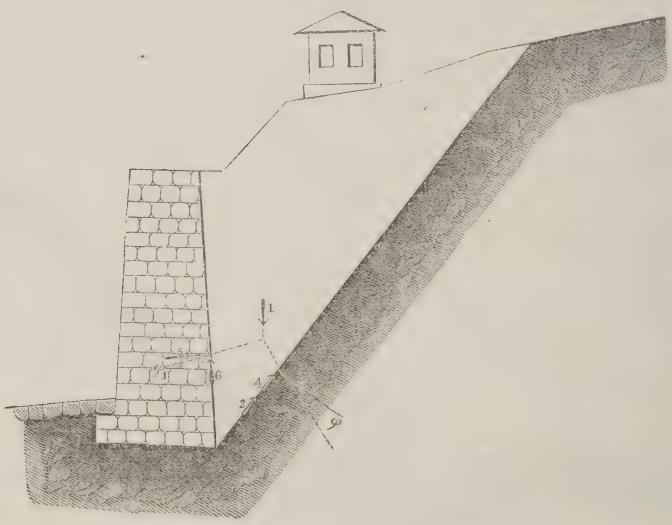
Wichtig sind nun im Baufach die Fragen:

Wie hoch darf unter einem gegebenen Winkel die Erdmasse angeschnitten werden, ohne dass die Wand A einfalle?

Wie gross ist der Druck, den die Erdmasse, wenn ihre vordere Begrenzung diese Höhe A überschreitet, auf die sie stützende Mauer B ausübt und welche Stärke muss dieser Mauer gegeben werden?

Wenn die Wand *A* einfällt, so geschieht dies dadurch, dass sich vorn ein Erdprisma von der Hauptmasse löst und auf seiner hintern Fläche *D* abrutscht. Diese Fläche kann offenbar nur eine Kreiscylinderfläche, die Ebene als Cylinderfläche von unendlich grossem Radius mit inbegriffen sein; denn wäre der Krümmungshalbmesser dieser Fläche nicht constant, so würden nach der Bewegung einzelne Theile des abrutschenden Erdreichs hohl liegen, und das unvermeidliche Bersten des Prismas müsste Kräfte aufzehren, die nach einer andern Fläche constanter Krümmung leichter die Trennung bewirken würden.

Fig. 205.



Die Erfahrung lehrt nun, dass diese Fläche annähernd eine Ebene sei und der Fehler jedenfalls nicht bedeutend sei, wenn sie als solche angenommen wird, auch wir werden daher mit Allen, die bisher die Frage behandelten, ebenfalls annehmen, sie sei eine Ebene.

Von derselben Voraussetzung wollen wir auch ausgehen, wenn es sich um den Druck auf eine Stützmauer handelt, und annehmen, derselbe rühre von einem Prisma *E* Fig. 204 her, das sich in einer Ebene von der Hauptmasse trennt und auf dieser Trennungsebene abrutscht.

Die an einem abrutschenden Prisma wirkenden Kräfte sind

Fig. 205 und 206 im Seil- und Kräftepolygon dargestellt; es sind die folgenden:

1) Das Gewicht des Prismas mit Allem, womit es vielleicht belastet ist.
2) Die Cohäsion, womit es an der Hauptmasse haftet und die in der Trennungsfläche der Bewegung entgegenwirkt.
3) Der Widerstand der stehenbleibenden Erdmasse senkrecht auf die Trennungsfläche.
4) Die in Folge dieses Widerstandes entstehende Reibung an der Trennungsfläche.
5) Der senkrechte Widerstand und
6) Die Reibung der vordern Begrenzungsfläche.

Wenn es sich um ein freistehendes Prisma handelt, so sind die beiden letzten Kräfte 5 und 6 = 0.

Die Kräfte 1, 3, 5 haben die in Fig. 205 und 206 angegebenen Richtungen. 2, 4 u. 6 dagegen wirken immer der Bewegung entgegen.

Sie haben also die in den Figuren angegebenen Richtungen aufwärts, wenn es sich um Druck handelt, wobei sich das Gewicht des Prismas 1 wie ein Keil abwärts zwischen die beiden Begrenzungsflächen einzwängt. Handelt es sich dagegen um Schub, d. h. würde gefragt, wie gross ist z. B. der Widerstand, den das Prisma dem Schub eines Gewölbes Fig. 207 und 208, das auf der Mauer ruhte, entgegenzusetzen vermag, wobei das Prisma durch Zusammenpressen der beiden Begrenzungsflächen oben hinausgedrückt würde: dann würden die Kräfte 2, 4 und 6 abwärts wirken, wie es in den Fig. 207 und 208 dargestellt ist.

Fig. 206.

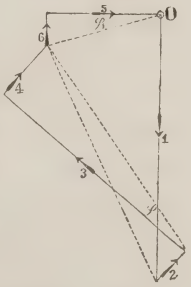


Fig. 207.

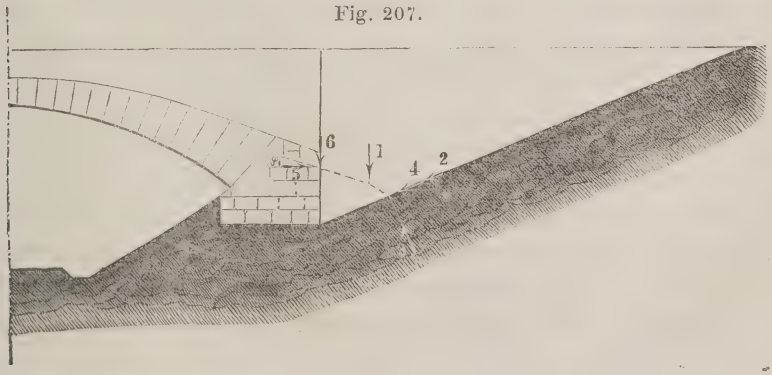
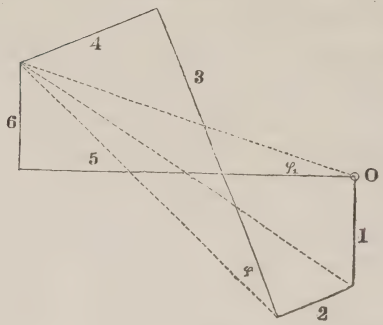


Fig. 208.



151. Darstellung der am Erdprisma wirkenden Kräfte.

Wir müssen nun den Linien, durch welche wir die in Frage stehenden Kräfte darstellen wollen, eine gewisse Bedeutung beilegen.

Wir wollen durch eine Linie von der Länge l das Gewicht eines Parallelepipedon von Mauerwerk darstellen, dessen drei Dimensionen gleich der Länge l, einer zu wählenden Basis a und der Länge der Construction senkrecht auf die Bildfläche gemessen gleich ist.

Der Flächeninhalt des Querschnitts einer Mauer bezeichnet also deren Gewicht, und man erhält die Linie, welche es darstellt, durch Verwandeln dieses Querschnitts auf die Basis a, das Gewicht eines Erdkörpers durch Verwandeln auf die Basis $a_,$, die sich zu a umgekehrt wie die specifischen Gewichte der Erde und des Mauerwerks verhält. Um am Schluss graphischer Constructionen die Länge l auf wirkliches Gewicht zurückzuführen, hat man sie, wenn ϖ und $\varpi_,$ das Gewicht der Cubikeinheiten Mauerwerk und Erde bezeichnen, mit der Länge des betrachteten Mauer- oder Erdkörpers, den wir für gewöhnlich $= 1$ annehmen und mit $a\,\varpi$ oder $a_,\varpi_,$ zu multipliciren, wobei $a\,\varpi = a_,\varpi_,$ oder $\frac{a}{a_,} = \frac{\varpi_,}{\varpi}$ ist.

Die zu wählende Länge a muss immer den Umständen angepasst werden und ist immer als rundes Vielfache der Maasseinheit zu wählen, welche der Construction zu Grunde liegt. Auf diese Weise können alle Gewichte, also hier die Grösse der Kraft 1, bestimmt werden.

Den Coefficienten k des Cohäsionswiderstandes wollen wir durch die Höhe des Erdprismas darstellen, dessen Basis gleich der

zu trennenden Fläche und dessen Gewicht die zur Trennung dieser Fläche nothwendige Kraft ist. Im Querschnitt wird daher diese Kraft bezeichnet durch ein Rechteck, dessen Seiten $= k$ und gleich der Länge der Trennungsfläche in der Bildebene ist. Man erhält die Linie, welche sie darstellt, durch Verwandeln dieses Rechtecks auf die Basis a_1. k ist also die Kraft, welche nothwendig ist, um die Trennung in einer Fläche zu bewirken, die im Schnitt mit der Bildfläche die Länge a_1 zeigt.

Bezüglich der übrigen vier Kräfte 3, 4, 5 und 6, den Widerständen senkrecht auf die Begrenzungsflächen des Prismas und den Reibungen an diesen Begrenzungsflächen, ist zu bemerken, dass nach der Lehre der Mechanik das Verhältniss dieser Kräfte $\frac{(6)}{(5)} = tg\ \varphi$, und $\frac{(4)}{(3)} = tg\ \varphi$ Fig. 206 und 208 bei gleicher Beschaffenheit der sich reibenden Flächen constant bleibt. Es bildet also die Mittelkraft von Reibung und senkrechtem Widerstand in dem Augenblick, in welchem das Gleichgewicht gestört wird, stets denselben Winkel, den Reibungswinkel, φ, z. B. bei Erde auf Mauerwerk und φ bei Erde auf Erde mit diesem senkrechten Widerstand, d. h. mit der Normalen auf die widerstehende Fläche.

Wir werden in Zukunft diese beiden Kräfte jederzeit zusammenfassen und durch ihre Mittelkräfte den stark gestrichten Linien in Fig. 205—208 darstellen.

Im Zustand der Ruhe, des ungestörten Gleichgewichts kann der Widerstand einer Fläche Fig. 209 jede Richtung innerhalb des Winkels φ rechts und links von der Normalen annehmen. Steht P senkrecht auf der Gleitfläche, so könnte es ∞ gross werden, ohne Gleiten zu verursachen; die Sicherheit gegen dieses ist daher ∞ gross, und die Kraft, die parallel zur Gleitfläche nothwendig wäre, um Gleiten zu verursachen, wäre $= P\,tg\,\varphi$. Früher nannte man (siehe auch S. 439) das Verhältniss dieser Kraft zur Seitenkraft $P\,tg\,\alpha$, die vorhanden ist, wenn die Mittelkraft mit der Normalen den Winkel α bildet und den Normaldruck P verursacht, also das Verhältniss $tg\,\varphi : tg\,\alpha$, den Sicherheitscoefficienten. Ist $\alpha = \varphi$, so ist er $= 1$, d. h. die Kraft, welche Gleiten verursacht, ist gerade vorhanden, es besteht Gleichgewicht bezüglich des Gleitens. Steht dagegen P normal auf der Gleitfläche, so ist $\alpha = 0$ und der Sicherheitscoefficient ist ∞ gross, wie wir oben schon gefunden haben.

Fällt die Richtung der Mittelkraft P Fig. 210 (die Kräfte- und Seilpolygon darstellt) der auf die Fläche wirkenden Kräfte nicht in diesen Winkel 2φ, so zerlegt sich diese in den Gesammtwider-

Fig. 209.

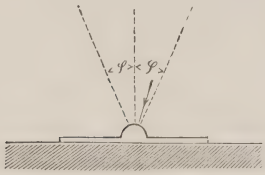
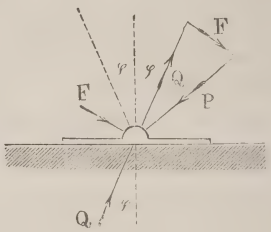


Fig. 210.



stand Q der Fläche, welcher den Winkel φ mit der Normalen bildet, und eine Kraft F, welche nach beliebiger Richtung wirkt und welche nothwendig ist, um die Bewegung zu verhindern.

152. Druck und Schub eines auf einer geneigten Ebene stehenden Körpers.

Wir können nun den Druck F, d. h. die Kraft bestimmen, die nothwendig ist, um einen Körper vom Gewicht P am Abgleiten auf einer schiefen Ebene, welche mit der Horizontalen einen Winkel $\varphi + \mu$ bildet, zu verhindern.

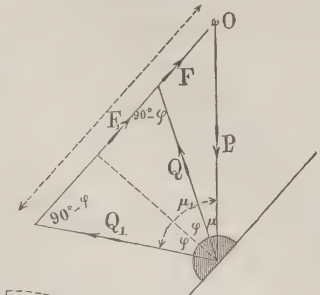
In Fig. 211 (S. 553) ist das Kräftepolygon $P\ Q\ F$ gezeichnet, das nach Obigem keiner weitern Erklärung bedarf. Es ist dabei, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, angenommen, dass F parallel mit der Gleitfläche wirke, μ ist der Winkel, den die beiden Kräfte P und Q miteinander bilden. Dieser Winkel ist gleich dem Winkel, den die Gleitfläche mit der Ebene — · — · — · — vom Neigungswinkel φ (siehe Fig. 212 S. 553) bildet. Denn $\varphi + \mu$ ist in Fig. 211 und 212 das Complement desselben Winkels, den die Verticale mit der Gleitfläche bildet; ist daher φ in beiden Figuren gleich, so muss es auch μ sein.

Man kann daher auch dadurch einfach zum Kräftepolygon gelangen, dass man Fig. 212 P in der Gleitfläche und am innern Endpunkt eine Linie aufträgt, welche die Neigung φ gegen den Horizont hat, mit der daher P den Winkel μ bildet, endlich vom

andern Endpunkt von P aus F vertical durch den Winkel μ zieht. In beiden Fig. 211 und 212 sind dann die beiden Dreiecke FPQ congruent.

In dieser Stellung giebt das Kräftepolygon eine klarere Uebersicht von der Aenderung des Druckes F bei sich drehender Gleitfläche, er ist gleich den vertical gemessenen und auf den mit dem Winkel φ aufsteigenden Radius bezogenen Ordinaten des Kreisbogens, den der Endpunkt von P in der Gleitfläche während dieser Drehung beschreibt.

Fig. 211.



Ist die Gleitfläche vertical, so ist F gleich dem Rad. dieses Kreises $= P$. Von dieser Stellung aus nimmt F bei der Drehung beständig ab, bis es $= 0$ wird, wenn die Gleitfläche den Winkel φ mit der Horizontalen bildet. Bei kleinerer Elevation der Gleitfläche wird F negativ, d. h. es ist eine Kraft in entgegengesetzter Richtung nothwendig, um ein Gleichgewicht bezüglich der Bewegung gegen den Mittelpunkt des Kreises in Fig. 212 herzustellen. Diese negative Kraft nimmt bei fortgesetzter Drehung zu, bis sie in der verticalen Stellung der Gleitebene wiederum gleich dem Radius des Kreises $= -P$ wird.

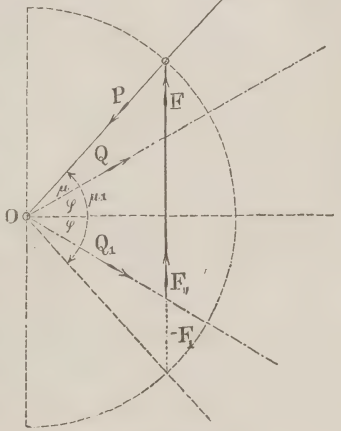


Fig. 212.

Im Erdbau nennt man die Begrenzungsfläche eines Erdkörpers, auf welcher sich ein anderer Erdkörper vermöge der Reibung gerade von selbst hält, auf welcher also $F = 0$ wird und die nach Obigem den Reibungswinkel φ mit der Horizontalen bildet, die natürliche Böschung. μ ist also der Winkel, den die Gleitfläche mit der natürlichen Böschung bildet.

Wird nach dem Schub $F_{\prime\prime}$ des Körpers, d. h. nach der Kraft gefragt, die nothwendig ist, um den Körper auf der Gleitfläche aufwärts zu schieben, so gilt von dieser Alles, was bisher von F gesagt worden ist: nur ist in diesem Falle φ sowohl in Fig. 211

als auch in Fig. 212 in entgegengesetzter Richtung, als bei Bestimmung des Drucks aufzutragen. Denn in diesem Falle wirkt laut Nr. 150 der Widerstand der Gleitfläche in entgegengesetztem Sinne, und es muss demnach auch der Winkel φ in entgegengesetztem Sinne aufgetragen werden.

μ_1 ist dann der Winkel, den die Gleitfläche mit der abfallenden natürlichen Böschung bildet, und F_{11} wird durch die vertical gemessenen und auf diese bezogenen Ordinaten in Fig. 212 dargestellt.

Aus der Gleichheit der Kreissegmente in Fig. 212 über Q und unter Q_1 geht auch noch hervor, dass bei symmetrischer Stellung der Gleitfläche bezüglich der Horizontalen, also bei gleicher Neigung derselben die negativen Werthe des Schubs, also $-F_1$ gleich den positiven Werthen des Druckes $= F$ seien und umgekehrt.

Will man F und F_{11} trigonometrisch ausdrücken, so hat man

$$\frac{F}{P} = \frac{\sin \mu}{\sin (90 - \varphi)},$$

also

$$F = P \frac{\sin \mu}{\cos \varphi} \text{ und } F_{11} = P \frac{\sin \mu_1}{\cos \varphi}.$$

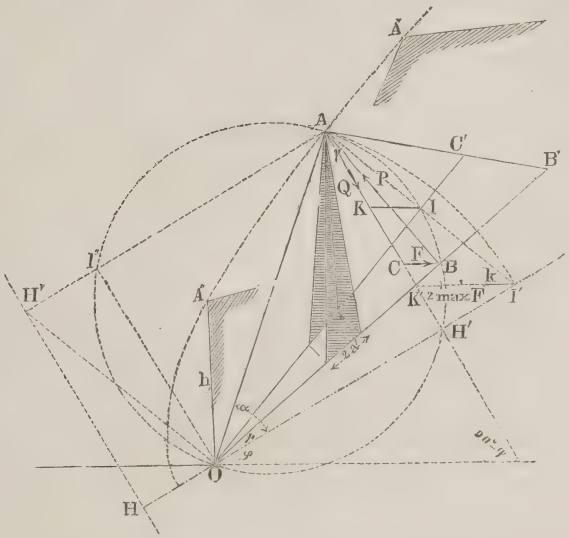
153. Die Gleichgewichtsbedingungen eines nicht gestützten Erdkörpers.

Hier ist nur der Fall in Betracht zu ziehen, in welchem die vordere Begrenzungsfläche steiler als die natürliche Böschung ist, denn ist sie flacher, so ist der Winkel, den die Trennungsfläche eines abrutschenden Prismas mit der Horizontalen bildet, $< \varphi$, und auf derselben kann dann nach S. 553 keine Abrutschung mehr statthaben.

Ferner reduciren sich die am abrutschenden Prisma wirkenden Kräfte auf die Kräfte 1 2 3 4 von Nr. 150, und alle vier Kräfte sind, wenn, wie wir hier voraussetzen, die obere Begrenzungsfläche des Erdkörpers eine Ebene ist, der Länge der Trennungsfläche proportional. Die Gleichgewichtsbedingungen werden daher nicht verändert, wenn diese beliebig verlängert wird; das Gleichgewicht eines solchen Erdkörpers ist daher von der Neigung der obern Begrenzungsfläche ganz unabhängig. Nur darf dieselbe nie steiler als die natürliche Böschung werden, weil sonst dieser

Trennungsfläche Richtungen angewiesen werden könnten, welche die obere Begrenzungsfläche unterhalb O scheiden: also durch das Unendliche durchlaufende Prismen geben würden, was gegen die Voraussetzung ist. Es genügt also, die Gleichgewichtsbedingungen irgend eines Dreiecks zu studiren, das seine Basis in der Trennungsfläche und seine Spitze in der obern Kante A Fig. 213 des abrutschenden Prismas hat. Nimmt man diese Basis constant =

Fig. 213.



$2a$, Nr. 151 S. 551 an, so wird das Gewicht P des fraglichen in Fig. 213 schraffirten Dreiecks jederzeit durch den Perpendikel AB auf die Trennungsfläche, d. h. durch die Höhe des Dreiecks dargestellt, denn der Flächeninhalt des Dreiecks ist dann $= a, . AB$.

Die Cohäsion in der Basis ist $= 2k$ Nr. 151 constant, und muss, welches auch die Richtung der Trennungsfläche sein mag, grösser sein als die Kraft, welche nothwendig ist, um die Dreiecke mit der Basis $2a$, am Abgleiten auf der jeweiligen Trennungsfläche zu verhindern.

Um diese Kraft F für eine beliebige Trennungsfläche OB zu erhalten, hat man nun auf den Perpendikel AB als P ein Dreieck zu construiren, in welchem (vergleiche Nr. 152 Fig. 212 S. 553) ein an P anliegender Winkel $= \mu$ und der P gegenüber liegende Nebenwinkel $= 90 - \varphi$ ist. Hierzu gelangt man einfach, indem

man AH' senkrecht auf die natürliche Böschung OH' und BC horizontal zieht. Denn B und H' liegen auf dem Kreise, der OA zum Durchmesser hat, und es ist dann als Peripheriewinkel $BAH' =$ dem Winkel BOH', den die Trennungsfläche mit der natürlichen Böschung bildet, $= \mu$; und wenn BC horizontal ist, so ist auch der Winkel, den AH' mit der Horizontalen bildet, $= 90 - \varphi$ (siehe die Figur). Es ist also ABC gleich dem Kräftepolygon FQP. Aendert sich die Richtung OB der Trennungsfläche, so bleibt doch der Fusspunkt B des Perpendikels AB immer auf demselben Kreise $AIBH'$, da ferner auch der Perpendikel AH' stets dieselbe Lage behält, so kann man sagen: der Druck F des abrutschenden Prismas $2a, A$ wird durch die horizontal gemessenen und auf den Perpendikel AH' bezogenen Ordinaten des Kreises dargestellt, der AO zum Durchmesser hat.

Das Maximum dieses Druckes IK erhält man natürlich dann, wenn die Trennungsfläche OI durch die Mitte des Bogens $AIBH'$ geht.

Es halbirt also die Gleitfläche OI des grössten Druckes den Winkel AOH', den die vordere Wand mit der natürlichen Böschung bildet.

Da also der $\sphericalangle AOI = \sphericalangle IOI'$ und $AI \perp OI$ ist, so ist auch $AI = II'$, $OA = OI'$ und wenn $I'K' \# IK$ gezogen wird $I'K' = 2 . IK$.

Man gelangt daher direct ohne Verzeichnen des Kreises AIH' zum *max.* $2F$, wenn man $OI' = OA$ macht und $I'K'$ horizontal bis zum Perpendikel OH' auf die natürliche Böschung zieht.

Dreht man die vordere Wand OA, so liegen alle Punkte A, A', A'', welche für Dreiecke mit gleicher Basis $2a$, auch gleichen Maximaldruck geben, auf einer Parabel, deren Brennpunkt im Fuss der Wand liegt und deren Axe die natürliche Böschung ist.

Denn soll das *max.* von F und mit ihm IK constant sein, so muss es auch $I'K'$ und $I'H'$ sein, oder es muss der Leitstrahl OA immer um eine constante Länge $I'H'$ die Abscisse von A übertreffen; was nur bei der auf ihren Brennpunkt als Ursprung und ihre Axe bezogenen Parabel stattfindet. Die Punkte A, A', A'' liegen also auf einer Parabel, deren Brennpunkt O ist und deren Leitlinie HH'' um $OH = I'H'$ von O absteht.

Soll nun das Erdprisma AOC', das den Maximaldruck aus-

übt, nicht abrutschen, so muss dieser kleiner als die Cohäsion sein. Es muss also

$$IK < 2k \text{ oder}$$
$$I'K' < 4k \text{ sein.}$$

Besteht gerade Gleichgewicht zwischen *max.* von F und der Cohäsion, hat man z. B. das Profil AOB' gerade vor dem Einstürzen der Wand AO beobachtet, so ist

$$k = {}^1/_4\, I'K'.$$

Dasselbe Gleichgewicht besteht auch für alle Profile, welche ihre Kante auf der Parabel $A'AA''$ liegen haben.

154. Bestimmung der natürlichen Böschung und des Cohäsionscoefficienten.

Lässt man die Höhe der Wand wachsen, so bewegt sich A gegen A'' in der Parabel fort. Wird die Höhe $= \infty$, so erreicht der Punkt A den ∞ fernen Punkt der Parabel; dieser liegt aber in der Richtung OI' der natürlichen Böschung.

Lässt man die Cohäsion, also auch mit ihr $I'K'$, $I'H'$, d. h. den Parameter der Parabel beständig abnehmen, so nähert sich diese immer mehr und mehr der Axe OI' und fällt mit ihr, d. h. der natürlichen Böschung zusammen, wenn $I'H'$ oder die Cohäsion $= 0$ wird.

Also kann bei unendlich hohen Erdmassen und bei Erdmassen, die keine Cohäsion mehr haben, die vordere Begrenzungsfläche sich nicht über die natürliche Böschung erheben.

Die natürliche Böschung einer Erdgattung kann man also an der Böschung sehr hoher Aufschüttungen, oder an solchen beobachten, die erfolgen, nachdem eben erst die Cohäsion zerstört worden ist; z. B. wenn frisch geförderte Erde mittelst Rollwagen über die Böschung hinabgeschüttet wird, so ist der Böschungswinkel, den diese Erde annimmt, nahezu gleich der natürlichen Böschung.

Ist so die natürliche Böschung gemessen, so kann die Cohäsion dann leicht durch Construction bestimmt werden, wenn man beobachtet, wie hoch die Erdmasse unter einem Winkel angeschnitten werden kann, der erheblich steiler als die natürliche Böschung ist, ohne dass die Erdwand einfalle.

Beispiel. Bei Erdbauten hat man beobachtet, dass sich die frisch geförderte Erde unter einem Winkel von 35 ° ablagere, und dass in der Füllgrube die Arbeiter bei $0^m,5$ Anlauf eine Wand 4 Mtr. hoch angeschnitten haben, ohne dass die Wand einfiel. Wie gross ist die Cohäsion dieser Erde?

In Fig. 214 ist diese Aufgabe gelöst und bedarf nach S. 557 keiner weitern Erläuterung. Man erhält hiernach:

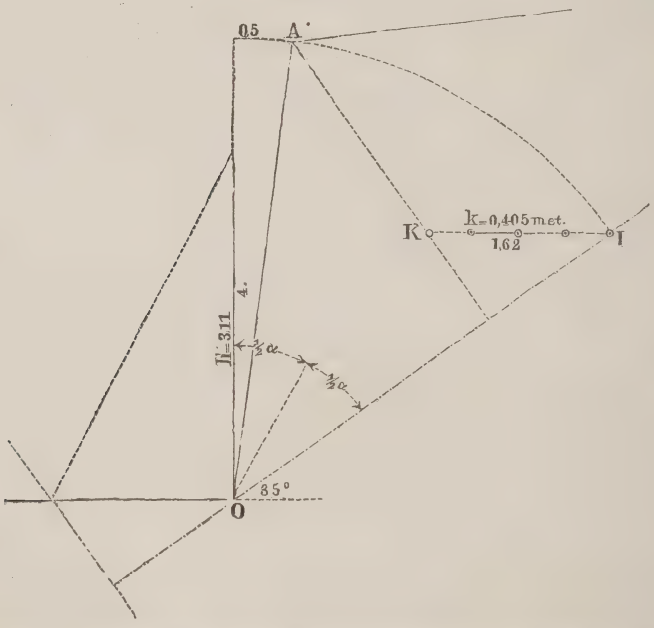
$$IK = 4k = 1^m,62,$$

also

$$k = 0^m,405.$$

Wiegt 1 Cbm. Erde 1500 Kilogr., so beträgt die Cohäsion pro □Meter 608 Kilogr.

Fig. 214.



Manche Schriftsteller haben die Höhe h', auf welche die Erde vertical angeschnitten werden kann, als Maass der Cohäsion eingeführt; diese beträgt laut Construction: $3^m,11$.

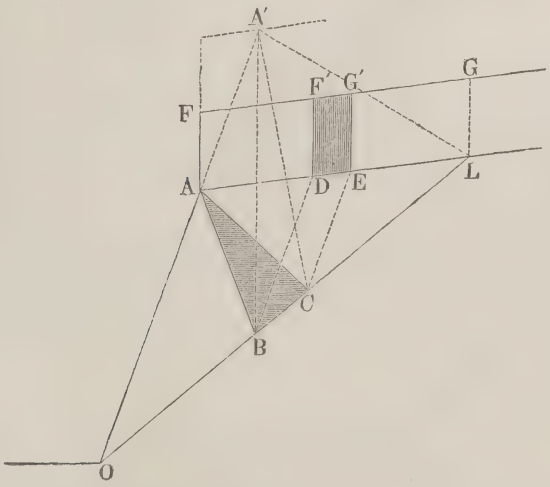
Aus h' kann der Cohäsionswiderstand leichter als aus einem geneigten Abstich berechnet werden. Bei graphischer Behandlung jedoch hat, wie man aus der Lösung sieht, die Verticale h' keinen Vorzug vor jeder andern Richtung OA, durch welche die Höhe des Abstichs gegeben wird.

155. Gleichgewichtsbedingungen eines nicht gestützten und belasteten Erdkörpers.

Unter der Belastung eines Erdkörpers denkt man sich einen verticalen Druck auf die obere Begrenzungsfläche desselben. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Gewichte, z. B. aufgeschichtete Steine, welche denselben erzeugen, ohne allen Zusammenhang untereinander stehen und der Trennung von einander keinen Widerstand entgegen setzen: so dass sich die Trennung des abrutschenden Prismas in jeder Richtung GL (Fig. 115) gleich leicht bilden kann.

Den Druck, den diese Belastung ausübt, stellen wir durch verticale Ordinaten AF, DF', EG', LG' dar, die so lang sind,

Fig. 215.



dass auf eine kurze Strecke DE z. B. der Druck gleich dem Gewicht des Erdkörpers ist, dessen Querschnittsfläche in der Bildfläche das Rechteck $DEG'F'$ über DE ist. Die Linie, welche die Endpunkte dieser Ordinaten verbindet, ist dann im Allgemeinen eine Curve. Der Flächeninhalt zwischen dieser, zwischen AL und zwischen zwei beliebigen Ordinaten ist dem Druck auf AL zwischen diesen Ordinaten proportional, und die Mittellinie dieses Druckes geht durch den Schwerpunkt dieser Fläche.

Hier soll nur der Fall, in welchem die Belastung gleichförmig über AL vertheilt ist, auf den in der vorigen Nummer behandelten Fall zurückgeführt werden.

Die Curve verwandelt sich dann in eine Parallele FG zu AL; man verlängere nun die vordere Wand OA bis zur Parallelen A' zu AL, welche die doppelte Belastung darstellen würde: so hat man statt OA überall nur OA' zu nehmen, um die Gleichgewichtsverhältnisse mit Belastung darzustellen. Denn man kann sich die Belastung eben so gut über OL, als über AL gleichmässig vertheilt denken, dann trifft auf ein beliebiges Stück BC der Trennungsfläche OL das schraffirte Parallelogramm $DEF'G'$. Addirt man nun dieses zu dem dazugehörigen und auch schraffirten Element ABC, so ist die Summe der beiden schraffirten Elemente gleich dem Dreieck $A'BC$. Denn es ist das Dreieck $AA'L$ wegen seiner doppelten Höhe gleich dem die Belastung darstellenden Rechteck $AFGL$, also auch die Flächensumme

$$OAL + AFGL = OA'L.$$

Da nun die Elemente dieser drei Flächen den Strecken BC von OL, über den sie stehen, proportional sind, so muss auch die Summe der schraffirten Elemente der beiden ersten Flächen gleich dem Element $A'BC$ der letzten Fläche sein.

Denkt man sich nun die Basis $BC = 2a_1$, so wird das Gewicht durch die Höhe des Punktes A' über der Gleitfläche OL dargestellt. An der Cohäsion in BC wird auf die Länge $2a_1$ nichts geändert, es wird daher dieser Fall dadurch auf den von Nr. 153 zurückgeführt, dass man die vordere Wand um die doppelte Belastungshöhe erhöht.

Könnte also der vorliegende Erdkörper auf die Höhe OA' angeschnitten werden, ohne einer Stütze zu bedürfen, so dürfte er nur auf die Höhe OA angeschnitten werden, wenn er später mit Gewichten belastet werden sollte, welche durch die Erdhöhe AF dargestellt werden.

Da dieser Fall übrigens nie in der Praxis vorkommt, so wollen wir nicht mehr länger bei demselben verweilen.

156. Formeln für das Gleichgewicht nicht gestützter Erdmassen.

Drückt man obige Beziehungen trigonometrisch aus, so gelangt man gar schnell zu den Resultaten längerer analytischer Ableitungen.

Man hat Fig. 213 S. 555, wenn man den Winkel, den die vordere Begrenzungsfläche mit der natürlichen Böschung bildet, mit α bezeichnet, und bemerkt, dass $\sphericalangle K' I' H' = \varphi$ dem Reibungswinkel ist,

$$I' H' = \overline{A O}\,(1 - \cos\alpha) = I' K' \cos\varphi = 4\,k \cos\varphi.$$

Bezeichnet man nun die Länge $A O$ der vordern Begrenzungsfläche mit x und die Cohäsion, d. h. die Kraft, welche nothwendig ist, um die Trennung pro Flächeneinheit zu bewirken, mit γ, so hat man nach obigem (3) $\varpi, k = \gamma$, mithin

$$x = \frac{4\gamma}{\varpi,} \cdot \frac{\cos\varphi}{1 - \cos\alpha}$$

der Parabelgleichung, wenn x und α als Polarcoordinaten betrachtet werden.

Hat man nicht γ, sondern irgend eine andere Höhe $x_,$ eines sich gerade noch haltenden Anschnittes beobachtet, der den Winkel $\alpha_,$ mit der natürlichen Böschung bildet, und will man diesen in die Gleichung einführen: so erhält man durch Division unmittelbar

$$x = \frac{1 - \cos\alpha_,}{1 - \cos\alpha} \cdot x_, = \frac{\sin^2 {}^1/_2\,\alpha_,}{\sin^2 {}^1/_2\,\alpha}\, x_,.$$

Um die Höhe h, unter welcher das Prisma vertical angeschnitten werden darf, zu erhalten, hat man nur $\varphi = 90 - \alpha_{,,}$ zu setzen, und es wird

$$h_, = \frac{4\gamma}{\varpi,} \operatorname{cotg} \alpha_{,,},$$

wo $\alpha_{,,}$ das Complement des Reibungswinkels ist.

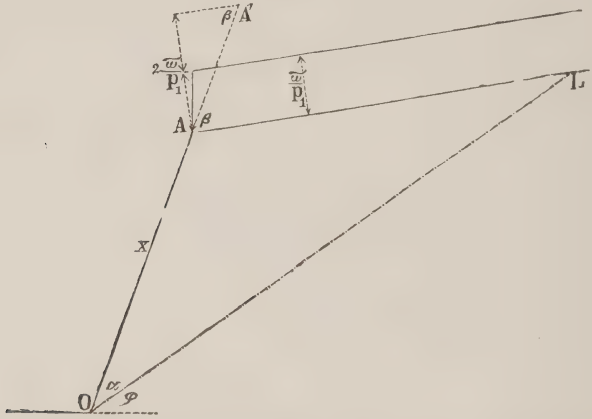
Ist der Erdkörper mit p Gewichtseinheiten pro Längeneinheit von $A L$ (Fig. 216) belastet (in dieser Figur ist statt $\frac{\varpi}{p,}$ zu lesen

$\frac{p_1}{\varpi_1}$), so ist die Dicke der Erdschichte, welche diesen Druck darstellt, senkrecht auf AL gemessen $= \frac{p_1}{\varpi_1}$, daher

$$AA_1 = \frac{2\,p_1}{\varpi_1 \sin\beta},$$

wenn mit β der immer positive Winkel bezeichnet wird, den die obere Begrenzung AL mit der Verlängerung der vorderen Wand bildet.

Fig. 216.



Man hat daher zur Berücksichtigung der Belastung in allen obigen Formeln statt x

$$x + \frac{2\,p_1}{\varpi_1 \sin\beta}$$

zu setzen.

Hiermit glauben wir die Natur von Reibung und Cohäsion hinlänglich erörtert zu haben, und gehen zur Bestimmung des Erddrucks und Schubs über.

Zweites Kapitel.

Erd-Druck und Schub auf stützende Wände.

157. Druck eines Erdkörpers auf eine ihn stützende Wand.

Es sei Taf. 28_1 das Profil des Erdkörpers, dessen Druck auf die vordere Wand wir bestimmen wollen.

Ganz allgemein sei die vordere Begrenzung und die Belastung des Erdkörpers beliebig, nur wollen wir an der Stelle, wo die Trennungsfläche ausmündet, annehmen, die obere Begrenzung sei eine Ebene und die Belastung dem Flächeninhalt ihres Querschnitts proportional. Wir stellen diese auf die in Nr. 155 S. 559 angedeutete Weise dar, und gelangen so zum Profil $OABCDD_1$, wobei die Belastung BCD_1L, innerhalb der Strecke, auf welcher die Trennungslinien $O(LL_mL_1$ etc.) ausmünden können, durch einen Parallelstreifen darzustellen sein muss. Zur Bestimmung des Gewichtes P des abrutschenden Prismas verwandeln wir die vordere Begrenzung des Profils ganz dem Verfahren in Nr. 155 entsprechend, in der Art, dass sämmtliche Flächen vor einer beliebigen Trennungsebene OB gleich einem Dreieck A_1OB sind, dessen Spitze A_1 auf der Parallele zu BL liegt, welche die doppelte Belastung darstellt: dann wird, welches auch die Richtung der Trennungsebene OL sein mag, das Gewicht des abrutschenden Prismas durch den Flächeninhalt des Dreiecks A_1OL dargestellt, dessen Basis diese Trennungslinie, und dessen Spitze unveränderlich A_1 bleibt. Wir werden später das Gewicht P in der natürlichen Böschung OP brauchen; am einfachsten gelangt man dort durch Ziehen von LP parallel zu OA_1, zu Längen OP, welche der Fläche OA_1L proportional sind, denn es ist OP gleich und parallel LH und (Nr. 5 S. 25) $A_1LO = {}^1/_2 A_1M \,.\, HL$. Wir haben also, indem wir das Gewicht P des Prismas A_1OL durch OP darstellen, ${}^1/_2 \,.\, A_1M$ zur Basis der Kräfte gemacht, die wir auch bis zum Schluss dieser Betrachtung beibehalten wollen.

Die Cohäsion K wirkt in der Richtung der jeweiligen Trennungsfläche OL und ist der Länge dieser Trennungsfläche proportional. Mithin werden, wenn man von O aus die Cohäsion in der Trennungsfläche aufträgt, die Endpunkte $K''K'$ dieser Cohäsionskräfte alle auf derselben Parallelen zu BL, liegen. Ist daher dieselbe für eine Richtung der Trennungsfläche bekannt, so kennt man sie auch für alle. Nun wird aber die Kraft, welche nothwendig ist, um die Trennung auf die Länge der Basis $^1/_2 . A, M$ zu bewirken, durch k (Nr. 151 S. 551) dargestellt.

Nimmt man daher das 1 2 3 ... n-fache dieser Basis (hier das 2-fache, die Doppelbasis A, M selbst) in Zirkel und bestimmt man durch Abstechen auf EL, die Lage derjenigen Trennungsfläche OL_m (das Zusammenfallen derselben mit der des Maximaldrucks ist hier reiner Zufall), deren Länge = der 1 2 3 ... n-fachen Basis ist, so braucht man auf derselben nur 1 2 3 ... $n . k$, im vorliegenden Fall $2k = OK_,$, abzustechen, und durch $K_,$ die Parallele $K_, K_{,,}$ zu ziehen, um den Ort aller von O aus in der Richtung der entsprechenden Trennungsflächen aufgetragenen Cohäsionskräfte zu erhalten.

Wir sind jetzt im Stande, das schon in Nr. 150 S. 549 Fig. 206 angedeutete Kräftepolygon wirklich zu zeichnen, es ist auf Taf. 28_2 besonders herausgetragen.

$P =$ OP ist vertical.

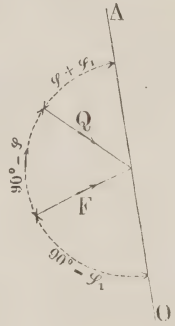
$K =$ OK ist parallel OL.

Die Richtungen der beiden übrigen Kräfte sind auch bekannt; es bildet der mit der Reibung zusammengesetzte Widerstand Q der stehenbleibenden Erde, 3 und 4 von Nr. 150 Fig. 206 den Winkel $90 - \varphi$ mit OL oder K Taf. 28_2, und der Totaldruck F 5 und 6 von Nr. 150, den Winkel $90 - \varphi$, mit dieser Wand OA Taf. 28_1; mithin kann jetzt das Polygon Taf. 28_2 ergänzt und so der unbekannte Druck F bei der Richtung OL Taf. 28_1 der Trennungsfläche bestimmt werden. Die Wand OA muss jedem F, welches auch die Richtung der Trennungsfläche sei, widerstehen können; wir haben daher die Richtung zu bestimmen, welche das *max* von F giebt und dieses F_m ist der gesuchte Druck auf die Stützmauer.

Um diese Richtung leichter construiren zu können, wollen wir das Kräftepolygon Taf. 28_2 mit Taf. 28_1 in Verbindung bringen. Nach Nr. 152 S. 553 ist der Winkel μ, den P und Q Taf. 28_2 miteinander bilden, gleich dem Winkel LOP Taf. 28_1, den die Gleit-

fläche mit der natürlichen Böschung OP bildet. Wir bringen daher die Kräfte P und Q in die Richtung dieser Linien, indem wir das Polygon Taf. 28_2 um den Winkel $90 - \varphi$ in der Richtung des Pfeiles um den Durchschnittspunkt PK, den wir nach O Taf. 28_1 verlegen, drehen; dann fällt P in die Richtung der natürlichen Böschung, wo wir dessen Länge OP schon aufgetragen haben. Die Cohäsion K bildet den Winkel $LOK = 90 - \varphi$ mit der Trennungsfläche OL. Die Länge $K = OK$ ist natürlich $= OK_,$, und der Ort aller K ist wiederum eine gerade Linie KK_m, welche mit $K, K_{,,}$, dem Ort der Endpunkte von K vor der Drehung, also auch mit der obern Begrenzungsfläche ebenfalls den Winkel $90 - \varphi$ bildet. Q geht durch K, die Richtung KF ist parallel zur Trennungsfläche OL und bildet mit OK gleichfalls den Winkel $90 - \varphi$. Die Kraft F bildet Fig. 217 den Winkel $90 - \varphi$, mit der Wand AO nach der Drehung in dem durch den Pfeil angedeuteten Sinne um $90 - \varphi$, aber den Winkel $180 - \varphi, -\varphi$ oder $\varphi + \varphi$, in der Fig. 217 (irrig) durch Q angedeuteten Lage. Legt man daher an AO Taf. 28_1 in der dem Pfeil entgegengesetzten Richtung den Winkel $AOE = \varphi + \varphi$, an, so erhält man die Richtung OE der Kräfte F und man schliesst das Polygon $POKF$, indem man FP parallel zu EO zieht.

Fig. 217.



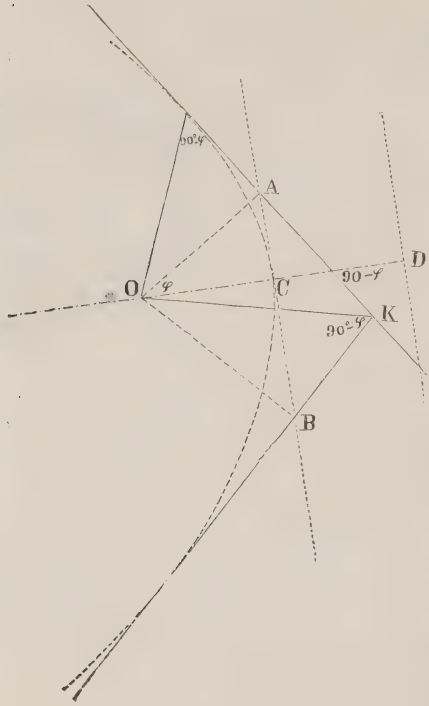
Wir machen hier darauf aufmerksam, dass die Kräfte Q oder KF bei sich verändernder Richtung von OL eine Parabel umhüllen.

Bekanntlich berühren (Fig. 218 S. 566) alle Geraden KB, welche mit den Strahlen, die ihren Durchschnittspunkt K mit einer gegebenen Geraden AK aus einem gegebenen Mittelpunkt O projiciren, einen constanten Winkel, hier $90 - \varphi$, bilden, die nebenverzeichnete Parabel. Der Fuss aller Perpendikel OA, OC, OB auf die verschiedenen Tangenten liegt auf der Scheiteltangente ACB, O ist der Brennpunkt, und die Senkrechte OC auf AB ist die Axe der Parabel, deren Verlängerung CD ebenfalls den Winkel $90 - \varphi$ mit der gegebenen Geraden AK bildet. Macht man endlich $CD = OC$ und zieht man durch D eine Parallele zu AB, so erhält man die Leitlinie.

Im vorliegenden Falle bildet die gegebene Gerade AK oder KK_m Taf. 28_1 den Winkel $90 - \varphi$ mit der obern Begrenzungsfläche, die Axe OC Fig. 218 bildet aber denselben Winkel mit ihr, mithin ist

diese Axe parallel zur obern Begrenzungsfläche des Erdkörpers und somit alle zum Verzeichnen der Parabel nothwendigen Elemente leicht zu construiren. Auf Taf. 28_I ist diese Parabel mit Axe und Leitlinie schwach punktirt.

Fig. 218.



Man erhält also die Kraft $F = FP$ für eine beliebige Trennungsfläche OL dadurch, dass man den Endpunkt L derselben parallel zur Verwandlungslinie $OA_{,,}$ auf die natürliche Böschung nach P projicirt; durch P die Richtungslinie von F parallel zur Linie OE, die den Winkel $\varphi + \varphi_{,}$ mit der vordern Wand bildet, aufträgt; und auf derselben die Länge $F = FP$ durch eine zur Trennungsfläche OL parallele Tangente FK an die Cohäsionsparabel abschneidet.

Wir haben nun das Maximum von $FP = F_m P_m$ bei veränderlicher Trennungsrichtung zu bestimmen. Zu dem Ende trennen wir die Wirkung der Cohäsion von den übrigen Kräften, wir setzen sie $= 0$ und erhalten durch den Schnitt F' der Trennungslinie selbst mit der Richtung der Kraft F den Druck $F'P$ des Erdprismas auf die vordere Wand unter der Voraussetzung, dass keine Cohäsion stattfinden würde, $F'F$ ist dann die Verminderung dieses Druckes durch die Cohäsion; indem wir uns also $F = PF$ aus $PF' - F'F$ zusammengesetzt denken, wollen wir zuerst die Aenderung von PF', dann die von $F'F$ bei sich ändernder Trennungsfläche bestimmen.

Als Schnitte desselben Parallelstrahlenbüschels EY, $A_{,,}$ 0, LP, $L_m P_m$ etc. sind die geraden Gebilde $EA_{,,}LL_mL$, und $YOPP_mL$, projectivisch, mithin ist auch der Strahlenbüschel

O $(E, A_{,,}, F', F'_m, L_,)$ dem Parallelstrahlenbüschel — $YZ, OE, F'P, F'_mP_m, L_,$ projectivisch: also ist die Curve, welche durch den unendlich fernen Punkt YZ, dann durch $OF'F'_mL_,$ oder den Ort aller F' als Schnittpunkte je zweier homologer Strahlen geht, eine Curve zweiter Ordnung. Der Punkt der Curve, welcher durch den unendlich fernen Mittelpunkt des Parallelstrahlenbüschels geht, wird durch YZ; der Punkt derselben, welcher durch O geht, durch den Strahl $OA_{,,}$ projicirt: mithin sind YZ; eine Tangente, Asymptote, an den unendlich fernen Punkt, und $OA_{,,}$ die Verwandlungslinie, eine Tangente an den Punkt O der Curve.

Die Curve ist also eine Hyperbel, von der wir schon einen ∞ fernen Punkt kennen, der andere liegt in der Richtung $EL_{,,}$ denn wenn man zu dieser Linie den parallelen Strahl durch O zieht, so rückt die Linie PF' ins Unendliche: man erhält also die andere Asymptote, indem man das Parallelogramm $OYEX$ ergänzt und durch X eine Parallele zu $EL_,$ zieht. Mittelst dieser Asymptoten könnten wir nun leicht die Hyperbel verzeichnen, allein wir können auch direct den Punkt F'_m construiren, der den Maximaldruck giebt; er ist natürlich einer der Scheitel, der auf dem zur Richtung $OL_,$ conjugirten Durchmesser liegt, welch letzterer durch den Punkt E und die Mitte G von $OL_,$ geht.

Die beiden Scheitel F'_m und F''_m Taf. 28_3, wo die möglichen Constructionen besonders herausgezeichnet wurden, können als die Ordnungspunkte der Involution betrachtet werden, in der die Punkte L, O und die unendlich fernen Punkte der Hyperbel zugeordnete Punkte sind und deren Centrum der ∞ ferne Punkt der Linie L,O ist. Diese Involution wird aus jedem Punkte der Curve durch einen involutorischen Büschel projicirt. Vom Punkt O z. B. durch einen Büschel, der die Linie $E, L,$ in den involutorisch liegenden Punkten L_m, L'_m, $L, A_{,,}$, E ∞ schneidet. Da nun in jedem involutorischen geraden Gebilde das Product der Entfernungen zweier zugeordneten Punkte von dem dem ∞ fernen Punkt zugeordneten Punkt E constant ist, so hat man

$$\overline{EL_m}^2 = \overline{EL'_m}^2 = EL_, \cdot EA_{,,}$$

und bestimmt daher die unbekannten Entfernungen EL_m und EL'_m aus den bekannten $EL_,$ und $EA_{,,}$ als Tangentenlängen an einen Kreis, der durch die Punkte $A_{,,}$ und $L_,$ geht.

Durch Herunterschlagen dieser Tangenten auf die Gerade EL_m erhält man die Lage der Punkte L_m und L'_m, und die sie von O aus projicirenden Strahlen schneiden auf EG die gesuchten Scheitel F'_m und F''_m ab.

Durch Projiciren der Involution aus dem Punkt L_1 auf die Gerade EO gelangt man zur Involution $N \,.\, N' \,.\, IO \,.\, E\infty$ und zur symmetrischen Construction auf EO. Durch Projiciren aus dem ∞ fernen Punkt der durch Y gehenden Asymptote, erhält man auf OL_1 die Involution $F'_1 \,.\, F''_1 \,.\, OL_1 \,.\, Y\infty$ und bestimmt gerade so wie oben die Entfernungen YF'_1 und YF''_1 als mittlere Proportionalen von YO und YL_1, die Punkte F'_1 und F''_1, welche die Parallelen zur Asymptote Y bestimmen, auf denen die Scheitel F'_m und F''_m liegen. Die Parallelen durch diese Punkte zur andern Asymptote erhält man auf die gleiche Weise durch Projection der Involution aus dem in ihr liegenden ∞ fernen Curvenpunkt auf OL_1. Endlich kann man noch die involutorischen geraden Gebilde als ähnliche Gebilde auf andere Linien, z. B. die Asymptoten, projiciren und dort die Bestimmung der mittlern Proportionalen vornehmen.

Auf diese Weise erhält man eine ganze Reihe verschiedener, auf Taf. 28_3 zusammengestellter Constructionen zur Bestimmung der Schnittpunkte, die alle auf die Construction einer mittlern Proportionalen hinauslaufen.

Von allen den auf Taf. 28_3 angedeuteten Constructionen wählen wir die beiden durch $\times\times\times$ bezeichneten aus. Die entsprechende Construction in Taf. 28_1 bedarf jetzt keiner weitern Erklärung mehr; nur wollen wir nebenbei noch bemerken, dass $A_1 I$ und NL zur natürlichen Böschung OL_1 parallel laufen müssen, und dass, weil $A_1 O$ die Hyperbel berührt, IL_1 dieselbe nothwendiger Weise auch berührt und dass diese beiden Tangenten sich auf dem Durchmesser EG schneiden.

Für den Fall, dass die Cohäsion ausser Acht gelassen wird, hätten wir also den Druck auf die Stützmauer durch $P_m F'_m$ dargestellt. Der Druck selbst wäre nach Nr. 151 S. 551:

$$F'_m = {}^1/_2\, \varpi_1 \,.\, \overline{A_1 M} \,.\, F'_m P_m.$$

Wir wollen nun die Verminderung dieses Druckes durch Berücksichtigung der Cohäsion zu bestimmen suchen. Da der Strahlenbüschel $\overline{KF}$, $\overline{K_m F_m}$ der Cohäsionsparabel dem Strahlenbüschel $PF\, P_m F_m$ nicht mehr projectivisch ist, so ist die Curve $F_m F$ keine

Curve zweiter Ordnung mehr, da sie ferner auch keine Gerade ist, so ist sie jedenfalls eine Curve höherer Ordnung, und wir können daher, einen einzigen Fall, auf den wir zurückkommen werden, ausgenommen, das *max.* ihrer Ordinate nicht mehr so construiren wie das der Curve ohne Cohäsion, wir können uns daher nur approximativ von der Wirkung der Cohäsion Rechenschaft ablegen.

Da $OF_,$ parallel KF und $F'F$ parallel EO ist, so ist die Verminderung $F'F$ auch gleich dem Segment, das die Strahlen FK und F_mK_m auf OE abschneiden; nun berühren aber diese Strahlen die Cohäsionsparabel, mithin kann $F'F$ nie kleiner werden als die Länge des verlängerten Leitstrahls EO. Die Richtung der Trennungsfläche für diese Minimalverminderung durch die Cohäsion wird durch die der Tangente am Ende desselben Leitstrahls gegeben. Da nun in jedem Kegelschnitt eine Tangente den Winkel der beiden Leitstrahlen ihres Berührungspunktes halbirt und in der Parabel ein Leitstrahl immer parallel zur Axe läuft, so wird diese Trennungsfläche den Winkel EOS halbiren.

Wir kennen also die Richtung der Trennungsfläche des Erdprismas, bei dem der Erddruck am wenigsten durch die Cohäsion gemindert wird; trifft diese mit der Richtung OL_m, welche den *max* Druck ohne Berücksichtigung der Cohäsion giebt, zusammen, so ist das erhaltene P_mF_m offenbar der Maximaldruck. OL_m halbirt nun, wie wir später (Nr. 160[d]) sehen werden, den Winkel EOS nur dann, wenn $\measuredangle A_,OE = A_,L_,O$ ist: dies ist der Fall, von dem wir oben gesprochen haben, und es ist nachzuweisen, dass in allen Fällen, in denen die analytische Bestimmung des Erddrucks mit Berücksichtigung der Cohäsion gelungen ist, diese Winkelgleichheit stattfand.

Im Allgemeinen findet dies jedoch nicht statt; man könnte dann dadurch ein P_mF_m erhalten, das sicher grösser als das *max* wäre, dass man die Minderung durch Cohäsion für die Trennungsfläche bestimmte, welche den Winkel EOS halbirt und diese Minimalminderung von $P_mF'_m$ abzöge.

Berücksichtigt man jedoch, dass die Aenderungen dieser Verminderung durch die Cohäsion den Segmenten der entsprechenden Leitstrahlen auf der Linie EO gleich sind und dass diese Segmente viel kleiner sind im Verhältniss zu den Ordinatenänderungen $F'_mP_m - F'P$ als in der vorliegenden Figur, wo die Cohäsion der Deutlichkeit wegen unverhältnissmässig gross angenommen wurde:

so wird man zur Ueberzeugung kommen, dass die Trennungslinie OL_m sich gar nicht weit gegen die den Winkel EOS halbirende Linie zu bewegen braucht, damit die Aenderung der Ordinaten $P_m F'_m$ der Aenderung der Cohäsionsminderung gleich sei. Da aber der Punkt, in welchem dies stattfindet, das absolute *max* des Erddrucks giebt, so folgt, dass dieses *max.* nicht weit von F_m liegen und dass in weitaus den meisten Fällen $P_m F_m$ für dieses *max.* genommen werden kann, weil Ordinaten in der Nähe des Maximums überhaupt ziemlich constant sind. In der That kann auch in Taf. 28_1 kein Unterschied zwischen $P_m F_m$ und dem *max* bemerkt werden, das bei dem kleinen Querstrich zwischen F_m und F sich befinden mag. Man begeht daher einen immer zu vernachlässigenden Fehler, wenn man OL_m als diejenige Trennungslinie annimmt, die den eigentlichen Erddruck giebt.

Da in Taf. 28_1 viele Linien gezogen wurden, die wohl zur Ableitung, nicht aber zur Construction des Erddrucks nothwendig sind, so wollen wir kurz diese letztern Linien in der Reihenfolge der Construction hervorheben und die Regel zur Construction des Erddrucks wie folgt zusammenfassen:

1) Durch das untere Ende O der Wand, für welche man den Erddruck bestimmen will, ziehe man die aufsteigende natürliche Böschung OL_1.

2) Man trage von AO aus nach aussen den Winkel $AOE = \varphi + \varphi_1$ auf.

3) Man verbinde E mit der Mitte G von OL_1.

Obige drei Richtungen sind constant, welches auch die Lage des Punktes O auf der vordern Wand sei, solange die Trennungsfläche OL_m auf derselben Linie BL_1 mündet; man wird sie daher immer für den jeweilen tiefsten Punkt der Mauer construiren, um bei der Construction des Erddrucks für die höher gelegenen Punkte sicher anlegen zu können. Die Lage der folgenden Linien ändert sich nun mit der des Punktes O.

4) Man ziehe die Verwandlungslinie OA_1 derart bis zur Linie, welche die doppelte Belastung darstellt, dass für jede Trennungslinie der Flächeninhalt $OABCD_m L_m = OA_1 L_m$ sei.

5) Man bestimme die mittlere Proportionale EL_m zwischen EL_1 und EA_{11}.

6) Man ziehe durch den Schnitt von OL_m mit EG die Linie

$F'_m P_m$ parallel zu EO, so stellt diese Linie den Erddruck ohne Berücksichtigung der Cohäsion dar.

Will man die Cohäsion berücksichtigen, so:

7) Trage man auf einem Strahl, dessen Länge zwischen O und der Linie EL, $= n \cdot {}^1/_2 A_1 M$ ist, die Länge nk auf, ziehe durch diesen Punkt $K' K''$ parallel EL, und drehe diese Linie um $90 - \varphi$ in die Lage KK_m.

Da die Cohäsion der Höhe der Linie EL, über O proportional wächst, so braucht diese Operation auch nur einmal ausgeführt zu werden, wenn man bemerkt, dass der Ort des Schnittes aller KK_m bei wechselndem O mit irgend einer Reihe von Parallelen OL, z. B. eine gerade Linie ist, die durch den Schnitt von OA mit EL, geht.

8) Ziehe man OK_m, sodass der Winkel $L_m O K_m = 90^0 - \varphi$ ist, und ziehe durch den Schnittpunkt K_m von OK_m mit KK_m die Linie $K_m F_m$ parallel zu OL_m, so erhält man den Druck $P_m F_m$ mit Berücksichtigung der Cohäsion.

9) Zum Schluss ist noch $F_m P_m$ auf die Basis a_1 zu reduciren, indem man F durch $\frac{A_1 M \cdot P_m F_m}{2\, a_1}$ darstellt.

158. Schub eines Erdkörpers.

Nach dem in Nr. 150 Auseinandergesetzten unterscheidet sich das Kräftepolygon, das zur Bestimmung des Erdschubs, d. h. des Widerstandes, den ein Erdkörper einem auf ihn ausgeübten Schub entgegenzusetzen vermag, dient, von dem Kräftepolygon, das zur Bestimmung des Erddrucks dient, nur dadurch (vgl. Fig. 206 und 208), dass die Reibungs- und Cohäsionswiderstände, d. h. die Kräfte 2, 4 und 6 Nr. 150 entgegengesetzte Richtungen haben. Es bilden daher die Kräfte FQ der Nr. 157 immer noch die Winkel φ_1 und φ mit der Normalen auf die vordere Wand, doch sind dieselben in entgegengesetzter Richtung aufzutragen. Wir gelangen daher zum Erdschub, indem wir ganz auf dieselbe Weise wie dort vorgehen, jedoch immer statt $+\varphi$, $+\varphi_1$, und $+K$: $-\varphi$, $-\varphi_1$, und $-K$ setzend. Alles in Nr. 157 über Erddruck Gesagte ist dann so identisch mit dem, was wir hier über Erdschub zu sagen hätten,

dass wir uns füglich der Repetition entheben und uns damit begnügen können, auf die Analogie aufmerksam zu machen.

In den Figuren Taf. $28_{1\,2}$ und Taf. $29_{1\,2}$ sind die entsprechenden Linien und Punkte mit den gleichen Buchstaben bezeichnet, sodass einfach Taf. 29 den Erläuterungen von Nr. 157 untergeschoben werden kann.

Die Verwandlung des Profils OAB in OA,B ist in beiden Fällen identisch.

Für eine beliebige Trennungsfläche OL wird die Länge $A_{,,}L$ parallel zur Verwandlungslinie $OA_{,,}$ auf die abfallende, statt auf die aufsteigende natürliche Böschung projicirt, und das Gewicht des abrutschenden Prismas ist gleich dem Gewicht des Erdkörpers, dessen Querschnittsfläche $= {}^1/_2 A,M.OP$ wäre und wird durch OP dargestellt.

Die Cohäsion wirkt jetzt in entgegengesetzter Richtung gegen OK, in der Trennungsfläche OL.

Die Kraft Q bildet mit ihr den Winkel $90 + \varphi$ und die Kraft F den Winkel $90 + \varphi$, mit der vordern Wand.

Das Kräftepolygon ist Taf. 29_2 besonders im halben Maassstab herausgetragen worden. Um es in Verbindung mit der Taf. 29_1 zu bringen, wird es um den Winkel $90 + \varphi$ gedreht.

$P = \overline{OP}$ fällt dann mit der abfallenden natürlichen Böschung zusammen

$K = OK$ bildet den Winkel $90 + \varphi$ mit der Trennungsfläche.

$Q = KF$ läuft mit der Trennungsfläche parallel und berührt die punktirte Cohäsionsparabel.

Fig. 219.

$F = PF'$ bildet nach der Drehung den Winkel $90 + \varphi + 90 + \varphi_{,} = 180 + \varphi + \varphi_{,}$, statt $180 - \varphi - \varphi_{,}$ mit der vordern Wand (vergl. Fig. 219 mit Fig. 217 S. 565) und läuft daher mit OE parallel, das den Winkel $\varphi + \varphi_{,}$ nach innen statt nach aussen mit der vordern Wand bildet.

Lässt man die Cohäsion ausser Acht, so erhält man den Widerstand gegen Schub durch den Schnitt PF' mit der Trennungsfläche selbst. Dieser Widerstand wird also durch Berücksichtigung der Cohäsion um FF' vergrössert.

Der Ort aller F' ist wiederum eine Hyperbel. Die Asymptoten derselben laufen wieder parallel zur obern Begrenzungsfläche des Erdkörpers und zur Richtungslinie OE der F. Man erhält Punkte derselben, indem man E parallel zu $OA_{,,}$ und $OL_{,}$, auf $OL_{,}$ und $OA_{,,}$ nach Y und X projicirt; ferner berührt die Hyperbel im Punkt O die Linie $OA_{,,}$ und geht noch durch den Punkt $L_{,}$.

Aus der Lage dieser Hyperbel und ihren Asymptoten geht übrigens noch hervor, dass für eine Trennungslinie in der Richtung OE und in der Richtung OS, d. h. parallel zur obern Begrenzung der Schub ∞ gross wird, im ersten Falle bildet die Kraft F nur mehr den Winkel φ mit der Normalen zur Gleitfläche, und in dieser Richtung kann diese jedem Schub widerstehen; im letztern Falle ist das abzuschiebende Erdprisma ∞ gross. Alle andern Richtungen ausserhalb dieser Grenzen fallen ausser Betracht.

Der grösste Schub auf den Erdkörper darf nicht grösser sein als das kleinste $F'_m P_m$, das man bei sich ändernder Trennungsfläche OL erhält. F'_m liegt also auf der $OL_{,}$ parallelen Tangente an die Hyperbel oder auf dem zur Richtung $OL_{,}$ conjugirten Durchmesser, der durch die Mitte von $OL_{,}$ und E geht. Man erhält die entsprechende Trennungslinie OL_m, indem man (vergl. Taf. 28_3) EL_m zur mittlern Proportionalen zwischen $EL_{,}$ und $EA_{,,}$ macht. Auch kann man noch F'_m dadurch bestimmen, dass man EN zur mittlern Proportionalen zwischen EI und EO macht und $L_{,}NF'_m$ zieht. Auf diese Weise erhält man den Erdschub $F'_m P_m$ ohne Berücksichtigung der Cohäsion.

Zur Berücksichtigung der Cohäsion construire man die Linie KK_m wie in Nr. 157; sie bildet den Winkel $90 + \varphi$ mit L,E, mache $K''OK_m = 90 + \varphi$ und ziehe durch K_m die Linie $K_m F_m$ parallel zur Trennungsfläche OL_m, so erhält man durch den Schnitt mit $P_m F_m$ den wirklichen Erdschub $P_m F_m$ mit Berücksichtigung der Cohäsion, wobei auch hier wie in Nr. 157 S. 570 angenommen werden darf, dass das *min* der Curve FF_m sehr nahe bei dem *min* der Curve $F'F'_m$ liege.

Schliesslich ist noch der Erdschub $F_m P_m$ auf die Basis $a_{,}$ zu reduciren, indem man F durch $\frac{F_m P_m \,.\, A_{,} M}{2\, a_{,}}$ darstellt.

159. Verwandtschaft des Erddrucks und Schubs complementärer Erdkörper.

Vergleicht man den Inhalt des Dreiecks OL,E und die um das letztere sich gruppirenden Figuren von Taf. 29_1 mit dem Inhalt desselben Dreiecks auf Taf. 28_1, die Lage der punktirten Hyperbel von Taf. 29_1 mit der ausgezogenen von Taf. 28_1: so wird man finden, dass diese Figuren ganz identisch sind und dass man ebenfalls zur Hyperbel von Taf. 29_1 gelangen würde, wenn man den Erddruck für das Profil $OABCC_{,,}L$, bestimmen wollte, das wir das complementäre Profil des Erdkörpers $OABCD$, nennen wollen.

Die Linie OL, ist die aufsteigende natürliche Böschung des complementären Profils, OE bildet den Winkel $\varphi + \varphi$, nach aussen und die Verwandlungslinie beider Profile, vorausgesetzt, dass ein solches Ueberhängen der Masse über ABC möglich sei, fällt zusammen. Mithin fällt auch die die Asymptote bestimmende Projection Y des Punktes E zusammen, und da ausserdem noch die Hyperbeln durch dieselben Punkte O und L, gehen, so sind sie identisch. Ebenso findet man auch, dass beide Profile zu einer und derselben Cohäsionsparabel Veranlassung geben, wobei noch die Lage der Kraft Q im gedrehten Kräftepolygon immer dieselbe bezüglich der gewählten Trennungsfläche ist. Wenn diese senkrecht auf der obern Begrenzung des Erdkörpers steht, so berührt sie im Scheitel, dann berührt sie die untere Hälfte der Parabel bei Bestimmung des Erddrucks, die obere Hälfte bei Bestimmung des Erdschubs u. s. f. Wir brauchen die Analogien nicht weiter zu verfolgen und können, da bei der Wahl des Profils nichts besonders Beschränkendes angenommen wurde, ganz allgemein sagen:

Wenn man einen durch eine Ebene begrenzten und gleichförmig belasteten Erdkörper durch ein beliebiges Profil theilt und die zwei entstehenden Erdkörper complementär nennt, so wird für gleich hoch liegende Punkte, bei sich drehender Trennungsfläche, der Erddruck des einen und der Erdschub des complementären Körpers durch dieselben Curven, d. h. durch dasselbe Gesetz, ausgedrückt.

Der innere Grund hiervon ist, abgesehen von dem Beweis durch Identität der Figuren, leicht einzusehen.

Denkt man sich in Fig. 221, wo die Richtung der Kräfte bei Erdschub dargestellt ist, die Trennungsfläche in das Leere nach OL hinausgedreht, so wird bei Festhalten aller aufgestellten Gesetze das Gewicht des Erdprismas P negativ geworden sein, als die Trennungslinie die Verwandlungslinie überschritt; man hat sich daher das Gewicht des Erdprismas $AOL = P$ vertical aufwärts wirkend zu denken, während F seine Richtung beibehalten hat und Q und K die angedeuteten Richtungen angenommen haben.

Fig. 220.

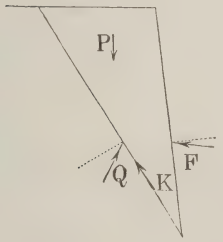
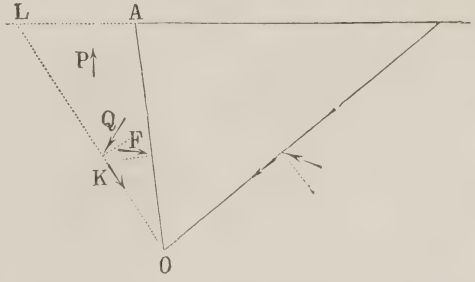


Fig. 221.



Nun wird aber am Gleichgewicht nichts geändert, wenn man alle Kräfte mit gleicher Richtung und Intensität in entgegengesetzter Richtung wirken lässt, man braucht ja nur die Pfeile des Kräftepolygons umzusetzen. Das gleiche Gesetz also, welches das Gleichgewicht von Fig. 221 darstellt, stellt auch das von Fig. 220 dar, wo die Richtungen der Kräfte dieselben als bei Bestimmung des Erddrucks für den complementären Erdkörper von Fig. 221 sind.

Dieser Satz kann von Nutzen sein, wenn es sich darum handelt, bei mangelndem Platz, wenn der entfernte Arm $F'F'_m$ der Hyperbel nicht construirt werden kann, die Constructionen auf das Blatt zu beschränken. Man kann sich dann damit begnügen (Taf. 29_1), den Erddruck $F''_m P''_m$ für das complementäre Erdprisma zu construiren und diesen von $2 \cdot UY$ abzuziehen, wo U der Schnitt der beiden Asymptoten ist. Hierzu hat man dann noch bei Berücksichtigung der Cohäsion das Stück zu addiren, das die Cohäsionsparabel auf OE abschneidet, um den Totalwiderstand oder den Erdschub zu erhalten.

160. Formeln für den Erddruck bei Annahmen, welche die Construction vereinfachen.

Wir beabsichtigen hier nur diejenigen Formeln aus unserer Construction herauszulesen, die wirklich schon entwickelt worden sind, ohne neue Formeln aufstellen zu wollen. Wir bemerken daher im Voraus, dass die Cohäsion nur dann berücksichtigt worden ist, wenn die Annahmen das Zusammenfallen des Minimums der Minderung durch die Cohäsion mit dem Maximum des Erddrucks ohne Cohäsion bedingte. Sie kann daher bei einem überhöhten Erdkörper nie berücksichtigt werden, dagegen wohl bei belasteten Erdkörpern, wenn die Annahmen der eben ausgesprochenen Bedingung entsprechen.

a) Druck und Schub eines überhöhten und belasteten Erdkörpers ohne Berücksichtigung der Cohäsion.

Es handelt sich hier darum, $F'_m P_m$ von Taf. 28_1 und 29_1 auszudrücken; es geschieht gewöhnlich durch die Länge $O\,N$. Es ist nämlich in beiden Figuren:

$$\frac{F'_m P_m}{O\,N} = \frac{L_1 P_m}{L_1 O} = \frac{L_1 L_m}{L_1 A_{11}} = \frac{O\,N}{O\,I};$$

man hat also

$$F'_m P_m = \frac{\overline{O\,N}^2}{O\,I},$$

und den Erddruck oder Schub für eine 1 Mtr. lange Mauer

$$F = {}^1/_2\, \varpi_1 \cdot \frac{A_1 M}{O\,I} \cdot \overline{O\,N}^2,$$

weil ${}^1/_2 A_1 M$ die Basis der Figur ist.

Nun ist Fig. 222 und 223:

$$\frac{A_1 M}{D\,O} = \frac{A_{11} M_1}{C\,O} = \frac{O\,I \sin E\,O\,L}{C\,O},$$

also auch wenn der Winkel $E\,O\,L$ mit τ bezeichnet wird:

$$F = {}^1/_2 \varpi_1 \sin\tau \cdot \frac{O\,D}{O\,C} \cdot \overline{O\,N}^2,$$

wo τ der Winkel ist, den der mit der Reibung zusammengesetzte Erddruck mit der Verticalen bildet.

Bezeichnet man nun noch mit

x die Höhe der Wand OC,

$2h$ die doppelte Belastungshöhe CD, und mit

l die construirte Länge ON,

so wird

$$F = {}^1/_2 \varpi_1 \, . \, \sin\tau \, . \, l^2 \, . \left(\frac{x + 2h}{x} \right).$$

Fig. 222.

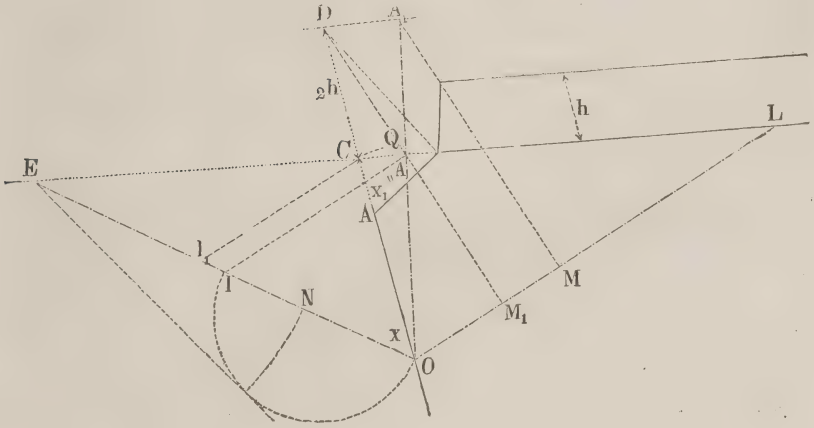
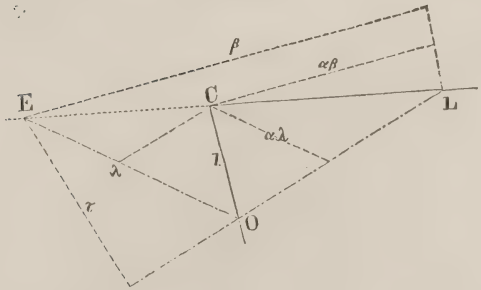


Fig. 223.



Wird noch die Belastung ausser Acht gelassen, so wird das Verhältniss

$$\frac{OD}{OC} = \frac{x + 2h}{x} = 1,$$

und man hat einfach die Formel:

$$F = {}^1/_2\, \varpi,\, \sin\tau \,.\, l^2.$$

Dies ist die Formel, unter der Poncelet den Erddruck und Schub giebt; sie beruht auf der graphischen Bestimmung von l oder ON und auf einer halb analytischen, halb geometrischen Ableitung.

Wir wollen nun F mit Ueberhöhung und Belastung in Function der Höhe CO (Fig. 222), die wir mit x bezeichnen wollen, auszudrücken suchen, um diese später variiren zu können. Ferner nehmen wir an, es sei das Profil in der Art verwandelt worden, dass die vordere Begrenzung des Erdkörpers über A und bis zur Belastung parallel zur natürlichen Böschung OL laufe, und bezeichnen mit:

x_1 die Länge CA der vordern Wandkante A zwischen EL und der vordern Kante des Profils,

x die Länge der ganzen vordern Wand CO,

h die Belastungshöhe parallel zur vordern Wand gemessen, also mit

$2h$ die Länge CD,

α das Verhältniss der Längen $\dfrac{CL}{EL}$,

$\beta\lambda\tau$ die durch die verschiedenen vorkommenden Richtungen bedingten, auch bei veränderlichem x, ebenso α constanten Verhältnisse, der in Fig. 223 angedeuteten Längen zur vordern Wand, die in dieser Figur natürlich $= 1$ ist.

Suchen wir nun in der Formel

$$F = {}^1/_2\, \varpi_1 \,.\, \frac{A_1 M}{OI} \,.\, \overline{ON}^2$$

zuerst das Verhältniss $\dfrac{A_1 M}{OI}$ auszudrücken, so hat man (Fig. 222 und 223):

$$\frac{A_1 M}{A_{11} M_1} = \frac{OD}{OC} = \frac{x + 2h}{x} \text{ und}$$

$$\frac{A_{11} M_1}{IO} = \frac{\tau}{\lambda}, \text{ mithin}$$

$$\frac{A_1 M}{OI} = \frac{\tau}{\lambda} \cdot \frac{x + 2h}{x}.$$

Um ON auszudrücken, hat man:

$$ON = OE - \sqrt{OE \,.\, IE},$$

und es ist

$$OE = \lambda x, \quad EI, = (\lambda - \alpha\lambda)\, x.$$

Die nun noch zu bestimmende Länge I, I ist Function der Verwandlungslinie.

Der Punkt $A_{,,}$ wird durch die Bedingung bestimmt, dass $\triangle OAB = \triangle OA, B$ sei (wir bitten das Fig. 222 fehlende B an die vordere Kante der Belastung in der Linie EL setzen zu wollen), oder wenn man die Fläche ODA, B auf zweierlei Weise durch die folgenden sechs Dreiecke ausdrückt und die gleichen Dreiecke streicht:

$$ODA_{,,} + DA_{,,}A, + OA, B = ADB + A, DB + OAB$$
$$ODA_{,,} = ADB.$$

Nun ist zur Bestimmung von ADB, $AD = x, + 2h$ und die Höhe wegen der Aehnlichkeit zwischen dem Dreieckchen über CB und dem Dreieck über CL (Fig. 223) gleich $\alpha\beta x,,$ mithin, da auch noch $OD = x + 2h$ ist:

$$^1/_2\,(x + 2h)\,.\,\overline{CQ} = {}^1/_2\,(x, + 2h)\,x, \alpha\beta;$$

zwischen CQ und der zu bestimmenden Länge I, I besteht wegen Aehnlichkeit des Gebildes über CA Fig. 222 mit Fig. 223 das Verhältniss:

$$\frac{I, I}{CQ} = \frac{\lambda}{\beta}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt nun direct:

$$I, I = \frac{x, (x, + 2h)\,\alpha\lambda}{x + 2h}.$$

Substituirt man jetzt diese Werthe in den Ausdruck von F, wobei zu bemerken ist, dass $EI = EI, + II,$ ist, so erhält man:

$$F = {}^1/_2\,\varpi, \,.\, \frac{\tau}{\lambda}\,\frac{x + 2h}{x}.$$
$$\left[\lambda x - \sqrt{\lambda x\left((\lambda - \alpha\lambda)\,x + \frac{x, (x, + 2h)\,\alpha\lambda}{x + 2h}\right)}\right]^2,$$

oder

$$F = {}^1/_2\,\varpi, \lambda\tau\,.$$
$$\left[\sqrt{x\,(x + 2h)} - \sqrt{(1 - \alpha)\,x\,(x + 2h) + \alpha x, (x, + 2h)}\right]^2.$$

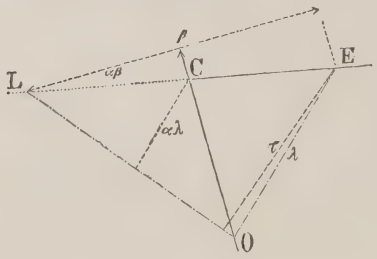
Dies ist der vollständigste Ausdruck für den Druck eines überhöhten und belasteten Erdkörpers ohne Berücksichtigung der Cohäsion. Er entspricht ganz den Formeln des Herrn Guilhem, ingen. chef. siehe Ann. des ponts et chaussées 1858.

Ganz analog kann man bei Bestimmung des Erdschubs verfahren; nur hat dann die Verwandlung des Dreiecks ABD (Fig. 222) in der Art, dass AB zur abfallenden natürlichen Böschung parallel laufe, keinen Sinn mehr, man kann höchstens so verwandeln, dass AB mit OE (Taf. 29_1) parallel laufe; dann erhält man den Erdschub:

$$F = {}^1/_2\, \varpi, \lambda\, \tau\,.$$
$$\left[\sqrt{x\,(x+2h)} + \sqrt{(1-\alpha)\,\left(x(x+2h) - x,\,(x,+2h)\right)}\right]^2,$$

wobei λ τ die Fig. 224 angedeuteten Verhältnisse bezeichnen und α wieder $= \dfrac{CL}{EL}$ ist.

Fig. 224.



b) Druck oder Schub eines überhöhten aber unbelasteten Erdkörpers, dessen obere Begrenzung den Winkel $\varphi + \varphi_1$ mit der auf- oder abfallenden natürlichen Böschung bildet, ohne Berücksichtigung der Cohäsion.

Unter diesen Voraussetzungen vereinfacht sich die Construction der Länge ON. Ist nämlich Fig. 225 $\measuredangle ELO = AOE = \varphi + \varphi_1$, so sind auch die mit denselben Buchstaben bezeichneten Dreiecke einander ähnlich, und wenn ausserdem noch die Aehnlichkeit der Dreiecke $ENL_m \sim EOL$ berücksichtigt wird, so hat man die Proportionen:

$$\frac{EN}{EL_m} = \frac{EO}{EL} = \frac{AE}{EO} = \sqrt{\frac{EO\,.\,AE}{EL\,.\,EO}} = \sqrt{\frac{AE}{EL}}.$$

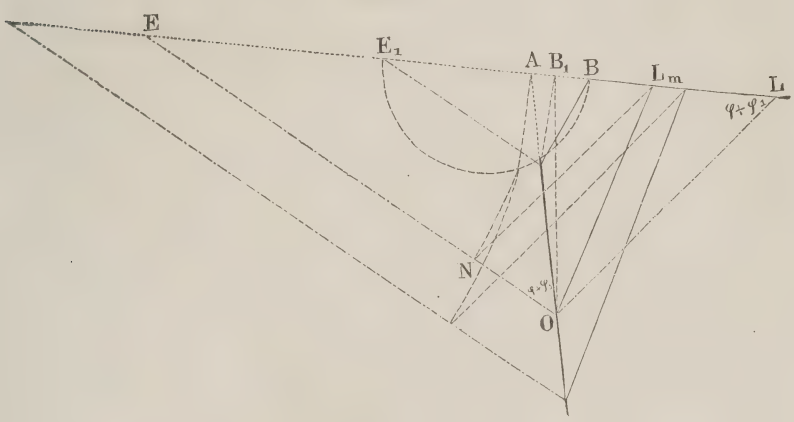
Es ist aber von Constructionswegen:

$$EL_m = \sqrt{EL \,.\, EB_1},$$

also auch

$$\overline{EN}^2 = EA \,.\, EB_1 = \overline{EA}^2 + EA \,.\, AB_1.$$

Fig. 225.



Nun bleibt bei wechselnder Höhe AO das Product $EA \,.\, AB_1$ constant, denn es ist EA dieser Höhe AO, mithin dieses Product auch dem Flächeninhalt OAB_1 proportional; da aber dieser bei jeder Lage von O dem leeren Dreieck vor der Ueberhöhung gleich und daher constant bleibt, so bleibt auch $EA \,.\, AB_1$ constant. Es genügt also für irgend einen Punkt, z. B. für die obere Kante

$$\sqrt{E_1A \,.\, AB}$$

als Ordinate des Halbkreises über E_1B in A zu construiren, um für jede beliebige Lage des Punktes O die Entfernung ihres Endpunktes von E als

$$EN = \sqrt{\overline{EA}^2 + EA \,.\, AB_1}$$

herabschlagen zu können.

In der allgemeinen Formel ist für diesen Fall $h = o$ zu setzen, sonst aber vereinfacht sie sich nicht, weil die angedeuteten Beziehungen nur auf die Verhältnisse $\alpha\,\lambda\,\tau$ Einfluss haben.

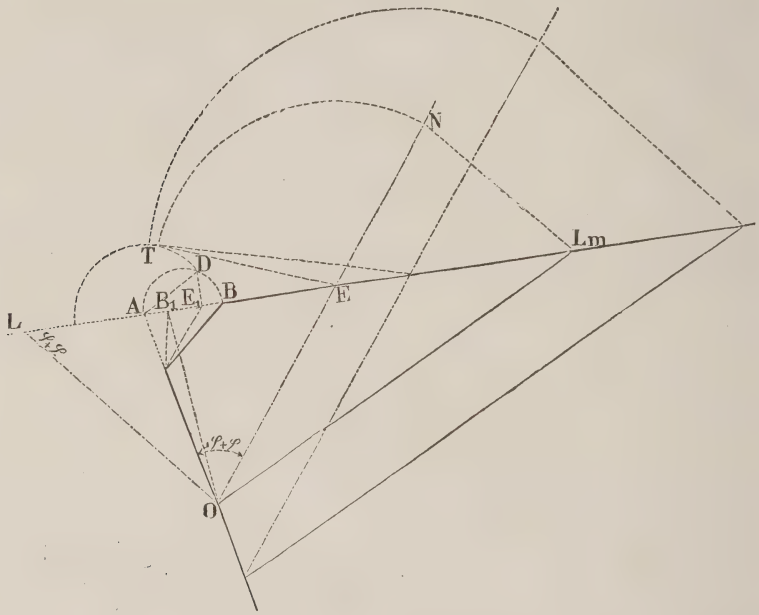
Für Erdschub kann man den ganzen obigen Beweis auch auf Fig. 226 anwenden bis zum Ausdruck von

$$\overline{EN}^2 = EA \,.\, EB_1;$$

dann aber ist $EA_1 . EB_1 = \overline{EA}^2 - EA . AB_1$; $EA . AB_1$ bleibt auch wieder constant.

Es genügt also auch hier wieder, für irgend einen Punkt, z. B. für die vordere Kante C, $\sqrt{EA_1 . AB_1}$ als Sehne AD über

Fig. 226.



der Projection AE, zu construiren, mit AD als Radius einen Kreis zu beschreiben, um für irgend eine Lage des Punktes O, die Tangente

$$ET = EN = \sqrt{\overline{EA}^2 - \overline{AT}^2}$$

herumschlagen zu können.

c) Druck und Schub eines belasteten aber nicht überhöhten Erdkörpers mit Berücksichtigung der Cohäsion.

In diesem Fall sind alle Constructionen, welche zur Bestimmung des Erddrucks ohne Berücksichtigung der Cohäsion gehören, weil alle Verwandlungslinien $OA_{,,}$ (Taf. 28_1 und 29_1) zusammenfallen, ähnliche Figuren. Bei sich ändernder Lage des Höhenpunktes O braucht die Construction also nur einmal ausgeführt

und dann jedesmal das F_m, das sich aus dem Schnitt mit der Gleitfläche ergiebt, dieser Höhe proportional angenommen zu werden. Diese Constructionen sind für Erddruck (Taf. 30_1) für einen beliebigen Punkt $O_,$, für Erdschub dagegen (Taf. 30_2) für den Punkt O der vordern Wand ausgeführt, für welchen die Höhe des Punktes A über der natürlichen Böschung gleich der Doppelbasis $2a$, der Figur ist. Die Construction F_m bedarf nach Obigem keiner weitern Erklärung mehr.

Man trage nun in Richtung und Grösse $O,E,$ resp. OF in den beiden Figuren am Fuss der Wand auf, so ist bei Nichtberücksichtigung der Cohäsion $AE,$ resp. AF der Ort der Endpunkte von allen F_m. Also für die Höhe $O,,$ ist $F_m = O,,E,,$.

Diese Längen F_m sind noch mit der halben Höhe des Punktes A bei unbelasteten und des Punktes $A,$ bei belasteten Erdkörpern über der natürlichen Böschung zu multipliciren, um den Erddruck zu erhalten; er ist also gleich dem Flächeninhalte der Dreiecke, welche die in Richtung und Grösse aufgetragene Kraft zur Basis und A resp. $A,$ zur Spitze haben. Will man diese letzteren Dreiecke so verwandeln, dass sie ihre Spitze auch in A statt $A,$ haben, so hat man nur (Taf. 30_1) A,E_b parallel $AE,$ zu ziehen, so ist für jede Höhe $O,,$: $\triangle O,,E,,A, = O,,D,A$. Diese Parallele A,E_b ist also der Ort aller F_m bei belastetem Erdkörper. Um diese auf die variable Basis $A,,M,,$ sich beziehende Längen auf die constante Basis $A,,M = 2a,$ zu verwandeln, genügt es, weil $\frac{A,,M}{AO} = \frac{A,,M,,}{AO,,}$ ist, dieses Dreieck $O,,D,A$ so umzubilden, dass es AO zur Basis, und seine Spitze auf der Richtung der Kraft hat. Zu dem Ende ziehe man:

D,D parallel $AO,,$, so ist $\triangle O,,D,A = O,,DA$; dann verlängere man AD bis zum Schnitt G mit $O,,D$, so ist, weil OD parallel mit $O,,G$ läuft, $\triangle O,,DA = AOG$,

also $O,,G$ die auf die Basis $a,$ verwandelte Kraft F_m.

Auf dieselbe Weise erhält man durch Ziehen von $E_bE \parallel$ parallel O,A und AEF_b, O,F_b als die auf dieselbe Basis verwandelte Kraft O,E_b u. s. f.

Diese Constructionen sind den von Nr. 158 ganz ähnlich und wir widerholen nur das dort über die Natur der Curve Gesagte, welche die Endpunkte aller dieser Kräfte verbindet.

Als Schnitte desselben Parallelstrahlenbüschels EE_b, $DD_,$, $B_bB_,$ sind die geraden Gebilde $B, CD, E_b\infty$, und $B_bCDE\infty$ projectivisch sind, mithin sind es auch die Strahlenbüschel $\infty(B, CD, E_b\infty_,)$ und $A(B_bCDE\infty)$ der Schnitt dieser beiden Büschel, oder die vorliegende Curve ist also eine Curve zweiter Ordnung. Da ferner der gemeinschaftliche Strahl AB, ∞ als Strahl des Parallelstrahlenbüschels ∞ dem Strahl AB_b, und als Strahl von A der unendlich fernen Geraden des Büschels ∞ entspricht: so folgt, dass die Curve in A die Gerade AB_b und die unendlich ferne Gerade in der Richtung $A\infty$ berühre. Die gesuchte Curve ist also eine Parabel, deren Axe mit der Richtung der Kräfte parallel läuft.

Als Product der Verwandlung der Dreiecke $O_,,E_,,A$ erhält man ebenfalls eine Parabel, deren Axe ebenfalls mit der der Richtung der Kräfte parallel läuft, die AO berührt und durch F geht.

Die Cohäsion $K_,$ ist, weil die Richtung der Gleitflächen parallel bleibt, der Höhe des Erdkörpers proportional; da aber das $K_,$ des Kräftepolygons sich auf die veränderliche Basis $A, M_,$ bezieht, so hat man, wenn mit K etc. die Cohäsion für die Höhe AO bezeichnet wird:

$$\frac{K \,.\, A, M}{AM} = \frac{K_, \,.\, A, M_,}{AM_,} = \frac{K_,, \,.\, A, M_,,}{AM_,,} \text{ etc.},$$

woraus hervorgeht, dass die auf die jeweilige Höhe AM, $AM_,$, $AM_,,$ reducirte Einwirkung der Cohäsion constant ist, und bei Auftragen in der $O, E,$ entsprechenden Weise durch eine Parallele zu $AE,$ sich darstellen wird. Trägt man also F_m nach Abzug von $K,$ von $O,$ noch E_c auf, so ist die Parallele durch E_c der Ort aller F_m mit Berücksichtigung der Cohäsion. Verwandelt man schliesslich das Dreieck $O, E_cA,$ in $O, E_{bc}A,$ so ist die Parallele durch E_{bc} der Erddruck mit Berücksichtigung der Cohäsion und Belastung. Verwandelt man noch diese Kräfte auf die oben beschriebene Weise auf die gemeinschaftliche Basis $a_,$, so erhält man die beiden Parabeln F_c und F_{bc}, welche in A die Linien AB_c, AB_{bc} berühren, und auch parallele Axen zu den der übrigen zwei Parabeln haben.

Alles bisher Gesagte gilt auch für den Erdschub Taf. 30_2, nur sind in dieser Figur mehrere Buchstaben aus- und zusammengefallen, weil $AM = 2a,$ ist.

Der Erddruck und Schub ohne, dann mit Berücksichtigung der Cohäsion, der Belastung, und beider, wird in Richtung und Grösse durch die Ordinaten O,F, O,F_c, O,F_b und O,F_{bc} der entsprechenden vier Parabeln dargestellt. Dabei wachsen die Zwischenräume dieser Parabeln proportional den Abscissen AO, AO, etc., weil sie das Resultat der Verwandlung der constanten Entfernungen der Parallelen E_cH_c, $E_{bc}H_{bc}$, AE und A,E_b sind; und gleich den Segmenten, welche die vier Tangenten an dem Punkt A auf derselben Ordinate abschneiden. Es genügt, dies für eine Ordinate nachzuweisen: es sind die Endpunkte B_c, B_{bc}, O und B_b die Projection der vier Curvenpunkte derselben Ordinate von OC nach AB, und AB, nach B_cB_b.

Endlich geht hieraus noch hervor, dass die vier Parabeln und ihre Tangenten auf jeder Ordinate gleich lange Segmente abschneiden.

Bei den Taf. 30_1 gemachten Verhältnissen schneiden die beiden Parabeln F_c und F_{bc}, welche die Cohäsion berücksichtigen, die vordere Wand in H_c und H_{bc}, in denselben Punkten, in welchen diese auch von den entsprechenden Parallelen E_c und E_{bc} geschnitten wird. Ueber diesen Punkten ist der Erddruck negativ, und es bedarf der Erdkörper hier noch keiner Unterstützung. Aus der Figur geht hervor, dass der Punkt H_c in der Parallelen H_cE_c ganz dieselbe Bedeutung hat, als der Punkt A, in der Parallelen A,E_b. Ganz so, wie durch die Belastung der Querschnitt des abgleitenden Prismas um das Dreieck AA,L_m vergrössert worden ist, so ist es durch Berücksichtigung der Cohäsion um das Dreieck AH_cL_m verkleinert worden. Die Cohäsion ist also in ihren Wirkungen ganz einer negativen Belastung gleich zu setzen, und man erhält daher, wenn man den Erddruck und Schub wie früher durch eine Formel ausdrücken will:

$$F = {}^1/_2\,\varpi,\ \sin\tau\ .\ \overline{O,N,}^2\ \frac{O,H_c}{O,A} = {}^1/_2\,\varpi,\ \sin\tau\ l^2\ .\ \frac{x \mp x,}{x},$$

wo mit x, die Summen resp. die Differenzen der verschiedenen Höhen AH und AA, bezeichnet werden.

Hierbei ist zu bemerken, dass x, und $2h$ nur beim einfach belasteten Körper Grössen derselben Art sind, sich also nicht direct addiren und subtrahiren; es ist z. B.

$H_c H_{bc}$ nicht gleich $A A_1 = 2h$,

weil $A A_1$ auf eine andere Weise nach $E_c E_{bc}$ als nach $E_c E_b$ projicirt wird.

d) Druck und Schub eines nicht überhöhten Erdkörpers, dessen obere Begrenzung mit der natürlichen Böschung OL (Fig. 227 und 228) einen Winkel ELO bildet, der der Summe $\varphi + \varphi_1$ der beiden Reibungswinkel gleich ist.

Unter dieser Voraussetzung sind also wie in b die Winkel $ELO = EOA = \varphi + \varphi_1$, einander gleich, mithin die mit denselben Buchstaben bezeichneten Dreiecke einander ähnlich, und man hat:

$$\frac{EL}{EO} = \frac{EO}{EA} \text{ oder } EO = \sqrt{EA \cdot EL}.$$

Fig. 227.

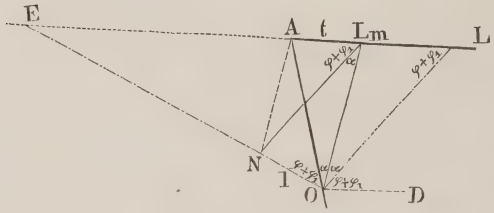
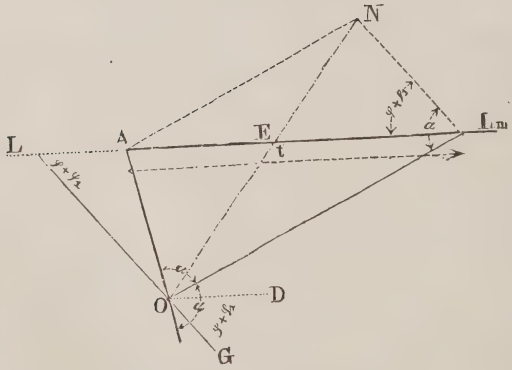


Fig. 228.



Nun ist aber auch $EL_m = \sqrt{EA \cdot EL}$, mithin ist $EO = EL_m$, das Dreieck EOL_m gleichschenklig und $\sphericalangle EOL_m = \sphericalangle EL_m O$. In Fig. 227 ist ferner $EL_m O$ als Nebenwinkel $= L_m OL + L_m LO = EOL_m$; zieht man auf beiden Seiten die

gleichen Winkel $L_m L\,0 = E\,0\,A$ ab, so bleibt $\measuredangle A\,0\,L_m = L_m\,0\,L$.

In Fig. 228 ist, wenn $L_m\,0\,G$ als Nebenwinkel betrachtet wird:

$$E\,L_m\,0 = L_m\,0\,G - L_m\,L\,0 = E\,0\,L_m;$$

addirt man auf beiden Seiten die gleichen Winkel $L_m L\,0 = E\,0\,A$, so erhält man

$$\measuredangle A\,0\,L_m = L_m\,0\,G.$$

Unter der obigen Voraussetzung halbirt also die Trennungsfläche $0\,L_m$ den Winkel, den die vordere Wand mit der natürlichen Böschung $0\,L$ bildet. Hierbei ist bei Erddruck die aufsteigende, bei Erdschub die abfallende natürliche Böschung zu nehmen.

Bezeichnet man die Hälfte dieses Winkels mit α, so erhält man die in die Figuren eingezeichneten Winkelgleichheiten, aus denen unmittelbar die Gleichheit der Dreiecke $0\,L_m\,A = 0\,L_m\,N$ hervorgeht.

Es ist also auch in diesem Fall

$$l = N\,0 = A\,L_m = t,$$

wenn wir mit t die Basis des abrutschenden Prismas bezeichnen, und der Ausdruck für Erddruck wird:

$$F = {}^1/_2\,\varpi,\ sin\,\tau\ t^2\left(1 \mp \frac{x_1}{x}\right),$$

wo das obere Zeichen auf Druck, das untere auf Schub sich bezieht.

Hier ist nun, weil wegen Halbirung des Winkels $L\,0\,D$ der früher Nr. 157 erwähnte Fall eintritt, in welchem das Minimum der Minderung durch die Cohäsion mit dem *max.* von F zusammenfällt, x_1 die in Nr. 153 und 155 bestimmte und jetzt mit $= H_c\,A$ und $H_{cb}\,A$ (Taf. 30_1) zusammenfallende Höhe auf die der Erdkörper ohne stützende Wand angeschnitten werden darf.

Bei Erddruck und Schub bezeichnet übrigens x_1 nicht dieselbe Länge, aus Gründen, die den in c (siehe S. 585, unten) entwickelten ganz ähnlich sind.

e) Erddruck eines oben horizontal begrenzten Erdkörpers auf eine verticale Wand bei Vernachlässigung der Reibung an derselben.

Dies sind die Annahmen, welche meistens den Berechnungen von Erddrucktabellen etc. zu Grunde gelegt werden; sie vereinfachen übrigens weder die Formeln noch die Construction, sondern sie beschränken nur den Umfang der Tabellen. Es entsprechen denselben die Fig. 229 und 230 angedeuteten Winkelverhältnisse, aus denen sich unmittelbar

$$F = {}^1/_2\, \varpi,\ sin\, 90^0\, [x\ tg\, {}^1/_2\, (90 \mp \varphi)]^2$$

oder

$$F = {}^1/_2\, \varpi,\ tg^2\, (45 \mp {}^1/_2\, \varphi)\ .\ x^2$$

ergiebt, wo wieder das obere Zeichen für Erddruck, das untere für Schub gilt.

Fig. 229.

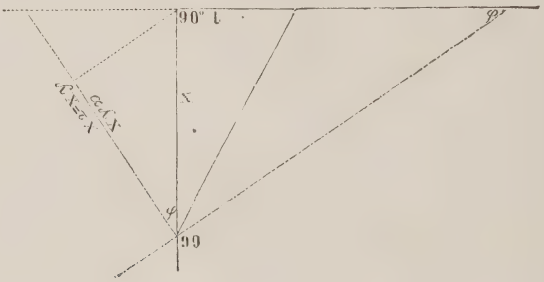
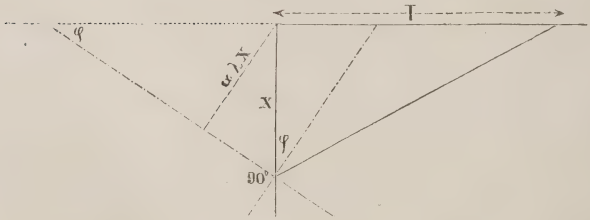


Fig. 230.



Da die Formeln sub a) meistens auch unter diesen beschränkenden Voraussetzungen aufgestellt werden und dann Alles durch den Reibungscoefficient $f = tg\ \varphi$ ausgedrückt wird, so wollen wir für diesen Fall noch die Verhältnisse $\alpha\, \lambda\, \tau$ von a) durch f ausdrücken. Die Bedeutung dieser Buchstaben ist in Fig. 229 und

230, mit denen Fig. 223 und 224 zu vergleichen sind, eingetragen. Unmittelbar geht dann aus diesen Figuren hervor:

$$\alpha\,\lambda = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}},$$

$$\lambda = \tau = \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1+f^2},$$

$$\alpha = \cos^2\varphi = \frac{1}{1+f^2},$$

woraus dann

$$1-\alpha = \frac{f^2}{1+f^2},$$

und

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{f^2},$$

$$f = \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

folgt.

Substituirt man diese Werthe von α in die Formeln von a (S. 579) für Erddruck, so erhält man den bekannten Ausdruck

$$F = {}^1/_2\,\varpi,\,.$$
$$\left[\sqrt{x\,(x+2h)(1+f^2)} - \sqrt{f^2(x+2h)\,x + x,\,(x,+2h)}\right]^2,$$

den wir nur anführen, um den Zusammenhang der erwähnten Ausdrücke zu zeigen.

161. Angriffspunkt des Mitteldrucks und Schubs der Erde.

a) Im Allgemeinen.

Ganz allgemein, bei der unregelmässigsten Ueberhöhung und Belastung, lässt sich die Lage der Mittelkraft des Erddrucks für eine beliebige Höhe einer Wand $A\,O$ (Taf. 30_3) dadurch bestimmen, dass man für verschiedene Höhenpunkte, hier acht gleichweit von einander abstehende, den Erddruck F_8, F_7, F_6 etc. bestimmt; dann ist die Differenz je zwei solcher Kräfte offenbar die Kraft, welche auf das entsprechende Stück der Wand trifft. Sind die Punkte nicht zu weit von einander entfernt, so kann die Richtungslinie

dieser Kraftdifferenz in der Mitte des Mauerstücks in der Richtung der punktirten Linien 1, 2 .... 7, 8 wirkend angenommen werden.

Die Differenzen selbst wurden construirt, indem man alle Kräfte, als Summen betrachtet, auf F_8 parallel mit $A\,O$ projicirte. Indem man ferner diese Kraft F_8 als Theil des Kräftepolygons betrachtet und die Länge $O\,6$ (in $A\,O$) als Poldistanz annahm: konnte man die sämmtlichen Kräfte durch ein Seilpolygon miteinander verbinden, das die Punkte II III IV .... VII VIII als die Angriffspunkte der Kräfte $F_1\ F_2 \ldots F_7\ F_8$ bezeichnet. In Wirklichkeit wird man die Curven $F_1\ F_2 \ldots F_7\ F_8$ nicht construiren, sondern diese Kräfte sogleich auf F_8 selbst auftragen.

Bei analytischer Behandlung wird gewöhnlich das Moment des Erddrucks in Bezug auf einen beliebigen Punkt, meistens die vordere Kante der Stützmauer gesucht. Wir bedürfen zwar desselben nicht, doch wollen wir bemerken, dass dasselbe $= O\,6$ mal dem Stück ist, das die beiden äussersten Polygonseiten auf der durch den gegebenen Punkt, zu $O\,F_8$ parallel laufenden Linie abschneiden, z. B. das Moment der Kraft F_8 ist für jeden Punkt der Linie $O\,F_8 = O\,6\ .\ O\,G$.

In Taf. 30_3 hat man sich $A\,B$ als Ort aller $l = O\,N$ (in allen frühern Figuren) gedacht. So gestaltet sich diese Linie, wenn im Belastungsgesetz eine Aenderung eintritt, z. B. bei allen Kanten in der obern Begrenzung. Das Eck in 5 macht sich natürlich auch in der Curve der F bemerkbar.

Noch auf eine andere Weise könnte man zu diesem Moment gelangen, wenn man bemerkt, dass das Moment des Drucks auf ein Mauerelement $\triangle h$ Taf. 30_3 in Bezug auf eine beliebige Parallele zur Kraft $O\,F_8$ z. B. gleich ist: dem Druck auf dasselbe, d. h. gleich der Differenz der es begrenzenden Ordinaten $\triangle F$, multiplicirt mit dem Perpendikel von $\triangle h$ auf $O\,F_8$ oder gleich dem Flächeninhalt des kleinen Parallelogramms $P \triangle F$. Die Summe aller dieser Momentenelemente ist daher offenbar gleich dem Flächeninhalt der Figur $O\,A\,F_1\,F_2 \ldots F_8$. Um nun den Angriffspunkt der Kraft F_8 zu bestimmen, hat man das Moment durch die Kraft zu dividiren oder, mit andern Worten, die Figur $O\,A\,F_1\,F_2 \ldots F_8$ auf die Basis $O\,F_8$ zu reduciren.

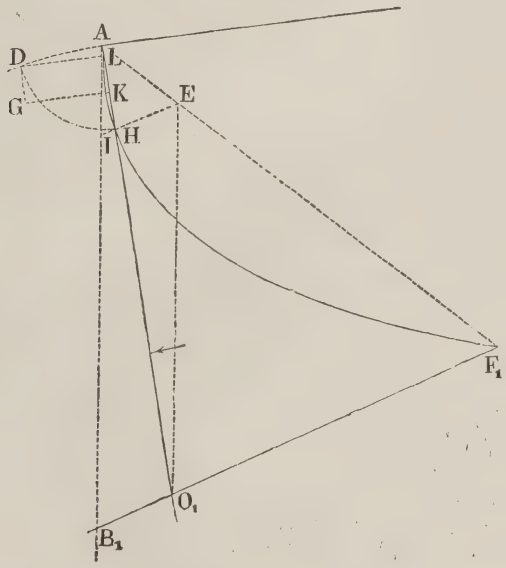
Wenn der Erdkörper überhöht oder unregelmässig belastet ist, so ist die Bestimmung mittelst Reduction der Fläche immer langwieriger als die mittelst Seilpolygons. So oft jedoch die Curve

der F wie in den folgenden Fällen eine Parabel ist, führt sie zu einfachern Constructionen.

b) Angriffspunkt des Drucks und Schubs eines belasteten, aber nicht überhöhten Erdkörpers bei Berücksichtigung der Cohäsion.

In diesem Nr. 160 c und Taf. $30_{1\,2}$ behandelten Falle ist die Curve der F eine Parabel, wir haben eine derselben nebst der zur Construction des Punktes H gehörenden Linien Fig. 231 herausgezeichnet. Nach dem eben Entwickelten handelt es sich darum, den von der Parabel begrenzten Flächeninhalt $H O_1 F_1$ auf die Ba-

Fig. 231.



sis $O_1 F_1$ zu reduciren. Es wäre nun mit keinen besondern Schwierigkeiten verknüpft, bei H eine Tangente zu ziehen und dann zu reduciren. Doch führen die bekannten Eigenschaften der Parabel, dass der Inhalt eines jeden Segments derselben, über $A F_1$ z. B. gleich einem Drittel des Inhalts des Dreiecks $A B_1 F_1$ ist, das durch die Sehne $A F_1$ eine Tangente $A B_1$ an dem einen Endpunkt A und eine zur Axe parallelen $B_1 F_1$ durch den andern Endpunkt F_1 gebildet wird, gleich und demnach auch der Inhalt des äussern Parabeldreiecks gleich zwei Dritteln des Inhalts desselben Dreiecks sei.

Es sind demnach die Inhalte den folgenden Producten proportional:

der des äussern Parabeldreiecks $AB_1F_1 = {}^1/_3\, AO_1 \,.\, BF_1$

des Dreiecks . . . . . $AB_1O_1 = {}^1/_2\, AO_1 \,.\, BO_1$

des Parabelsegments über . $AH = {}^1/_6\, AH \,.\, IH$

und der Inhalt des gesuchten Dreiecks:

$$HO_1F_1 = {}^1/_3\, AO_1 \,.\, BF_1 - {}^1/_2\, AO_1 \,.\, BO_1 + {}^1/_6\, AH \,.\, IH$$

$$= {}^1/_3\, AO_1 \,.\, O_1F_1 - {}^1/_6\, AO_1 \,.\, BO_1 \left(1 - \frac{AH^2}{AO_1{}^2}\right),$$

wenn man berücksichtigt, dass $B_1F_1 = B_1O_1 + O_1F_1$ und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AIH und AB_1O_1 das Product $AH \,.\, IH = AO_1 \,.\, B_1O_1 \,.\, \frac{\overline{AH^2}}{AO_1{}^2}$ ist.

Durch Division von HO_1F_1 durch O_1F_1 erhält man die Höhe des Angriffspunktes des Mitteldrucks über O_1, wenn man beachtet, dass $\frac{B_1O_1}{O_1F_1} = \frac{AH}{HO_1} = \frac{AH}{AO_1 - AH}$ ist.

$$\frac{HOF_1}{O_1F_1} = {}^1/_3 \left[AO_1 - {}^1/_2\, AH - \frac{AH^2}{2\, AO_1}\right].$$

Dieser Ausdruck ist nun leicht zu construiren: Man beschreibe von O_1 als Mittelpunkt aus den Kreisbogen AD, mache $AD = AH$ so ist, wenn DL senkrecht auf AO_1 steht, $AL = \frac{\overline{AH}^2}{2\, AO_1}$; zieht man also von AO_1 ab AL und $DG = LK = {}^1/_2\, AH$, so bleibt O_1K als Grösse unter der Klammer, in deren unterem Drittel der Angriffspunkt des Erddrucks an der durch einen Pfeil angedeuteten Stelle wirkt.

Ist der Körper belastet, d. h. AH negativ, so ist DG aufwärts aufzutragen, während AL immer dasselbe Zeichen hat.

Diese Construction ist in Taf. 30_1 und $_2$ dreimal ausgeführt und herausgetragen, in Taf. 30_2, wo die Endpunkte aller Tangenten bei $B_c\, B_{bc}\, B_b$ schon vorhanden sind, wurden die Flächen direct verwandelt, was keiner weitern Erläuterung bedarf.

c) Höhengrenze des Angriffspunktes der Mittelkraft.

Ist $AH = 0$, d. h. ist keine Belastung vorhanden und wird die Cohäsion ausser Acht gelassen oder compensiren sich beide, so liegt, wie wir oben gesehen haben, der Angriffspunkt eines nicht überhöhten Erdkörpers im untern Drittel der Wand. Wie viel derselbe bei Belastung oder bei Berücksichtigung der Cohäsion aus diesem her-

austreten kann, zeigt Taf. 30_1; man sieht, dass die Höhendifferenzen der Angriffspunkte gar keine zu vernachlässigende Grössen sind. Immerhin ist zu bemerken, dass bei unbelasteten Körpern dieser Angriffspunkt heruntergedrückt wird, und dass man bei Vernachlässigung dieses Umstandes eine höhere Lage der Kraft, grössere Momente und stärkere Mauern erhält: sodass diese Vernachlässigung als erlaubt und das Drittel der Höhe der Wand als obere Grenze des Angriffspunktes des Erddrucks nicht überhöhten, unbelasteten Erdkörpers betrachtet werden darf.

Belastete Erdkörper kommen nur sehr selten vor, häufig dagegen überhöhte, und da fragt es sich nun, wo liegt die obere Grenze des Angriffspunktes des Erddrucks solcher Körper?

Graphisch lässt sich in jedem einzelnen Falle leicht der Angriffspunkt bestimmen, allein Regeln lassen sich daraus nicht ableiten. Auf analytischem Wege hat nun zuerst Poncelet (siehe im „Mémorial de l'officier du génie" Band 13 S. 7, „Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations") versucht, die Frage zu lösen; er hat jedoch seine Untersuchungen auf Erdkörper mit horizontaler oberer Begrenzung mit verticaler vorderer Wand beschränkt und ist so auf Maxima gekommen, die nicht unbedingt es sind.

Da nun diese Untersuchungen leicht auf Körper von beliebiger Begrenzung ausgedehnt werden können, so glauben wir dieselben hier der Vollständigkeit wegen noch durchführen zu müssen.

Wir gehen von der Formel der Nr. 160[a] S. 576 für Erddruck:

$$F_x = {}^1/_2\, \varpi, \lambda\, \tau$$

$$\left[\sqrt{x\,(x+2\,h)} - \sqrt{(1-\alpha)\,x\,(x+2\,h) + \alpha\, x_1\,(x_1+2\,h)}\right]^2$$

aus. Vor Allem müssen wir nun darauf aufmerksam machen, dass die Bestimmung dieses Angriffspunktes nur dann einen Sinn hat, wenn die Wand in der Höhe beginnt, wo $F = 0$ ist; denn bestimmt man F für ein beliebiges Wandstück, so nähert sich der gesuchte Angriffspunkt desto mehr der Höhenmitte der Wand, je niedriger diese angenommen wird. Die vordere Wand muss also bei x_1 beginnen, weil für $x = x_1$, $F_{(x_1)} = 0$ wird.

Ferner darf sich von x_1 an abwärts das Belastungsgesetz nicht mehr ändern, denn sonst wäre ja die Formel nicht mehr anwend-

bar. Es muss also nach dem Nr. 160[a] Gesagten die Ueberhöhung sich parallel zur natürlichen Böschung über die Wand erheben.

Dies vorausgesetzt, erhalten wir den Angriffspunkt k von $F_{x,,}$, wenn wir für einen Augenblick die ganze Höhe der Wand mit $x,,$ bezeichnen:

$$k = \frac{\int_{x_,}^{x,,} (x,, - x)\, d\, F_x}{F_x},$$ nun ist

$$\int (x,, - x)\, d\, F_x = (x,, - x)\, F_x + \int F_x\, dx,$$

nun wird für $x = x_,$ $F_x = 0$

und für $x = x,,$ $x - x,, = 0,$

mithin wird $$k = \frac{\int_{x_,}^{x,,} F_x\, dx}{F_x} = \frac{\int_{x_,}^{x} F_x\, dx}{F_x},$$

wenn wir wieder statt $x,,$ x setzen. Führt man das Quadrat, das F_x enthält, aus, so wird das Integral:

$$\int \sqrt{x\,(x+2h)\,[(1-\alpha)]\,(x+2h)\,x+\alpha\,x,\,(a,+2h)}\;.\;dx$$

vorkommen; dieses Integral ist elliptisch und führt zu Resultaten, die keine Grenzen mehr zulassen; wir müssen daher, um das Integral noch ordentlich behandeln zu können, $2h = 0$ setzen, d. h. einen unbelasteten Erdkörper voraussetzen, dann wird:

$$k = \frac{\int_{x_,}^{x} \left[x - \sqrt{(1-\alpha)\,x^2 + \alpha\,x,^2}\right]^2 dx}{\left[x - \sqrt{(1-\alpha)\,x^2 + \alpha\,x,^2}\right]^2}$$

Führt man nun das Integral aus, so erhält man:

$$3k = \frac{(2-\alpha)x^3 + 3\alpha x x,^2 + \frac{2\,\alpha^2}{(1-\alpha)} x,^3 - \frac{2}{1-\alpha}\left[(1-\alpha)x^2 + \alpha x,^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[x - \sqrt{(1-\alpha)x^2 + \alpha x,^2}\right]^2}.$$

Bei diesem Ausdruck nun blieb Poncelet stehen und suchte bei verschiedenen Annahmen des Verhältnisses $\frac{x,}{x}$, das er mit u bezeichnete, das *max.* von k durch Probiren zu bestimmen.

Durch geeignetes mehrmaliges Multipliciren von Nenner und Zähler mit:

$$\left[1 + \sqrt{(1-\alpha) + \alpha u^2}\right]^2$$

und dann mit: $$\left[u + \sqrt{(1-\alpha) + \alpha u^2}\right]^2$$

gelangt man übrigens bald zu:

$$k = {}^1/_3 (x - x_1) \left[1 + \frac{(1-\alpha)\, u\, (1-u)}{[u + \sqrt{1-\alpha+\alpha u^2}]^2}\right]$$

$$= {}^1/_3 (x - x_1) \left[1 + \frac{u\,(1-u)}{\left(\frac{u}{\sqrt{1-\alpha}} + \sqrt{1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} u^2}\right)^2}\right].$$

Dieser Werth von k wächst mit der Abnahme von α. Je kleiner also das Verhältniss $\frac{OI}{OE}$ Taf. 28_1 und Fig. 222 S. 577 ist, desto höher liegt der Angriffspunkt der Kraft F.

Bei gegebenem Profil nimmt α ab, wenn der Reibungscoefficient $f = tg\,\varphi$, also der Winkel φ wächst; denn dann bewegt sich die Linie $A_{,,} I$ gegen $A_{,,} O$, es wird also OI kleiner und OE entfernt sich von $OA_{,,}$, es wird also dann gleichzeitig auch OE grösser, mithin $\alpha = \frac{OI}{OE}$ kleiner.

Unter der Voraussetzung einer verticalen Wand und einer horizontalen obern Begrenzung, nahm nun Poncelet als *max.* des Reibungscoefficienten $f = \sqrt{2} = 1{,}414$ oder 54°, 44′, 8″,19 als *max.* von φ an. Bei diesen Annahmen wird dann (siehe 160e):

$$\alpha = {}^1/_3$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

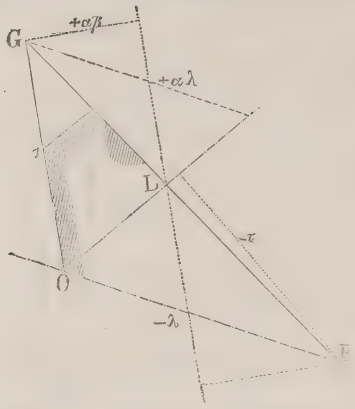
und

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = {}^1/_2.$$

Allein α hängt nicht allein von den Reibungswinkeln, sondern auch von der Gestalt des Profils ab und die Abnahme desselben ist beinahe unbegrenzt, es kann sogar negativ werden, wie Fig. 232 S. 596 zeigt: wo alle durch griechische Buchstaben bezeichnete Verhältnisse, deren Zeichen von der relativen Lage der Punkte ECL abhängt, negativ sind, während alle Quotienten und Producte derselben, also auch die Flächen und Kräfte, positiv bleiben.

Wir wollen daher α vorerst noch unbestimmt lassen und das

Fig. 232.



max. des Verhältnisses $\frac{k}{x - x_1}$, das nur vom *max.* von

$$\frac{u\ (1-u)}{[u + \sqrt{1 - \alpha + \alpha u^2}]^2}$$

abhängt, bei gegebenem α und veränderlichem u bestimmen.

Durch Differentiation dieses Ausdrucks gelangt man zur Gleichung dritten Grades, deren Wurzeln nur Minima geben:

$$0 = (1-u)^3 - 3\,(1-u)\,\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha}.$$

Ist α positiv, so hat die Gleichung drei Wurzeln, wovon eine > 1 und eine negativ ist; die einzige brauchbare Wurzel erhält man, indem $\cos\psi = \sqrt{\alpha}$ gesetzt wird, aus:

$$1 - u = \frac{2\ \sin\,(30^0 - {}^1/_3\,\psi)}{\cos\,\psi}.$$

Wenden wir diese Formel auf die Poncelet'schen Rechnungen an, so wird unter den Voraussetzungen von 160°: $\psi = \varphi$ gleich dem Reibungswinkel 54°, 44′, 8″,19 und man erhält:

$$1 - u = 2\sqrt{3}\ \sin\ 11^0,\ 45',3\ 17'' = 0{,}2942803$$
$$u + \sqrt{{}^2/_3 + {}^1/_3\,u^2} = 1{,}1282668$$
$$\frac{{}^2/_3\ u\ (1-u)}{[u + \sqrt{{}^2/_3 + {}^1/_3\,u^2}]^2} = 0{,}10876233,$$

und hieraus:

$$k = (x - x_1)\,\frac{1{,}10876233}{3} = 0{,}3695874\ (x - x_1).$$

Eine ganze Tabelle berechnend, fand Poncelet diesen Werth $= {}^1/_3\ 1{,}1085 = {,}3695$ (siehe das schon citirte „Mémorial de l'officier du génie", Bd. 13 S. 108), also bis auf die letzte Stelle genau.

Dieser Werth ist jedoch noch keineswegs ein *max.* Setzt man z. B. $\alpha = 0$, d. h. wird die obere Begrenzungsfläche parallel zur Linie OE angenommen, so verschwindet aus der Gleichung:

$$(1-u)^3 - 3\,(1-u)\,\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} = 0,$$

α und $(1-u)^3$, und man erhält:

$$1-u = {}^2/_3 \qquad u = {}^1/_3,$$

und es wird:

$$\frac{k}{x-x_1} = {}^1/_3 \left[1 + \frac{{}^1/_3 \cdot {}^2/_3}{({}^1/_3+1)^2}\right] = 0{,}375;$$

noch grösser würde dieses Verhältniss werden, wenn α negativ würde, dann erhält man als einzige reelle Wurzel obiger Gleichung:

$$1-u = \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}}}$$

wo das Zeichen von α schon gewechselt ist. Doch wollen wir uns bei diesem ungewöhnlichen Falle nicht mehr länger aufhalten.

Uebrigens zeigen diese Rechnungen, wie wenig sich der Angriffspunkt des Erddrucks in Folge der Ueberhöhung ändert. Sie hat das Verhältniss $\frac{k}{x-x_1}$ von 0,333 auf 0,375, also um 0,04 steigen machen. Während die Berücksichtigung der Cohäsion in Taf. 30_1 es von 0,33 der Höhe auf 0,26, also um 0,07 vermindert hat. Wenn daher auch die *max.* von Poncelet nicht unbedingt *max.* sind, so ist doch sein Schluss den Angriffspunkt des Drucks in der Mitte von $\frac{0{,}333+0{,}37}{2}$ in 0,35 der Höhe anzunehmen, mehr als berechtigt; wir gehen sogar weiter und glauben, dass, wenn auch die Cohäsion bei Bestimmung des Erddrucks nicht berücksichtigt werden soll, doch das berücksichtigt werden darf, dass in Folge derselben der Angriffspunkt des Erddrucks wohl nie über das Drittel hinaufsteigen wird. Wir wollen daher in Zukunft den Druck immer im untern Drittel annehmen.

Doch verlieren wir uns hier in Betrachtungen, die in eine Baukunde, nicht in eine graphische Statik gehören; wir gehen daher, nachdem wir jetzt Grösse und Lage des Erddrucks kennen, zur Bestimmung der Stärke der Stützmauern über.

Drittes Kapitel.

Stärke der Stütz- und Futtermauern.

162. Das Gleichgewicht der an einer Stützmauer wirkenden Kräfte.

Nachdem der Druck, dem die Stützmauern zu widerstehen haben, bestimmt ist, haben wir die Stärke zu ermitteln und den Fugenschnitt festzustellen, welche die Mauern erhalten müssen, um auch wirklich diesem Drucke widerstehen zu können.

Die Stützmauer an und für sich unterscheidet sich, wenn von der Ursache des auf sie ausgeübten Druckes abstrahirt wird, in nichts von einem Widerlager, und Alles, was Nr. 128 S. 460 über die Stabilität des Widerlagers, welches dem Schub eines Gewölbes zu widerstehen hat, gilt nothwendiger Weise auch von der einer Stützmauer, die einem Erddruck zu widerstehen hat. Und der Fugenschnitt und die Stärke werden auf dieselbe Weise bestimmt; ist die zur Verhinderung des Kantens nothwendige Stärke ermittelt, so wird durch den Fugenschnitt das Gleiten verhindert.

Ausser diesen beiden Bestimmungen wird bisweilen auch auf theoretischem Wege die Tiefe des Fundaments einer Stützmauer bestimmt. Man geht dabei von der Voraussetzung aus: die Stützmauer stehe auf weichem Boden, der auf einer Seite des Fundaments mehr als auf der andern nachgeben würde, wenn die eine mehr als die andere belastet wäre. Soll aber das Fundamentauflager gleichmässig belastet sein, so muss die Mittelkraft aller an ihm und der Stützmauer wirkenden Kräfte durch den Schwerpunkt seines Auflagers gehen. Als Kräfte, welche an der Stützmauer wirken, werden: der Erddruck von hinten, das Gewicht der Stützmauer und der Erdschub auf die Vorderfläche des Fundaments angenommen. Die Mittelkraft des Erddrucks und des Gewichts der Stützmauer schneidet das Auflager der letztern natürlich immer in der vordern Hälfte. Kommt dann aber der Erdschub von vorn dazu, so wird der Schnitt gegen die Mitte zurückgedrängt, weil der Schub

verhältnissmässig viel schneller als der Druck zunimmt; wird also das Fundamentauflager tief genug angenommen, so erreicht man, dass die Mittelkraft aller am Fundament wirkenden Kräfte durch dessen Mitte gehe.

Wir müssen nun wirklich gestehen, wir haben sehr geringes Vertrauen in die Stabilität einer so auf weichem Boden balancirten Stützmauer und glauben, eine solide Stützmauer müsse auch solid gegründet sein; immerhin wollen wir auf Taf. 31 sowohl die Stärke der Stützmauer, als auch den oben aufgestellten Bedingungen entsprechend die Fundamenttiefe bestimmen, weil wir dabei Gelegenheit haben, das über den Erdschub Gesagte anzuwenden. Da überhaupt Alles nur eine Anwendung der schon entwickelten Theorien ist, so beginnen wir unmittelbar mit der Erklärung der Taf. 31 zur Anwendung gebrachten Constructionen.

Wir verstehen dabei unter einer Stützmauer im engern Sinne eine solche, die einen Auftrag stützt, also eine Erdmasse, in der die Cohäsion, mit der die Erdtheilchen zusammenhängen, eben erst zerstört wurde, und daher bei Bestimmung der Mauerstärke nicht berücksichtigt werden darf. Von Futtermauern dagegen wird angenommen, dass sie die Erdwände von Abträgen bekleiden, gleichsam nur ausfüttern. Dabei mochten sich die alten Baumeister denken, die Erdwand des Abtrags würde vielleicht von selbst halten, wenn sie gegen atmosphärische Einflüsse geschützt wäre. Wenn nun dies auch nicht wörtlich so genommen werden darf, so versteht man doch unter Futtermauern solche, bei deren Kräfteplänen die Cohäsion berücksichtigt werden darf, wodurch ihre Dimensionen bedeutend verringert werden.

163. Kräfteplan einer Stützmauer.

Taf. 31_1 wurde das Profil des mit einer Fussbank versehenen Dammes mit dem Vorsprung der Stützmauer und ihrem vordern Anlauf von $^1/_{10}$ als gegeben betrachtet, und angenommen, es sei die Lage der hintern Mauerfläche unter der Voraussetzung zu bestimmen: dass diese einen Anlauf von $^1/_{20}$ nach innen erhalten solle, dass der Reibungswinkel von Erde auf Erde gleich $\varphi = 40^0$, der von Erde auf Mauerwerk $\varphi_1 = 15^0$, endlich das Verhältniss des Gewichts der Cubikeinheit Mauerwerk zu dem der Erde

$\frac{\varpi}{\varpi_,} = 1{,}5$ sei und die Cohäsion der Erde ausser Acht gelassen werden könne.

Bei der unregelmässigen Form des angenommenen Profils kann die Lage der hintern Wand über dem Fundamentabsatz 3 oder die Stärke der Stützmauer nur durch Probiren bestimmt werden. Sie wurde zuerst in „ angenommen und die Mittelkraft des mit dem Sicherheitscoefficienten 2 multiplicirten Erddrucks und des Gewichts der Stützmauer construirt. Diese Mittelkraft schneidet die Verlängerung des Fundamentauflagers in U, also jenseits der Kante und zeigt, dass die angenommene Stützmauerstärke zu schwach war. Zum zweiten Male wurde die Lage der hintern Wand in , angenommen; die Mittelkraft der über dem Fundament an der Stützmauer wirkenden Kräfte schneidet dann auch noch dessen Verlängerung in U_1. Die Mauer ist also auch noch zu schwach, allein jetzt gelangt man mittelst einer Fehlercurve unmittelbar zur richtigen Stärke: wenn man, ganz dem Nr. 21 S. 71 Gesagten entsprechend, das Segment des Fundamentauflagers zwischen der vordern Kante der Stützmauer und dem Schnitt U, d. h. den Fehler auf der hintern Wand über „ und dann die zweite bei U_1 endigende Fehlerlänge über , aufträgt; die Endpunkte dieser aufgetragenen Ordinaten durch eine Linie die Fehlercurve miteinander verbindet; dann schneidet diese Fehlercurve die richtige Stärke der Stützmauer auf dem Fundamentauflager ab. Zur Controle wurde auch noch die Mittelkraft der jetzt über dem Fundamentauflager wirkenden Kräfte construirt, und die Mittelkraft geht richtig durch die vordere Kante der Stützmauer. Für diese letztere Construction wurden auch alle Constructionslinien ausgezogen.

Zur Bestimmung des Erddrucks wurde ganz wie in Nr. 157 S. 463 das l construirt, durch das man den Druck mittelst der Formel:

$$F = {}^1/_2 \, \varpi, \, sin \, \tau \, l^2$$

erhält. Die Construction dieses l bedarf nach dem in der eben citirten Nummer Gesagten keiner weitern Erklärung mehr; um die zusammengehörigen Linien herausfinden zu können, wurden die Buchstaben $CEOL$ so eingesetzt, dass sie den gleichbezeichneten Punkten in Taf. 28_1 und Fig. 222 S. 577 entsprechen. Das erhaltene l ist ausgezogen und mit diesem Buchstaben bezeichnet.

Die Constructionen für die Lagen , und „ sind nur in der Nähe der vorkommenden Schnittpunkte auf kurze Strecken ausgezogen und diese mit dem entsprechenden Zeichen versehen worden. Um die Fundamenttiefe bestimmen und um die Stützlinie einzeichnen zu können, musste dann noch für weitere sechs verschiedene Höhen der hintern Wand ebenfalls der Erddruck bestimmt werden; die dazu nothwendigen Constructionen wurden bei dem Ausziehen auf dieselbe Weise behandelt und alle Schnittpunkte, welche auf die gleiche Kraft sich beziehen, auch mit einer und derselben Ziffer bezeichnet, welche von oben nach unten an der hintern Wand aufeinander folgend fortlaufen. Bei Bestimmung des Erddrucks für die Höhe 1 wurde der Kreis, der zur Construction der vorkommenden mittleren Proportionalen dient, auf der Linie OE, für die folgenden Höhen 2—7 aber auf die Linie LE verzeichnet; im Uebrigen aber sind alle diese Constructionen ganz identisch.

Der Angriffspunkt des Erddrucks wurde im Drittel der Höhe der hintern Wand angenommen und dort durch einen Pfeil, der gleichzeitig auch die Richtung des Erddrucks andeutet, bezeichnet; diese Richtung bildet laut Fig. 217 S. 565 den Winkel $90 - \varphi$, $= 75^0$ mit der hintern Wand.

Um diese Erddrücke mit dem Gewicht der Stützmauertheile zusammenzusetzen, verwandeln wir den Querschnitt der letztern nach Nr. 16 S. 53 oder nach Nr. 151 S. 551, wenn man die Länge $= 1$ setzt, in Rechtecke, deren eine Seite gleich der angenommenen Basis a ist. Es stellt dann die andere Seite f das Gewicht $a.f.1\,\varpi$ dar. Soll nun der Erddruck F auf dieselbe Weise durch ein f dargestellt werden, so muss nothwendiger Weise auch:

$$a f \varpi = F = {}^1/_2\, \varpi, \sin \tau\, l^2$$

sein, woraus sich:

$$f = \frac{l^2}{2\,\frac{\varpi}{\varpi,}\, a : \sin \tau} = \frac{l^2}{3\, a : \sin \tau}$$

ergiebt.

Die den verschiedenen construirten l entsprechenden f wurden im Kräftepolygon (Taf. 31_2) sogleich an der Stelle construirt, die sie in diesem einnehmen sollen. Von A aus wurde in der f entgegengesetzten Richtung $3a : \sin \tau$, das vorher (Taf. 31_1) auf der Linie OE als Hypothenuse des rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Höhe $= 3a$ und dessen Winkel τ zu π ergänzt construirt worden

war, dann senkrecht darauf auch von A aus alle jetzt bekannten l aufgetragen; auf der Linie, welche die Endpunkte von $3a : \sin\tau$ und l mit einander verbindet, im letztern Punkt ein Perpendikel errichtet und durch den Schnitt dieses Perpendikels mit der Verlängerung von $3a : \sin\tau$, f in Richtung und Länge erhalten; denn laut Nr. 3 S. 20 ist $f.(3a : \sin\tau) = l^2$.

Der Erddruck f ist nun zunächst mit dem Gewicht des kleinen Erdprismas e, dann mit dem der Stützmauertheile über dem Fundament und endlich mit dem Gewicht der Fundamentschichten zusammen zu setzen. Die Linie e, durch welche das Erdprisma über der Mauer dargestellt wird, erhält man dadurch, dass man den Querschnitt desselben in ein Rechteck mit der Basis $a\,\frac{\varpi}{\varpi_1}$ oder was dasselbe ist, in ein Dreieck mit der Doppelbasis $2a\,\frac{\varpi}{\varpi_1} = 3a$ verwandelt. Die Gewichte der einzelnen Mauertheile wurden einfach durch Verwandlung derselben in Dreiecke mit der Doppelbasis $2a$ erhalten. Die zu diesen Verwandlungen dienenden Linien wurden Taf. 31_1 nicht ausgezogen, das Resultat der Verwandlung aber im Kräftepolygon Taf. 31_2 von A aus so aufgetragen, dass die Längen Ae, $A2$, $A5$ etc. die Gewichte des Erdprismas, und die der Stützmauer über der Fuge 2, 5 etc. incl. des Erdprismas darstellen.

Um alle Kräfte zu erhalten, welche überhaupt vorkommen, sind nur noch die Reactionen der Erde auf die vordere Wand der Stützmauer für die Fundamenttiefen 4, 5, 6, 7 zu construiren. Diese Constructionen wurden Nr. 158 S. 571 entsprechend ausgeführt und die Buchstaben O, E, L, N, so eingesetzt, dass sie den gleichen Buchstaben Taf. 29_1 und Fig. 226 entsprechen, und daher keine weiteren Erläuterungen mehr erfordern. Sie geben l_1 so, dass der gesuchte Erdschub

$$F_1 = {}^1/_2\,\varpi_1\,\sin\tau_1\,l_1^2 \text{ ist.}$$

Die Construction der Linie f_1, durch welche er dargestellt wird, wurde auf der durch 7 Taf. 31_2 gehenden und mit F_1 parallelen Linie vorgenommen, und unterscheidet sich von der des f dadurch, dass $\frac{3a}{\sin\tau_1}$, das vorher auf der Linie O, N, Taf. 31_1 construirt worden war, Taf. 31_2 nicht auf der Verlängerung von f_1,

sondern auf ihm selbst aufgetragen wurde, damit $\frac{3a}{\sin \tau_1}$ nicht zu sehr über den Rahmen des Blattes hinausfalle. Die bekannten l_1 sind dann bei 5, 6, 7, die Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypothenuse $= f_1$ ist, wenn ihre Projection auf f_1 gleich $3a : \sin \tau_1$ ist. Bei 4 aber ist f_1 die Projection der Kathete 4 des rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypothenuse $= 3a : \sin \tau$ ist, auf diese letztere. Die Richtigkeit der Construction geht in allen diesen Fällen auch aus Nr. 3 S. 20 hervor, weil immer

$$f_1 \,.\, (3a : \sin \tau_1) = l_1^2 \text{ ist.}$$

Die Längen von f_1 für die Fugen 4, 5, 6 wurden endlich mittelst Verticalen, auch auf den Parallelen durch 4, 5, 6, wohin sie gehören, abgeschnitten.

Das jetzt vollendete Kräftepolygon Taf. 31_2 diente zur Construction aller auf Taf. 31_1 verzeichneten Seilpolygone. Die erste Seite f wurde überall bis zur Verticalen durch den Schwerpunkt des Dreiecks e über der Stützmauer verlängert, zwischen dieser und der durch den Schwerpunkt des entsprechenden Stücks Stützmauer über dem Fundament laufen die Seilpolygonseiten mit den Linien fe des Kräftepolygons parallel. Zwischen der letzten Verticalen und der Fuge 1, 2, 3, oder der Verticallinien durch die Schwerpunkte der Fundamentmauern 4 5 6 7 laufen die Seilpolygonseiten mit den Linien $fe1$, $fe2$ und $fe3$ parallel. Zwischen den letzten Verticallinien durch die Schwerpunkte der Fundamente 4 5 6 7 und der Bodenreactionen, den Erdschuben f_1 laufen sie parallel mit den Linien, welche die Endpunkte von f mit den Anfangspunkten von f_1 verbinden; die letzten Seiten endlich laufen parallel mit den Linien, welche die Endpunkte von f und f_1 mit einander verbinden.

Die drei Seilpolygone, welche zur Bestimmung der Stützmauerstärke mittelst der Fehlercurve dienten und die den Stärken 3_1 und $_{11}$ entsprechen, wurden, wie früher schon erwähnt wurde, mit dem doppelten Erddruck $2f$, alle übrigen aber mit dem einfachen Erddruck f construirt.

Durch Verbindung der auf der zugeordneten Fuge liegenden Endpunkte aller dieser Seilpolygone mit einander, erhält man die stark gestrichte Stützlinie. Ueber dem Fundament, so lange die Reaction des Erdschubs sich nicht geltend macht, nähert sie sich

der vordern Wand und kehrt ihre convexe Seite dem Erddamm zu. Diese Form gleicht sehr dem Profil, das die Engländer ihren Stützmauern geben, und zeigt, wie der praktische Sinn jener die richtige Form der letzteren so treffend herausgefühlt hat.

Unter dem Fundamentauflager wird die Stützlinie durch den Einfluss der Reaction des Erdschubs wieder in das Innere des Fundaments gedrängt und bestimmt durch ihren Schnitt mit der der Mittellinie des Fundaments die Tiefe desselben. Denn wird es bei jenem Schnitt abgeschnitten, so geht von Constructionswegen die Mittelkraft aller am Fundament wirkenden Kräfte durch die Mitte seines untern Auflagers.

164. Stärke einer überhöhten Futtermauer bei Berücksichtigung der Cohäsion.

Um auch noch ein Beispiel über die Anwendung des über die Cohäsion Gesagten zu geben, haben wir die Stärke einer Stützmauer für das Taf. 32_1 gegebene Profil unter der Voraussetzung bestimmt: es sei der Reibungswinkel von Erde auf Erde $\varphi = 35^0$, der von Erde auf Mauerwerk $\varphi_1 = 15^0$, und ausserdem habe man in derselben Bodenart einen 10 Meter tiefen Einschnitt beobachtet, dessen Böschungen bei einem Anlauf von 2 auf 1 noch hielten, woraus die Cohäsion abgeleitet werden kann. Endlich wird der Allgemeinheit wegen angenommen, es stehe hart am Rande der Ueberhöhung ein Gebäude, das die obere Begrenzungsfläche des Geländers durchschnittlich so stark belaste, als wie eine $2^1/_2$ Meter hohe Erdschichte.

Da alle vorzunehmenden Constructionen bereits bekannt sind, so dürfen wir uns darauf beschränken, kurz anzudeuten, in welcher Reihenfolge sie ausgeführt wurden.

Da von vorn herein die Gleitfläche nicht construirt werden kann, wenn bei Bestimmung des Erddrucks die Cohäsion berücksichtigt werden soll, so wurde der Erddruck für fünf verschiedene Richtungen O) 4 5 6 7 8 der Gleitfläche mittelst der Kräftedreiecke $KPFQ$, welche dieselbe Lage und Bedeutung als wie in Taf. 28_1 haben, construirt.

Wir beginnen mit K, indem wir vom Fuss der O der hintern Wand die 10 Meter hohe, $^1/_2$malige Böschung auftragen und dann

ganz Fig. 214 S. 558 entsprechend, mittelst eines Kreisbogens von O aus die obere Kante auf die natürliche Böschung herunterschlagen, und gleichzeitig einen Perpendikel auf sie von der obern Kante aus fällen. Dann ist die Länge des Segments der Horizontalen zwischen dem Fusspunkt des Bogens und zwischen dem Perpendikel gleich der vierfachen Cohäsion $4k$. Indem wir hiervon $^1/_4$ abziehen, erhalten wir an der Stelle, wo es eingeschrieben ist $3k$, das wir sogleich brauchen werden. Die Basis a_1, auf welche die jetzt sich wiederholenden Constructionen von Nr. 157 S. 563 die Kräfte P reduciren, ist gleich $^1/_2 . A_1 M = a_1$. Wenn wir nun ein vielfaches, im vorliegenden Fall $3\,a_1$ in Zirkel nehmen und die Lage der Gleitfläche $O\,8$ bestimmen, deren Länge gleich $3\,a_1$ ist, so wird das dieser Gleitfläche entsprechende $K = 3k$ sein. Das Kräftepolygon $K P F Q$ ist um $90 - \varphi$ gegen seine wahre Lage gedreht, wir erhalten daher die Richtung von K, indem wir die Gleitfläche $O\,8$ um diesen Winkel von 55° drehen. Diese Drehungen kommen noch mehrere Mal vor; sie werden daher alle auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt O ist, vorgenommen. Für den vorliegenden Fall ist also der Bogen $8\,8 = 90 - \varphi = 55°$ gemacht worden, wodurch man die Richtung von K_8 erhielt. Der Ort der Endpunkte aller übrigen K ist eine gerade Linie, welche mit der obern Begrenzungsfläche des Geländers den Winkel $90 - \varphi$ bildet. Auch diese Drehung wurde auf dem eben verzeichneten Kreisbogen vorgenommen, und es sind auf demselben durch kurze Striche die um 55° von einander abweichenden Richtungen der obern Begrenzungsfläche $A L$ und der Linie des Orts aller Enden von K angegeben.

Vom Endpunkt dieser K aus laufen die Q parallel mit den Gleitflächen und umhüllen eine Parabel; diese Parabel wurde nicht gezeichnet, weil sie über den Rahmen des Blattes hinausfällt. Hätte man sie construirt, so hätte mit Umgehung der Construction der K jedes Q direct die Parabel berührend gezeichnet werden können. Wenn man aber nur, wie im vorliegenden Fall, vier oder fünf Strahlen der Parabel braucht, so ist es einfacher, die K zu construiren.

Um P zu erhalten, wurde zuerst die Verwandlungslinie $O A$ so gezogen, dass der Flächeninhalt $O A B$ gleich dem Inhalt des auf $O B$ abrutschenden Erdprismas ist, dann durch die Parallele $A A_1$ zu $O B$ die Spitze des Dreiecks $O A B$ nach dem Punkte A_1 gebracht,

dessen verticale Höhe über AB gleich der doppelten Ueberlastungshöhe BC ist.

Es schneiden jetzt für jede Gleitfläche die Parallelen 44, ... 88 zu OA, auf der natürlichen Böschung die entsprechenden P so ab, dass sie mit $a, \varpi,$ zu multipliciren sind, um das Gewicht zu geben.

Parallelen durch die Endpunkte der P zur Linie OE, welche mit der hintern Wand den Winkel $\varphi + \varphi_1 = 50^0$ bilden, bestimmen durch ihren Schnitt mit dem Q die Längen der F. Die Verbindung aller dieser Endpunkte giebt die Curve der F und eine zu P parallele Tangente das F_m, den eigentlichen Erddruck. Die Verlängerung aller F bis zu den entsprechenden Gleitflächen giebt den Erddruck ohne Berücksichtigung der Cohäsion. Des Vergleiches wegen wurden auch diese Endpunkte durch eine gestrichte Curve mit einander verbunden; man sieht, dass durch die angenommene Cohäsion der Erddruck beinahe um ein Drittel vermindert wurde. Verlängert man auch F_m bis zu dieser Curve, so erhält man einen Punkt der demselben entsprechenden, d. h. der eigentlichen Gleitfläche.

Früher, Nr. 157 S. 570, hatten wir gesagt, es genüge, die Gleitfläche so zu bestimmen, als ob keine Cohäsion stattfinde, und dann nur einmal für diese Gleitfläche das F zu bestimmen. Das F, das man so erhalten würde, würde näher an F_7 als an F_6 hinfallen, und es ist auf der Curve der Endpunkt dieses F durch einen kleinen Querstrich angedeutet; das Segment desselben zwischen der Curve und der Tangente giebt den Fehler an, der auf diese Weise begangen werden würde. Man sieht, er ist wirklich sehr klein und darf füglich immer vernachlässigt werden, wir wollten nur dies hier nicht thun, sondern wir wollten ihn gerade absichtlich zur Anschauung bringen.

Zur Bestimmung der Stärke der Futtermauer selbst wurde die hintere Wand derselben als gegeben und die obere Breite zu einem Zehntel der ganzen Höhe angenommen, so dass nunmehr die Lage der vordern Wandfläche zu bestimmen ist. Es vereinfacht diese Annahme bedeutend die Constructionen, weil bei Aenderung der vordern Wandfläche der Erddruck sich nicht ändert; während bei Aenderung der hintern Wandfläche, auch für jede Aenderung der Erddruck von neuem zu construiren ist. In der Praxis wird man wohl immer so verfahren, weil man bei einiger

Uebung die Lage der hintern Wandfläche richtig genug schätzen kann, um die Aenderungen auf die vordere beschränken zu dürfen.

Verfährt man auf diese Weise, so ist die Länge der punktirten Diagonale von vorn herein gegeben, und die gleiche für alle Stützmauerstärken. Wir nehmen daher das Viertel ihrer Länge a zur Basis des Kräftepolygons, dann wird der Inhalt eines jeden der beiden Dreiecke, in welche diese Diagonale die Futtermauer zerlegt, durch die doppelte Höhe dieser Dreiecke dargestellt: so dass keine weitere Verwandlung mehr nothwendig ist, als die des kleinen Erddreiecks e, das auf die Basis $\frac{\varpi}{\varpi_1} a$ oder auf die Doppelbasis $3\,a$, zu reduciren ist.

Natürlich muss auch F_m vor der Zusammensetzung auf dieselbe Basis reducirt werden, und wenn es im Kräftepolygon durch die Linie f dargestellt werden soll, so muss:

$$a\,f\,\varpi = {}^1/_2 \,.\, \overline{A,M} \,.\, F_m \,.\, \varpi_1$$

oder:

$$3\,a\,.\,f = \overline{A,M} \,.\, F_m$$

sein. Diese Reduction wurde im rechten Winkel über M vorgenommen, wo alle Buchstaben der letzten Gleichung eingeschrieben sind.

Wie in der vorigen Nummer, wurden die Kräfte- und Seilpolygone zur Bestimmung der Futtermauerstärke für drei verschiedene Lagen der vordern Wandfläche gezeichnet. Die Kräfte sind: der mit dem Sicherheitscoefficienten multiplicirte Erddruck $\sigma f = 2 f$; das Gewicht des kleinern Erdprismas über der Futtermauer e; das Gewicht der kleinern Futtermauerhälfte g, und das variable Gewicht der grössern g_{123}. Der Angriffspunkt des Erddrucks liegt im Drittel der Höhe und seine Richtung bildet den Winkel $90 - \varphi_1 = 75^0$ mit der hintern Wandfläche. Die der übrigen Gewichte liegen in dem entsprechenden Schwerpunkt und wirken vertical. Hierbei bemerken wir, dass der Schwerpunkt der veränderlichen Futtermauerhälfte auf einem Kreisbogen liegt, dessen Mittelpunkt in der Mitte der Diagonalen liegt, und dessen Halbmesser $= {}^1/_6$ der Länge der Diagonale ist; weil angenommen wurde, es solle das Fundamentauflager senkrecht auf der vordern Wand stehen und sich daher die vordere Kante der Futtermauer auf einem Kreis bewegt, dessen Durchmesser die Diagonale der Futtermauer ist. Als Punkte der Fehlercurve, deren Schnitt mit

diesem Halbkreis die vordere Kante geben soll, kann man den Schnitt der letzten Seilpolygonseite mit der vordern Wandfläche betrachten. Denn diese Linien ändern gleichzeitig ihre Lage und sollen sich auf diesem Halbkreis schneiden. Die so entstehende Fehlercurve fällt, wie man sieht, beinahe mit der letzten Seilpolygonseite zusammen; wenn es daher auf keine besondere Genauigkeit ankommt, so kann man sich mit einmaliger Construction des Kräftepolygons begnügen und die vordere Kante da annehmen, wo die letzte Polygonseite das Fundamentauflager oder einen gegebenen Kreis etc. schneidet.

Nachdem so die Stärke der Futtermauer bestimmt war, wurde noch das eigentliche mit dem einfachen Erddruck f construirte Seilpolygon eingezeichnet, dessen letzte Seite das Fundamentauflager natürlich im Innern des Mauerwerks schneiden muss.

Jetzt auch noch die Fundamenttiefe, wie auf Tafel 31, zu bestimmen, halten wir für vollkommen überflüssig, weil erstens die Construction derselben schon bekannt ist und wir zweitens diese Art der Bestimmung der Fundamenttiefe, wie wir weiter oben schon bemerkten, nicht für besonders praktisch halten.

165. Stärke gewöhnlicher nicht überhöhter Stützmauern.

In den vorigen Nummern haben wir gezeigt, wie die Stärke von Stütz- und Futtermauern ganz allgemein für beliebig überhöhte und belastete Erdkörper bestimmt werden kann; in der Regel aber sind die Verhältnisse nicht so complicirt und es handelt sich meistens nur darum, die Stärke für Stützmauern vor einem oben horizontal begrenzten Erdkörper zu bestimmen.

In diesem Falle vereinfachen sich die Constructionen so bedeutend, dass es nicht schwer wird, sie für verschiedene Anläufe auf einem und demselben Blatte so zu vereinigen, dass sie jene berechneten Tafeln ersetzen können, denen man gewöhnlich die Dimensionen der Stützmauerstärken entnimmt. Ausserdem aber lösen sie noch durch die, graphischen Darstellungen eigenthümliche Uebersichtlichkeit, direct verschiedene Fragen bezüglich der zweckmässigsten Form der Stützmauer. Auf Taf. 33 und 34 haben wir einige solcher graphischen Tafeln gegeben. Die Construction ist die gleiche für alle vier Zusammenstellungen; wir können uns

daher damit begnügen, sie für eine dieser Tafeln zu erklären und wählen hierzu Taf. 33_2, wo die Stützmauerstärken bei verschiedenen Anläufen für die gewöhnlichen Verhältnisse $\varphi = 35^0$, $\varphi_1 = 15^0$ und $\frac{\varpi}{\varpi_1} = 1{,}5$ construirt sind.

Wir nahmen an, es gehe die hintere Wandfläche immer durch den Punkt O und haben den Erddruck für Richtungen, die je 5^0 von einander abweichen, bestimmt. Ueber der obern Begrenzungsfläche wurde die Verticale mit o und dann die folgenden, sowie die vorausgehenden hintern Wandflächen fortlaufend numerirt. Die obere Breite der Stützmauer wurde zu ein Zehntel der Höhe angenommen. Wir werden später zeigen, dass eine Mauer bei fester Rückwand, im Uebrigen aber unter gleichen Verhältnissen desto weniger Mauerwerk verlange, je grösser der vordere Anlauf, je kleiner also die obere Breite angenommen wird; da man aber füglicher Weise dieselbe nicht $= 0$ annehmen kann, so haben wir sie zu ein Zehntel der Höhe angenommen. Ein constantes Minimum von 0,6—0,7 Mtr. für diese Breite würde einen bestimmten Maassstab bedingen und die Taf. 33 und 34 würden ihre Allgemeinheit verlieren. Die Endpunkte dieser obern Breiten wurden unter der obern Begrenzungsfläche des Geländes ebenfalls mit den entsprechenden Nummern versehen.

Es ist jetzt nichts mehr unbestimmt, als wie die Richtung der vordern Wand, deren obere Kante schon durch Annahme der obern Stützmauerbreite gegeben ist. Um diese zu erhalten, wurde nun zunächst der Erddruck durch l bestimmt, es geschah ganz wie auf Taf. 28_1 und Fig. 222. Diese Constructionen bedürfen daher durchaus keiner weitern Erläuterung mehr, und wir bemerken nur, dass die Endpunkte der l mit kleinen Ringen und der entsprechenden Ziffer bezeichnet sind, welche den am Ende bei 5 mit l bezeichneten Zug bilden. Laut Nr. 160[a] S. 578 ist der Erddruck:

$$F = {}^1/_2\, \varpi_1\, \sigma\, sin\, \tau\, l^2,$$

worin alle Buchstaben die frühere Bedeutung haben. Wir werden später sehen, dass dieser Druck auf die Basis $^2/_3\, h$ von Mauerwerk in der Art zu reduciren sei, dass wenn die Linie f diesen Erddruck darstellt:

$$F = {}^2/_3\, f h\, \varpi = {}^1/_2\, \varpi_1 \sigma\, sin\, \tau\, l^2$$

sei. Wir bringen diese Gleichung in die Form:

$$\frac{4\,\varpi}{3\,\sigma\,\varpi_1} \cdot \frac{h}{\sin\,\tau}\,f = l^2,$$

da $\frac{\varpi}{\varpi_1} = \frac{3}{2}$ und $\sigma = 2$ der Sicherheitscoefficient ist, so ist der Coefficient $\frac{4\,\varpi}{3\,\sigma\,\varpi_1} = 1$ und die obige Gleichung reducirt sich auf:

$$\frac{h}{\sin\,\tau} \cdot f = l^2.$$

Um hieraus f zu construiren, tragen wir senkrecht auf das bekannte l die Längen $\frac{h}{\sin\,\tau}$ auf; die Endpunkte derselben liegen alle auf einer in der Entfernung $\frac{4\,\varpi}{3\,\sigma\,\varpi_1}\,h = h$ von O senkrecht auf die natürliche Böschung gezogenen Linie; denn diese Linie bildet mit dem Strahl $\frac{h}{\sin\,\tau}$ (siehe Taf. 33_2) den gleichen Winkel, als wie die natürliche Böschung mit dem l, weil die Schenkel senkrecht auf diesen Linien stehen, also den Winkel τ; woraus unmittelbar folgt, dass die Länge des so bezeichneten Strahls von O wirklich $= \frac{h}{\sin\,\tau}$ sei. Verbindet man den Endpunkt desselben mit dem des l und zieht man im letztern Punkt eine Senkrechte auf die Verbindungslinie, so schneidet sie auf der Verlängerung von $\frac{h}{\sin\,\tau}$ das gesuchte f ab. Die Endpunkte aller f sind mit Ringchen und den entsprechenden Ziffern und der Zug, den alle diese Endpunkte miteinander bilden, mit ff auf Taf. 33_2 bezeichnet.

Diese Kraft F, welche mit der hintern Wand der Stützmauer den Winkel $90 - \varphi_1 = 75^0$ bildet, wurde nun ganz wie auf Taf. 32 mit dem verticalen Gewicht des Dreiecks, welches die obere Breite der Stützmauer zur Basis und den Punkt O zur Spitze hat, dann mit dem Dreieck, welches die untere Breite der Stützmauer zur Basis, die obere vordere Kante zur Spitze hat, zusammengesetzt. Die Linien, durch welche diese Gewichte dargestellt werden, sind $= {}^3/_4$ der Basen der beiden Dreiecke; denn da die Kräfte alle auf ${}^2/_3\,h$ reducirt werden sollen, so muss:

$${}^2/_3\,h \,.\, {}^3/_4\,b\,\varpi = {}^1/_2\,b\,h\,\varpi$$

dem Gewicht jedes dieser beiden Dreiecke sein, wie es auch in der That der Fall ist. Die aus den f und allen verschiedenen ${}^3/_4$

Breiten zusammengesetzten Kräftepolygone wurden nicht; dagegen die den richtig bestimmten untern Breiten entsprechenden Seilpolygone, die bei der jedesmaligen vordern Kante der Stützmauer endigen, ausgezogen.

Genau auf dieselbe Weise wurden die Stützmauerstärken Taf. 33_1 für $\varphi = 30$, $\varphi_, = 10$, $\frac{\varpi}{\varpi_,} = \frac{6}{5}$ und $\sigma = 2$ construirt. Der Coefficient $\frac{4\varpi}{3\sigma\varpi_,} h$ wird in diesem Falle $= {}^4/_5 h$.

Taf. 34_1 wurde vorzugsweise gezeichnet, um zu zeigen, dass die Curve, welche die sämmtlichen vordern Profillinien der Stützmauer umhüllen und auf die wir später zurückkommen werden, einen Rückkehrpunkt hat, und dass dieser über die Basis der Stützmauer hinaufreichen kann.

In dieser Figur wurden die meisten Constructionslinien weggelassen und nur der Zug der l und der Zug durch Ringehen angegeben, den die erste Ecke des Seilpolygons, die unter dem Schwerpunkt des Dreiecks liegt, das die obere Breite der Stützmauer zur Basis hat, bildet. In dieser Figur ist:

$$\varphi = 15^0,\ \varphi_, = 5^0 \text{ und } \frac{\varpi}{\varpi_,} = \frac{6}{5};\ \sigma = 2.$$

Auf Taf. 34_2 endlich wurden die Stärken von Stützmauern construirt, hinter denen Wasser steht; es ist also für diese $\varphi = \varphi_, = 0$, $\frac{\varpi}{\varpi_,} = \frac{6}{5}$, $\sigma = 2$. In diesem Falle ist der Druck auf die hintere Wand der Länge derselben proportional, weil ihr Schwerpunkt, ihre Mitte, immer gleich tief unter der Oberfläche des Wassers liegt. Soll dieser Druck durch f dargestellt werden, so muss, weil wie früher auf die Mauerwerkbasis ${}^2/_3 h$ reducirt werden soll, er gleich

$${}^2/_3 h f \varpi_, = \sigma \,.\, {}^1/_2 h \,.\, l \varpi$$

sein, worin l die Länge der hintern Wand bezeichnet, denn ihr Schwerpunkt liegt ${}^1/_2 h$ unter der Oberfläche des Wassers.

Hieraus ergiebt sich:

$$f = \frac{3\varpi\sigma}{4\varpi_,} \,.\, l = \frac{5}{4} \,.\, l,$$

wenn man für $\frac{\varpi_,}{\varpi}$ die obigen Werthe von ϖ $\varpi_,$ und σ substituirt. Die Construction dieser f beschränkt sich also einfach darauf, in der Höhe von ${}^1/_4$ der ganzen Höhe eine Parallele über und zur obern Be-

grenzungsfläche zu ziehen, welche dann auf jedem Strahl von O das entsprechende f abschneidet. Wenn man die Kräftepolygone bei O beginnen lässt und sich dieselben um 90° gedreht denkt, so befindet sich dieses f auch schon in der zur Zusammensetzung mit dem jetzt horizontalen Gewicht der Stützmauer, in der geeigneten Lage. Auch auf Taf. 34_2 wurden die Kräftepolygone nicht, dagegen die Eckpunkte der Seilpolygone gezeichnet. Der Angriffspunkt des auf der hintern Wand jetzt senkrechten Erddrucks liegt im untern Drittel derselben, die ersten Ecken des Seilpolygons unter dem Schwerpunkt der Dreiecke, welche die obern Breiten der Stützmauer zur Basis haben, sind mit Ringchen, und die zweiten Ecken in der Verticalen durch die Schwerpunkte der Dreiecke, welche die untern Breiten zur Basis haben, aber mit Sternchen bezeichnet.

166. Directe Construction von Mauerkörpern, welche gegebenen Kräften widerstehen können.

Wir haben in Nr. 163 S. 600 und Nr. 164 S. 608 gezeigt, wie die Stärken von Stützmauern beliebigen Querschnitts durch Probiren mittelst Fehlercurven bestimmt werden können, und in der vorigen Nummer konnte vorausgesetzt werden, dass die richtigen Stärken auf dieselbe Weise bestimmt worden seien; wenn aber so wie in diesen Fällen das Profil so einfach ist, dass es bei sich ändernder Stärke nur um Dreiecke oder Parallelogramme zunimmt, so kann man durch Uebersetzung der folgenden analytischen Ableitung auch sehr rasch zur gesuchten Stärke gelangen. Fig. 233 zeigt diese Constructionen für den Fall, in welchem bei gegebener oberer Vorderkante die gesuchte Form des widerstehenden Mauerkörpers ein Dreieck ist.

Es sei F die Kraft, welche gegen die hintere gegebene Wand des Dreiecks wirkt.

p der bekannte Perpendikel von O auf die Richtungslinie der Kraft F.

x die gesuchte untere Breite der Stützmauer.

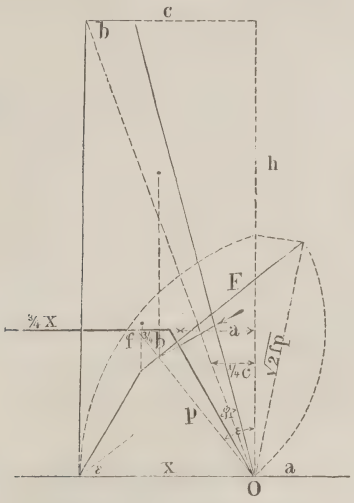
ε der Winkel, den sie mit F oder einer Parallelen zu F bildet.

Dann ist $p - x \sin \varepsilon$ der Perpendikel von der vordern Stütz-

mauerkante auf die Kraft F, also der Hebelsarm in Bezug auf die vordere Kante, um welche F die Stützmauer zu drehen sucht, und das Moment dieser Kraft in Bezug auf diesen Punkt ist:

$$F\,(p - x\,sin\,\varepsilon).$$

Fig. 233.



Diesem Moment widersteht das des Dreiecks. Bezeichnet man daher mit c die Entfernung der obern Kante desselben von der durch O gehenden Verticalen, so ist die Entfernung des Schwerpunktes dieses Dreiecks von der untern vordern Kante:

$$= {}^1/_3\,(x + (x - c)) = {}^1/_3\,(2\,x - c),$$

wobei vorausgesetzt wird, dass x horizontal liege. Das Moment dieses Dreiecks bezüglich seiner vordern Kante ist daher:

$${}^1/_6\,(2\,x - c)\,h\,x\,\varpi.$$

Setzt man daher dieses dem Moment von F, das man sich schon mit dem Sicherheitscoefficienten multiplicirt zu denken hat, gleich, so erhält man:

$${}^1/_6\,\varpi\,h\,x\,(2\,x - c) = F\,(p - x\,sin\,\varepsilon),$$

um x^2 von seinem Coefficienten zu befreien und alle übrigen Glieder der Gleichung mit dem Coefficienten 2 zu versehen, bringen wir diese Gleichung unter die Form:

$$x\left(x + 2\left(\frac{F}{{}^2/_3\,h\,\varpi}\,sin\,\varepsilon - {}^1/_4\,c\right)\right) = 2\,.\,\frac{F}{{}^2/_3\,h\,\varpi}\,p.$$

Hier ist $\frac{F}{{}^2/_3\, h\, \omega}$ der auf die Mauerwerkbasis ${}^2/_3\, h\, \omega$ reducirte Druck auf die hintere Mauerfläche. Wir haben in der vorigen Nummer diesen immer mit f bezeichnet, setzt man dann noch:

$$f \sin \varepsilon - {}^1/_4\, c = a,$$

so erhält man zur Construction von x den einfachen Ausdruck:

$$x\,(x + 2\,a) = 2\,f\,p.$$

Um f zu erhalten, das wir auf der Senkrechten zu F brauchen, haben wir uns das Kräftepolygon um 90° gedreht gedacht, den auf ${}^2/_3\, h\, \omega$ reducirten und mit dem Sicherheitscoefficienten multiplicirten Erddruck von O aus senkrecht auf ihn aufgetragen, er bildet dann mit der hintern Wand den Winkel φ_1, am Endpunkt desselben fügten wir das Gewicht des Dreiecks, das die obere Breite b zur Basis hat und das nach Nr. 165 S. 610 durch ${}^3/_4\, b$ dargestellt wird, bei und erhielten so den Endpunkt des f, der auch mit diesem Buchstaben bezeichnet ist. Die Richtungslinie selbst von F steht senkrecht auf f und geht durch den Punkt, in welchem der Erddruck die Verticale durch den Schwerpunkt des Dreiecks, das b zur Basis hat, schneidet.

Die Entfernung des Endpunktes von f von der Verticalen h durch O ist $= f$ im ε; zieht man hiervon noch ${}^1/_4\, c$, das im untern Viertel von h an der Stelle, wo es in der Figur angedeutet ist, abgegriffen werden kann, ab, so bleibt a. Wir tragen es von O aus rückwärts in der Basis auf, indem wir es später hier brauchen werden.

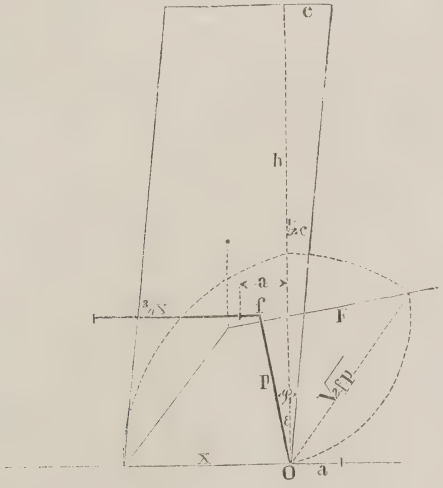
Ein Kreisbogen, der vom Endpunkt von f als Radius aus durch O beschrieben wird, schneidet F in der Entfernung $\sqrt{2\,f\,p}$ von O. Denn der Durchmesser des Kreisbogens ist $2\,f$ und die Projection dieses $\sqrt{2\,f\,p}$ auf den durch seinen Endpunkt O gehenden Durchmesser $= p$. Wird nun das $\sqrt{2\,f\,p}$ mittelst eines Kreisbogens, der O zum Mittelpunkt hat, auf h und der jetzt erhaltene Punkt mittelst eines weitern Kreises, der das Ende von a zum Mittelpunkt hat, auf die Basis herunter geschlagen, so bestimmt der letzte Kreis den Endpunkt von x. Denn der Durchmesser des letzten Kreises ist $= 2\,(x + a)$, demnach die Segmente rechts und links von O sind x und $x + 2\,a$, da endlich die Ordinate dieses Kreisbogens in diesem Punkte $O = \sqrt{2\,f\,p}$ ist, so genügt das x der zu construirenden Gleichung $x\,(x + 2\,a) = 2\,f\,p$.

Zur Controle kann man jetzt noch das begonnene Kräftepolygon durch Beifügung des Gewichts des Dreiecks ergänzen, welches die untere Breite zur Basis hat und durch $^3/_4\,x$ dargestellt wird; dann muss die Seilpolygonseite, welche auf dem den Endpunkt von $^3/_4\,x$ projicirenden Strahl von O senkrecht steht und durch den Punkt geht, in welchem F die Verticale durch den Schwerpunkt des letztern Dreiecks schneidet, auch durch den Endpunkt von x gehen.

Gar rasch und genau lässt sich die eben erläuterte Construction ausführen, weil man die drei Kreisbogen nicht wirklich zu zeichnen, sondern ihre Endpunkte nur mit den Zirkelspitzen abzustechen braucht, ohne irgend Linien ziehen zu müssen. Alle Stützmauerstärken auf Taf. 33 und 34 wurden auf diese Weise construirt; es liegt auch hierin der Grund, warum wir alle Erddrücke auf die Mauerwerksbasis $^2/_3\,h\,\varpi$ reducirt und warum wir das Kräftepolygon um 90° gedreht haben. Wir bemerken noch für diejenigen, welche vielleicht Lust haben sollten, einige dieser Stärken zu controliren, dass Fig. 233 die Construction der Stärke 3 Taf. 33_2 ist.

Ist der vordere Theil der Stützmauer ein Parallelogramm (siehe Fig. 234), so ist die Entfernung des Schwerpunktes desselben von der vordern Kante bei der in die Figur eingetragenen Be-

Fig. 234.



deutung der Buchstaben $= {}^1/_2 (x + c)$ und daher das Moment derselben bezüglich dieser Kante gleich:

$$ {}^1/_2 (x + c)\, x\, h\, \varpi = F (p - x \sin \varepsilon), $$

das man auf die folgende Form bringen kann:

$$ x \left(x + 2 \left(\frac{F}{h\, \varpi} \sin \varepsilon + {}^1/_1\, c \right) \right) = 2 \frac{F}{h\, \varpi} \cdot p. $$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem obigen nur dadurch, dass man F auf die Mauerwerksbasis h, statt ${}^2/_3\, h$ zu reduciren und ${}^1/_2\, c$, statt ${}^1/_4\, c$ zu nehmen hat. Das Zeichen von c ist in beiden Fällen das gleiche, wenn man berücksichtigt, dass c in Fig. 233 und 234 entgegengesetzte Lagen haben.

Setzt man entsprechend dem obigen:

$$ \frac{F}{h\, \varpi} = f $$

und:
$$ f \sin \varepsilon + {}^1/_2\, c = a; $$

so wird wie oben:

$$ x (x + 2 a) = 2 f p. $$

Die Construction und schliesslich die Probe dieses Ausdrucks wurde Fig. 234 ausgeführt; sie ist genau die gleiche als wie in Fig. 233 und bedarf daher durchaus keiner nähern Erläuterung mehr.

Diese letzte Construction kann sehr gute Dienste bei Bestimmung der Widerlagerstärken leisten, welche einem gegebenen Gewölbschub zu widerstehen haben.

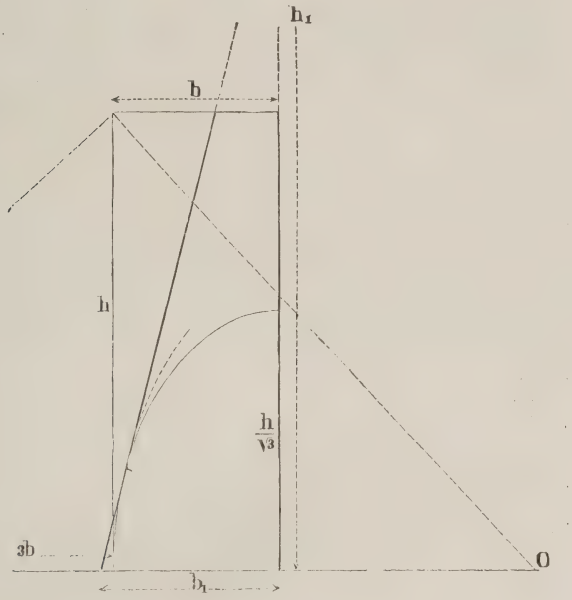
167. Aenderung des vordern Anlaufs einer Stützmauer bei constanter hinterer Begrenzung.

Im Eingang der Nr. 165 S. 609 haben wir behauptet, es sei vortheilhaft, die obere Breite der Stützmauer so schmal als möglich anzunehmen; um dies zu beweisen, wollen wir untersuchen, wie die vordere Wand geändert werden müsse, wenn bei veränderlichem Anlauf das Moment der Mauer bezüglich ihrer vordern untern Kante constant bleiben soll.

Als Ausgangspunkt des Vergleichs wählen wir die verticale vordere Wand. Die hintere Begrenzung kann eine beliebige, z. B. eine krummlinige sein, wir verwandeln sie aber durch eine Ver-

ticallinie in der Art, dass wenn Fig. 235 b den Abstand zwischen dieser Verwandlungslinie und der vordern Wand bezeichnet, das der Querschnittsfläche proportionale Gewicht der Stützmauer dem

Fig. 235.



Rechteck $b\,h$ gleich gesetzt werden kann. Der Abstand des Schwerpunktes dieser Querschnittsfläche von der vordern Wand mag $= q$ gesetzt werden, dieser Abstand hängt natürlich von der Form der verwandelten hintern Begrenzungslinie ab. Das Moment der ganzen Mauer ist also $b\,h\,q$ proportional.

Eine andere vordere Begrenzungslinie mit Anlauf schneide die hintere Wand in der Höhe h_1 (siehe die Figur) und das Auflager habe die Breite b_1. Das Moment der so veränderten Querschnittsfläche drücken wir aus:

1) Durch das Moment der frühern Fläche $b\,h$ in Bezug auf die neue vordere Kante. Die Entfernung des Schwerpunktes von diesem ist jetzt in Folge dessen, dass diese vordere Kante um $b_1 - b$ weiter hinausgeschoben worden ist, $q + b_1 - b$ und das Moment $(q + b_1 - b)\,b\,h$.
2) Mehr dem Moment des kleinen Rechtecks über der Verbreiterung $b_1 - b$, es ist $= {}^1/_2\,(b_1 - b)^2\,h$.

3) Weniger dem Moment des Dreiecks über dem Anlauf. Die obere Breite desselben ist $b_1 \frac{h}{h_1}$, demnach ist das Moment desselben bezüglich des Endpunktes von $b_1 = {}^1/_6 \left(b_1 \frac{h}{h_1}\right)^2 h$.

Soll nun das Moment dieser verwandelten Stützmauer dem der frühern gleich sein, so hat man:

$$b\,h\,q = b\,h\,(q + b_1 - b) + {}^1/_2\,(b_1 - b)^2\,h - {}^1/_6\,b_1{}^2\,\frac{h^3}{h_1{}^2}$$

oder:

$$\frac{b^2}{b_1{}^2} + \frac{{}^1/_3\,h^2}{h_1{}^2} = 1.$$

Die Gleichung eines auf seine Axen bezogenen Strahlenbüschels zweiter Ordnung, wenn b_1 und h_1 die veränderlichen Abschnitte der Axen sind und senkrecht aufeinander stehen (siehe Nr. 61 S. 164). Die Halbaxen der Ellipse, die er umhüllt, sind:

$$b_1 = b \text{ und } h_1 = \frac{h}{\sqrt{3}} = 0{,}5774\,h.$$

Die Gleichung des Strahlenbüschels enthält kein q mehr; es geht hieraus hervor, dass bei dieser Verwandlung die hintere Begrenzung ganz gleichgültig ist und man sie immer in eine verticale verwandeln kann. Ist sie geradlinig, allein nicht vertical, so geht die hintere Verwandlungslinie der h_1 durch die Mitte derselben.

Ist die hintere verticale Abgleichungslinie eingezogen, so kann man auf derselben die Länge $0{,}5774\,h$ abstechen, die Ellipse einzeichnen und nun beliebige vordere Profillinien mit jedem gewünschten Anlauf tangirend an die Ellipse ziehen; sie werden alle gleich grosse Momente bezüglich ihrer vordern Kante haben. Oder man kann auch nach bekannten Regeln direct Linien construiren, deren Anlauf gegeben ist und welche die Ellipse berühren, deren Axen gegeben sind.

Ist der Anlauf nicht sehr bedeutend, so kann man dadurch die Construction sehr vereinfachen, dass man die Ellipse durch ihren Osculationskreis ersetzt. Der Halbmesser desselben ist $= \frac{h^2}{3\,b}$. Um den Mittelpunkt O Fig. 235 desselben zu erhalten, hat man einfach $3\,b$ vor der Stützmauer aufzutragen, den Endpunkt von $3\,b$ mit dem von h zu verbinden und dort eine Senkrechte auf diese

Verbindungslinie zu ziehen, so schneidet diese auf der Basis den Krümmungsmittelpunkt O ab. Uebrigens ist auch, namentlich mittelst eines Rechenschiebers, $\frac{h^2}{3b}$ gar schnell gerechnet.

In dem Fig. 235 gezeichneten Falle fallen die Ellipse und der Osculationskreis noch bis zu einem Anlauf von $^1/_4$ vollständig zusammen. Bei noch grösserem Anlauf aber wäre es zweckmässig, die Ellipse zu construiren.

In der obigen Entwickelung sind wir von dem rechteckigen Querschnitt ausgegangen, ohne deshalb die Allgemeinheit zu beschränken, weil in diesem Falle auch alle übrigen Fälle inbegriffen sind. In der That ist durch die vom vordern Anlauf unabhängige Richtung und Grösse der Axe h_1, durch die Richtung der Axe b_1 und durch den vordern Anlauf als Tangente der Ellipse diese vollständig bestimmt und nun leicht zu construiren. Da übrigens diese Constructionen selten vorkommen, so wollen wir uns nicht mehr länger mit denselben aufhalten.

168. Der zweckmässigste Querschnitt einer Stützmauer.

Die Ellipse, welche der vordere Anlauf einer Stützmauer umhüllen muss, wenn das Moment der letzteren bezüglich ihrer untern vordern Kante constant bleiben soll, zeigt, dass die obere Breite der Stützmauer so klein als möglich angenommen werden muss: denn da die verticale Axe der Ellipse nur 0,577 der Höhe ist, so fällt der Berührungspunkt der flachsten vordersten Wand, die überhaupt noch anwendbar ist, selbst der einer gewöhnlichen Erdböschung, in die untere Hälfte der Stützmauer. Wenn daher die Wand die Ellipse, von der Verticalen ausgehend, so beschreibt, dass sie dieselbe beständig berührt, so bewegt sich die Mitte der erstern beständig in dem gleichen Sinne gegen den Erdkörper hin und *vermindert* die Querschnittsfläche der Mauer. Diese Querschnittsfläche ist daher desto kleiner, je kleiner die obere Breite der Mauer ist, am kleinsten, wenn sie $= 0$ ist, weil negative obere Breiten unzulässig sind. Der zweckmässigste Querschnitt einer Stützmauer ist daher *ein Dreieck*. Da aber die Spitze

eines Dreiecks praktisch unausführbar ist, so haben wir Nr. 165 S. 609 die obere Breite zu $^1/_{10}$ der Höhe angenommen.

Ist die obere Breite auf diese Weise bestimmt, so wächst die Querschnittsfläche mit der untern Breite; das Gesetz aber, nach welchem sich die ändert, wenn die obere Breite vor- und zurückgeschoben wird, und man sich dabei die hintere untere Kante fest denkt: wird am anschaulichsten durch die Curven auf Taf. 33 und 34 ausgedrückt, welche die vordern Wände bei dieser Bewegung der obern Breite umhüllen.

Taf. 33_2 giebt die Stärken für Stützmauern, welche gewöhnliche Erde stützen, innerhalb der Grenzen, die man dem Anlauf der Mauern geben kann. Taf. 33_1, die Stärken bei ungünstigeren Verhältnissen, bei verhältnissmässig kleineren Reibungswinkeln und bei grossem Gewicht der Erde, gegenüber dem Mauerwerk, z. B. bei schlüpferigem schwerem Boden, der von einer Backsteinmauer gestützt wäre. Die Coefficienten stehen auf der Tafel.

In beiden Figuren schneiden die umhüllten Curven die Basis der Stützmauer nicht und haben innerhalb der bezeichneten Grenzen keine Spitzen und keine Inflectionspunkte. So lange sich daher die obere Breite in dem gleichen Sinne bewegt, bewegt sich auch der Endpunkt der untern Breite in gleichem Sinne. Und zwar: nimmt die untere Breite beständig zu, wenn die obere von dem Erdkörper sich entfernt, sich nach aussen bewegt. Oder: die Stützmauer kostet desto weniger Mauerwerk, je grösser der Anlauf angenommen wird.

Um zu untersuchen, ob diese Regel allgemein gelte und ob die umhüllten Curven vielleicht keine Spitzen und Rückkehrpunkte haben, wurden Taf. 34 die Curven für abnorme Verhältnisse und Anläufe gezeichnet. Bei sehr kleinen Reibungswinkeln und überhängenden Stützmauern zeigt Taf. 34_1, dass die Curve eine Spitze hat und dass diese Spitze über der Basis der Stützmauer liege. In Folge dessen entstehen in dem Gebilde, welches die vordere Kante in der Basis beschreibt, wenn die obere Breite sich nach aussen bewegt, zwei Rückkehrpunkte, welche den Schnitten der beiden Arme der Curve mit der Basis entsprechen. Wenn sich also die obere Breite, von der Lage 13 auf der Erdseite beginnend, nach aussen hin bewegt, so nimmt die untere Breite beständig zu, bis zur Lage 1 vor der 0. In dieser Lage aber ist die untere Breite

ein relatives Maximum; bewegt sich die obere Breite weiter im frühern Sinne, so nimmt die untere Breite ab und zwar bis in die Lage 5 jenseits der 0.

Jetzt ist die untere Breite ein relatives Minimum, sie ist kleiner als alle Breiten jenseits der 3 vor der 0; bewegt sich die obere Breite noch weiter, so nimmt die Stärke der Stützmauer beständig zu. In der Praxis betrachtet man grössere Anläufe als von $^1/_4$ und anderseits überhängende Wände als unzulässig; da nun alle Anläufe zwischen den zulässigen Grenzen 0 und $^1/_4$ die Strecke der Basis zwischen den beiden Armen der Curve schneiden: so folgt, dass bei den Coefficientenverhältnissen von Taf. 34_1 unter allen zulässigen Anläufen der von Nr. 5, also ganz nahezu die verticale vordere Wand, der zweckmässigste sei, d. h. am wenigsten Mauerwerk erfordere.

Taf. 34_2 haben wir noch die Stützmauerstärken bei Wasserdruck construirt. Die Curve, welche die vordere bewegliche Wand umhüllt, liegt innerhalb weiter, noch weit in's Unzulässige ragender Grenzen, ganz über der Basis und ist derart gekrümmt: dass die Stützmauerstärke bei der Bewegung der obern Breite beständig abnimmt. Die verticale Lage der vordern Wand oder gar eine überhängende, Mauer erfordert also bei Wasserdruck den geringsten Materialaufwand.

Wir haben jetzt gezeigt, wie aus der Form der Curve auf das Gesetz geschlossen werden kann, nach welchem sich die Breite mit dem Anlauf ändert; einen möglichst vollständigen und anschaulichen Ueberblick würde man erhalten, wenn man auf einem und demselben Blatt die Schaaren der Curven verzeichnen würde, die sich aus der Aenderung von φ und φ_1 oder von ϖ und ϖ_1 ergeben. In Taf. 34_1 haben wir die vier construirten Curven eingetragen; Aufgabe einer besondern Untersuchung, nicht der graphischen Statik, die ja nur Methoden zu untersuchen hat, wäre es jetzt, die Lücken zwischen diesen weit von einander abstehenden Curven durch solche Schaaren auszufüllen. Dann würde auch der Einfluss von φ und φ_1 oder von ϖ und ϖ_1 anschaulich werden, wenn man in der einen Schaar die φ, in der andern die ϖ sich ändern liesse.

169. Approximative Stärke der Stützmauern.

Der Anlauf der Stützmauern variirt innerhalb sehr enger Grenzen. Ueberhängende Mauern sind unzulässig und gegen das Gelände wird, ausgenommen bei Trockenmauern, selten ein stärkerer Anlauf, als von $^1/_4$ gegeben; manche Schriftsteller betrachten sogar $^1/_3$ als Grenze; wir wollen $^1/_4$ als äusserste Grenze betrachten.

Zieht man nun durch den Schnitt dieser äussersten Grenzlagen der vordern Wand, also durch den Schnitt der verticalen und der $^1/_4$maligen Anlauf bildenden Tangenten an die umhüllte Curve, eine Horizontallinie: so wird das Segment derselben zwischen diesem Schnittpunkt und der Curve, von allen vordern Wandlinien innerhalb der angenommenen Grenzen geschnitten.

Dieses Segment ist aber bei den vier construirten Figuren so klein, dass man es kaum messen kann; man begeht daher einen kaum messbaren Fehler, wenn man innerhalb der angenommenen Grenzen alle Wandlinien durch die Mitte dieses Segmentes führt. Diese Mitten sind auf Taf. 33 und 34 durch Ringchen angegeben, ausserdem ist noch Taf. 33_2 das Dreieckchen ausgezogen, in dessen mittlerer horizontaler Breite der angenommene Punkt liegt. Bei allen übrigen Figuren war diese Breite so klein, dass man die Mitte nicht mehr construiren, sondern nur schätzend einstechen konnte. Die ganze Breite des Dreieckchens ist in dieser Figur nur gleich 0,015 der Höhe, die untere Breite bei verticaler Vorderwand = 0,4, die obere 0,1, daher ist der Maximalfehler, der begangen wird, wenn man die Vorderwand immer durch diesen Punkt führt, $^1/_2 \cdot \frac{0{,}015}{0{,}5} \cdot \frac{1}{1{,}44}$ oder gleich 0,0104. Die letzte Verhältnisszahl muss beigefügt werden, weil der Punkt nicht in der Basis der Stützmauer, sondern um 0,44 der Höhe 1 unter derselben liegt. Dieser Fehler ist viel kleiner, als die Genauigkeit, auf die man bei Bestimmung der Stützmauerstärken überhaupt rechnen darf, und vollkommen genügend für alle Fälle der Praxis. Alle ihre Formeln für approximative Berechnung der Stützmauerstärke sollten daher durch die Coordinaten der eben construirten Punkte ersetzt werden, die wir in der folgenden klei-

nen Tafel mit den zugehörigen Werthen von φ und ϖ nochmals zusammenstellen:

Taf.	φ	φ_1	$\frac{\varpi_1}{\varpi}$	x	y
33_2	35	15	$^3/_2$	$0{,}40\,h$	$+\ 0{,}44\,h$
33_1	30	10	$^6/_5$	$0{,}46\,h$	$+\ 0{,}21\,h$
34_1	15^0	5^0	„	$0{,}53\,h$	$-\ 0{,}02\,h$
34_2	0	0	„	$0{,}56\,h$	$-\ 0{,}15\,h$

Mittelst dieser Ordinaten wird nun das Profil der Stützmauer wie folgt für die entsprechenden φ und ϖ construirt: man trage von der angenommenen untern Kante der hintern Wand aus x nach vorn in der Basis, $+y$ senkrecht darauf nach unten auf, führe durch den so bestimmten Punkt eine Linie mit dem gewünschten Anlauf, nehme die obere Breite zu $^1/_{10}$ der Höhe an und das Profil ist bestimmt.

Aus dem in der vorigen Nummer aufgestellten Gesetze geht wiederum klar hervor: so lange die Reibung bedeutend ist, liegt der Punkt, um den sich die vordere Wand dreht, unter der Basis: die Breite der Mauer ist daher desto geringer, je grösser der Anlauf der vordern Wand ist. Mit abnehmender Reibung nähert sich der Drehpunkt der Basis; liegt er in der Nähe derselben, wie z. B. in Taf. 34_1, so ist es beinahe ganz einerlei, welchen Anlauf man der Mauer gebe; nimmt die Reibung noch mehr ab, nähert sie sich der 0, so steigt der Drehpunkt über die Basis hinauf, und es ist dann vortheilhaft, die Mauer möglichst steil oder gar überhängend zu machen. Dieses Verhalten ist auch an und für sich erklärlich; ist die Reibung bedeutend, so nimmt der Erddruck ausserordentlich rasch ab, wenn sich die hintere Wand der natürlichen Böschung nähert, es ist daher vortheilhaft, den Winkel, den sie miteinander bilden, möglichst klein anzunehmen; ist aber die Reibung sehr klein oder gar $= 0$, wie bei Wasser z. B., so ist der Druck ganz unabhängig von diesem Winkel, dagegen nimmt der Hebelsarm dieses Druckes bezüglich der vordern Kante desto mehr ab, je mehr sich die hintere Wand einer gewissen Lage nähert, die immer überhängend ist, und die von der Parabel abhängt, welche der Druck bei dieser Bewegung beschreibt. Diese Parabel hat O zum Brennpunkt und die Horizontale im Drittel der Stützmauerhöhe

zur Scheiteltangente; es sind daher verticale oder gar, wenn es zulässig wäre, überhängende Wände in diesem Fall die zweckmässigeren. In der Praxis werden auch die meisten Umfassungswände von Wasserbehältern auf diese Weise construirt; rundet man z. B. noch das Profil 6 (Taf. 34_2) mit verticaler vorderer Wand hinten bei O ab, so hat man ganz das bei dem Bau der grossen Pariser Wasserbehälter angewendete Profil.

Aufgabe einer Baukunde wäre es jetzt, die auf Taf. 33 und 34 ausgeführten Constructionen zu vervollständigen, die Drehungspunkte der vordern Wandfläche für weitere φ und für weitere ϖ zu bestimmen; würde man dann alle Drehungspunkte der gleichen φ und alle die der gleichen ϖ mit einander verbinden: so würde man zwei sich kreuzende Liniensysteme erhalten, deren Kreuzungspunkte die oben erwähnten Drehpunkte wären. Das Verrücken der einen Schaar Linien würde der Aenderung der φ, das der andern der der ϖ entsprechen und so vollständigen Ueberblick der anzunehmenden Stärken geben.

Ebenso müssen auch alle Baudetails der Baukunde überlassen werden; dass man also zur Vergrösserung von φ, hinten Absätze anbringt, dass es aber dennoch immer kleiner als φ bleibt, und anderes Derartiges mehr.

Viertes Kapitel.

Druck auf Tunnelgewölbe.

---

170. Bestimmung des Druckes auf den untern Theil einer sich drehenden Wandfläche.

Um den Widerstand zu bestimmen, den ein Tunnelgewölbe dem Erddruck entgegenzusetzen hat, betrachten wir ein kleines Stück, ein Element der äussern Laibung, als Theil der hintern Wand einer Stützmauer, welche in der Verlängerung des Laibungselementes läge. Dann kann man annehmen, auf das Element wirke

die Differenz der Pressungen auf die Wand, wenn diese einmal das Element der äussern Tunnellaibung in sich, und einmal nicht in sich begreift. Sind auf diese Weise die Pressungen auf alle Elemente der Tunnellaibung ermittelt worden, so kann man nach den gewöhnlichen Regeln des Seilpolygons dieselben durch eine Drucklinie verbinden und so die Form des Tunnelgewölbes bestimmen.

Wird also dem Tunnelgewölbe ein Polygon umschrieben, so erfordern obige Constructionen je zwei Kräftebestimmungen für jede Ecke: eine für die vorausgehende und eine für die folgende Polygonseite, um alle Kräftedifferenzen zu erhalten, welche auf die einzelnen Polygonseiten wirken.

Diese Constructionen bieten durchaus keine Schwierigkeiten dar, und wir haben sie auf Taf. 36 durchgeführt. Bevor wir jedoch zur Erläuterung dieser Tafel übergehen, wollen wir noch die Frage erörtern, die im Tunnelbau von Interesse sein kann:

Wie gross muss die Reibung und die Cohäsion sein, damit der Druck auf das Tunnelgewölbe $= 0$ sei, oder damit das Gewölbe erspart werden könne?

Damit der Druck auf ein Tunnelelement nur auf das Element einer Wand, der es angehört, $= 0$ werde, muss der Druck auf die ganze Wand $= 0$ sein; denn nur dann wird auch der Druck unten, d. h. da, wo er am grössten ist, $= 0$ sein können.

Um diese Frage zu lösen, wollen wir untersuchen, wie der Druck mit Berücksichtigung der Cohäsion sich ändert, wenn die Richtung des Laibungselementes sich ändert; es genügt für diesen Zweck, den Druck auf eine hintere Wand, die ihre Richtung ändert, zu bestimmen, weil dieser Druck dem Druck auf das Element proportional ist. Diese Constructionen wurden auf Taf. 35 durchgeführt. Taf. 33 und 34 konnten hierfür nicht benutzt werden, weil die Blätter mit den Constructionen für die Bestimmung der Stützmauerstärke ohnedies schon überfüllt sind und weil auf Taf. 35 Richtungen der Laibungselemente berücksichtigt werden sollen, die die hintern Wände der Stützmauern nimmer annehmen, und die daher auf Taf. 33 und 34 ausgelassen werden konnten.

Nach den Regeln von Nr. 157 S. 570 und ganz Taf. 28 entsprechend wurde für die Richtungen zwischen der natürlichen Böschung, welche den Reibungswinkel $\varphi = 35^0$ von Erde auf Erde mit der Horizontalen bildet einerseits (rechts), und der vordern Wand, welche den Reibungswinkel $\varphi_1 = 15^0$ von Erde auf

Mauerwerk mit der Horizontalen andrerseits (links) bildet: der Erddruck mit Berücksichtigung der Cohäsion bestimmt. Der Winkel, den diese beiden äussersten Grenzen mit einander bilden, ist $= 180^0 - 35^0 - 15^0 = 130^0$; er wurde in 13 Theile getheilt, und für jeden der fortlaufend numerirten Theilstriche die Construction durchgeführt. Jene bilden demnach Winkel von 10^0 miteinander, und der Winkel, den die Wand Nr. 7 z. B. mit der natürlichen Böschung bildet, ist $= 70^0$. Zwischen Nr. 12 und 13 wurde es, wegen der raschen Aenderung des Erddrucks nothwendig, den Winkelabstand der einzelnen Theilstriche kleiner anzunehmen, und es wurde derselbe noch drei Mal halbirt; d. h. es wurde die Construction für Nr. $12^1/_2$, $12^3/_4$ und $12^7/_8$, welche Winkel von 125^0, $127^1/_2{}^0$ und $128^3/_4{}^0$ mit der natürlichen Böschung bilden, ausgeführt.

Die Cohäsion wurde gleich $^1/_2\ h$, gleich der halben verticalen Höhe der Wand, oder $=$ 4 Ctm. (unter denen man sich z. B. 4 Meter denken kann) angenommen. Mittelst derselben wurde Taf. 35_2 die Länge k construirt, und in der Nr. 157 angegebenen Weise verwendet.

Die Constructionen selbst bedürfen keiner Erklärung, sie sind identisch mit den auf Blatt Nr. 28; alle zusammengehörigen Linien tragen dieselbe Ziffer als Zeiger; es hat daher durchaus keine Schwierigkeiten, die zusammengehörigen Linien heraus zu finden. Wie gewöhnlich wurde die Construction zur Bestimmung der Gleitflächen 1—7 auf der obern Begrenzungsfläche des Erdkörpers vorgenommen; die Gleitflächen 8—$12^7/_8$ mussten auf einer Parallelen zu ihr im $^1/_3$ der Höhe ausgeführt werden, weil sie sonst nicht mehr auf das Batt gefallen wären. Immerhin liegen noch die Endpunkte der Tangenten 7, 9 und 10 jenseits desselben. Das Resultat dieser Construction ist die Curve F', welche die Endpunkte der Linien verbindet, welche den Erddruck, ohne Berücksichtigung der Cohäsion, darstellt; und die Curve der F, welche die Endpunkte des Erddruckes, mit Berücksichtigung der Cohäsion, darstellt.

Diese in verschiedenen Richtungen liegenden F und F' gestatten weder einen Vergleich zwischen den totalen Pressungen auf die ganze Wand, noch einen solchen zwischen den Pressungen auf das untere Wandelement, weil sie sich nicht auf eine gleich lange Basis, sondern auf die variable Doppelbasis beziehen, welche

gleich der Höhe des obern Wandendes über der natürlichen Böschung ist. Um daher die Pressungen auf die Wände direct mit einander vergleichen zu können, haben wir sie auf eine constante Doppelbasis von $^5/_4\,h$ (10 Ctmr.) reducirt, Taf. 35_3 von einem Punkte aus, parallel mit der Wandfläche aufgetragen, und ihre Endpunkte durch ausgezogene Curven miteinander verbunden. Ihre Radienvectoren bringen es am deutlichsten zur Anschauung, wie der Druck bei wechselnder Richtung der vordern Wand sich ändert.

Ferner wurden noch dieselben Pressungen auf die Länge der vordern Wand als Doppelbasis reducirt; Taf. 35_3 auch von dem Pol aus in der Richtung der Wand aufgetragen, und ihre Endpunkte durch punktirte Linien mit einander verbunden. Die Radienvectoren dieser Curven sind offenbar dem Druck auf das untere Ende der Wand, d. h. gerade der Kraft, auf die es in den meisten Fällen ankommt, genau proportional, wenn die Cohäsion nicht, dagegen nur approximativ proportional, wenn dieselbe berücksichtigt werden soll. Im ersten Fall ist der Druck auf jedes Wandelement seiner Entfernung von der obern Wandkante proportional, weil alle Figuren, welche zur Bestimmung desselben in verschiedenen Höhen dieser Wand dienen, ähnliche Figuren sind; da ferner der Druck bei der obern Kante $= 0$ ist, und demnach diese einer neutralen Axe der Wandfläche gleich geachtet werden kann, so folgt der Satz aus Nr. 82 S. 234. Die Analogie ist vollkommen, wenn man berücksichtigt, dass gerade so wie dort Q durch das äussere Drittel geht, so auch der Druck F' auf die Wandfläche im untern Drittel angenommen wird.

Der eben gegebene Beweis gilt nicht mehr für den Druck F, bei welchem die Cohäsion berücksichtigt werden soll. Nach Nr. 161 c S. 597 wird dadurch der Angriffspunkt von F herunter gerückt, und laut Nr. 160c S. 585 auf eine kleinere Fläche vertheilt. Wir bezeichnen daher die Radienvectoren der inneren punktirten Curve nur als den approximativen Druck auf den untern Theil der Wandfläche.

Den wirklichen Druck auf eine beliebige Länge der Wandfläche unten erhält man durch Multiplication dieser Länge mit den Radienvectoren von F' und F und mit dem Gewicht ϖ, der Cubikeinheit Erde. Was von jeder Länge gilt, gilt natürlich auch von der Längeneinheit, man kann daher auch sagen: die punktirten

Curven F' und F Taf. 35_3 stellen den Druck pro Längeneinheit am untern Ende der Wand dar.

171. Resultate der Constructionen des Erddrucks auf das untere Element einer sich drehenden Wand.

Aus Taf. 35 lesen wir die folgenden Resultate heraus:

Die Grösse des Drucks auf die vordere Wand oder die Länge der F' und F nimmt beständig zu mit dem Winkel, den jene mit der natürlichen Böschung bildet; man mag die Höhe der Wand über dieser (Taf. 35_1) oder Taf. 35_3 eine constante Länge $^5/_8\ h$, oder endlich die Wandlänge selbst als Reductionsbasis betrachten.

Wenn die Cohäsion nicht berücksichtigt wird, so wird für den Fall 13, also für den Fall, dass die vordere Wand mit der Horizontalen einen Winkel bildet, der dem Reibungswinkel φ, von Erde auf Mauerwerk gleich ist, F' gleich der ganzen Länge der natürlichen Böschung; denn aus der Natur der geometrischen Constructionen, aus denen die Curve der F' Taf. 35_1 hervorgeht, kann man unmittelbar schliessen, was übrigens auch die Figur selbst zeigt, dass die Curve der F' die natürliche Böschung an ihrem untern Ende berühre; da ferner auch von Constructionswegen das obere Ende von F' mit dem obern Ende der natürlichen Böschung zusammenfällt, so decken sich beide und F'_{13} ist gleich der totalen Länge der natürlichen Böschung. Da nun dieses F'_{13} noch mit der Höhe der obern Kante 13 über der natürlichen Böschung und mit dem Gewicht der Cubikeinheit Erde zu multipliciren ist, um den Druck F'_{13} zu geben: so folgt, dass dieser dem ganzen Gewicht des Dreiecks zwischen den Wandflächen 0 und 13 gleich sei. F'_{13} bildet mit 13 den Winkel $90 - \varphi$, und wirkt daher in einer Verticalen. Da endlich der Angriffspunkt im untern Drittel liegt, so ist F'_{13} in Grösse und Richtung vollständig bestimmt. Die Gleitfläche fällt von Constructionswegen in diesem Falle mit der natürlichen Böschung zusammen. Der Widerstand Q_{13}, den der stehenbleibende Erdkörper dem abrutschenden Prisma entgegensetzt, bildet den Winkel $90 - \varphi$ mit der Gleitfläche, d. h. mit der natürlichen Böschung, und wirkt daher auch in einer Verticalen; da er ferner gerade so wie F'_{13} im untern Drittel angreifen muss,

so ist auch Q_{13} vollständig bestimmt. Die Richtungen beider Kräfte sind Taf. 35_1 eingezeichnet, sie sollen mit dem ebenfalls eingezeichneten P_{13} im Gleichgewicht sein. Nun ist aber von Constructionswegen $F'_{13} = P_{13}$ und $Q_{13} = 0$, während keine zwei der drei Richtungen dieser Kräfte zusammenfallen.

Hierin liegt ein Widerspruch; er rührt daher, dass man in der Theorie des Erddrucks (die Navier aufstellte und die wir gaben, wie wir sie fanden) nur über eine der beiden in der Wandfläche oder in der Gleitfläche wirkenden Kräfte frei verfügt werden kann. Wird z. B. φ und der Angriffspunkt von Q im untern Drittel der Gleitfläche, durch das es immer gehen muss, wenn von der Cohäsion abstrahirt wird: so ist dadurch die Richtung von Q vollständig bestimmt, und auch der Schnitt PQ, weil die Richtung von P dem Gewicht des abrutschenden Prismas, die durch dessen Schwerpunkt geht, ebenfalls bekannt ist. Da aber F auch durch diesen Schnitt gehen muss, weil $F\,P\,Q$ im Gleichgewicht sind, so ist die Richtung von F vollkommen bestimmt, wenn wir noch einen Punkt desselben, seinen Angriffspunkt, im untern Drittel annehmen.

Mit der Richtung von F ist endlich der Winkel φ_1, um den es von der Normalen zur vordern Wand abweicht, gegeben: letzteres kann also nicht willkürlich angenommen werden, nachdem über φ disponirt wurde. Der Mangel der bisher entwickelten Stützmauertheorien rührt also daher, dass man sich bei analytischer Behandlung damit begnügt hat, Gleichungen zwischen den an einem abrutschenden Prisma wirkenden Kräften aufzustellen, ohne deren Momentengleichungen in Betracht zu ziehen; und darin, dass wir zur Bestimmung des Erddrucks nur das Kräftepolygon benutzten, ohne uns um das Seilpolygon zu kümmern.

Q_{13} kann nimmer $= 0$ sein. Es ist gar nicht denkbar, dass das über der natürlichen Böschung stehende Erdprisma sich frei über dieselbe hinausstehend trage. Nimmt man aber an, die verticalen Kräfte F'_{13} und Q_{13} übernähmen das Gewicht je desjenigen Theiles des abrutschenden Erdprismas, der rechts und links von der durch den Fuss der Wand gehenden Verticalen liegt, so ist das Maximum des Drucks auf einen Theil der Wand gleich dem Gewicht des von zwei Verticalebenen begrenzten Prismas, das über diesem Theile steht; vorausgesetzt, dass diese Wände Winkel mit

der Horizontalen bilden, die nicht grösser als der Reibungswinkel von Erde auf der treffenden Wand seien: denn dann kann man sich ja das abrutschende Prisma wie die Ausfüllungen der Gewölbschenkel in verticale Lamellen zertheilt denken, und jede derselben kann von ihrer Basis getragen werden, weil die Reibung gross genug ist, um das Abrutschen nach unten und dadurch die Vergrösserung des Druckes unten zu verhindern. In diesem Falle wird also das Maximum des Erddrucks pro Längeneinheit durch die Höhe h des Erdprismas angegeben. Taf. 35_3 haben wir mit diesem h als Radius einen kurzen Kreisbogen gezogen, der also das Maximum des auf die halbe vordere Wand reducirten Erddrucks oder des Drucks pro Längeneinheit abschneidet.

Ebenso gross muss auch der Druck auf eine Wandfläche angenommen werden, die einen noch kleinern Winkel als φ_1 mit der Horizontalen bildet. Für solche Winkel giebt übrigens die Construction einen imaginären Erddruck, weil die Linie, welche den Winkel $\varphi + \varphi_1$ mit der vordern Wand bildet, die obere Begrenzung des Erdkörpers innerhalb des Kreisbogens schneidet, an den von diesem Schnittpunkt aus eine Tangente gezogen werden soll.

Was schliesslich die Cohäsion betrifft, so vermindert diese den Erddruck pro Längeneinheit beständig. Die Curve der F, welche ihn Taf. 35_1 darstellt, läuft bis gegen $12^1/_2$ hin ziemlich parallel mit der Curve der F', dann aber nimmt diese Verminderung sehr rasch zu und ist unendlich gross für die Wandfläche 13, indem aus der geometrischen Construction hervorgeht, dass die Curve der F die natürliche Böschung über dem Erdkörper schneide, durch den unendlich fernen Punkt derselben gehe und dass höchst wahrscheinlich die durch K_{13} gehende Parallele zu ihr eine Asymptote der Curve F sei. Das Verhältniss dieser Verminderung zum totalen Erddruck ist ein Minimum für die Wandfläche 12, wo sie $^1/_{11}$ des totalen Erddrucks ist.

Es müsste also die Cohäsion 11 mal grösser, als sie Taf. 35 angenommen wurde, sein, wenn auf die vordere Wand unter keinen Verhältnissen Druck ausgeübt werden solle. Damit also ein Tunnel bei den angenommenen Reibungswinkeln ohne Gewölbe unter einem Berge von der Höhe h durchgeführt werden könne, müsste der in diesem Abschnitt entwickelten Theorie gemäss

das Gestein, durch welches er getrieben werden soll, auf eine Höhe von 5,5 h vertical abgeschnitten werden können. Die Säule, welche den scheerenden Widerstand des Materials darstellt, müsste eine Länge von 11 h haben. Taf. 35_1 haben wir diese Länge in der Verticalen durch den untern Pol von diesem aus aufgetragen, sie ist genau $= 0{,}7\ h$.

Die eben jetzt erhaltenen Werthe sind übrigens sicher Maxima, denn wenn z. B. bei einem Tunnel nur ein Element Wandfläche ist, während die ganze Länge des Schnittes, den wir uns durch den Erdkörper geführt dachten, durch festes Material geht: so sollte gewiss auch in diesem die Cohäsion berücksichtigt werden dürfen, und dadurch würde der Druck auf das Tunnelelement ebenfalls verringert werden.

Würde man sich die Höhe über dem Tunnel so gross denken, dass die Höhe 0,7 h grösser ist als diejenige, welche der Festigkeit des Materials entspricht und auch grösser als das Material ist, aus welchem man ein Tunnelgewölbe herstellen könnte, so wäre die Durchbohrung des Tunnels eine Unmöglichkeit; und in gewissen Tiefen der Erde könnte es, wenn die Theorie richtig wäre, keine hohlen Räume, keine Wassercirculation geben. Der Druck, den die Theorie giebt, ist daher gewiss grösser als er in Wirklichkeit sein kann. Jedenfalls aber darf man sagen, dass die Theorie des Erddrucks trotz Allem, was darüber geschrieben worden ist, noch sehr wenig entwickelt ist und nicht besonders gut mit der Wirklichkeit im Einklang stehe.

172. Drucklinie im Tunnelgewölbe.

Wir schliessen mit der Bestimmung der Stützlinie im Innern eines Tunnelgewölbes. Die nothwendigen Constructionen sind Taf. 36 ausgeführt und sind nur Wiederholungen; wir dürfen uns daher bei der Erklärung derselben kurz fassen.

Da die Theorie des Erddrucks für den Scheitel des Tunnels grössern Druck als für dessen Seiten giebt, so wird auch die Drucklinie im Scheitel stärker als in den Seiten gekrümmt sein. Dieser Theorie entspricht am besten der eiförmige Querschnitt des eng-

lischen Tunnelgewölbes: einen solchen haben wir daher Taf. 36 angenommen.

Die äussere Laibung des halben Gewölbes theilten wir in acht Stücke, die im Scheitel kleiner als in den Seiten sind, übrigens aber nach keinem bestimmten Gesetz sich ändern. Diesen acht Stücken wurden die acht Seiten eines Polygons möglichst angepasst und die Seiten desselben bis zur Begrenzung des Terrains verlängert.

Zur Bestimmung des Erddrucks wurde wie in der vorigen Aufgabe der Reibungswinkel von Erde auf Erde $\varphi = 35^0$ und der von Erde auf Mauerwerk $\varphi_1 = 15^0$ angenommen, dagegen die Cohäsion ausser Acht gelassen. Nach den bekannten Regeln von Nr. 157 Taf. 28 wurde zweimal der Erddruck auf jeder Polygonseite bestimmt; einmal der Druck über dem obern und einmal der über dem untern Ende in der Seite.

Da die Richtung der Gleitfläche in beiden Fällen dieselbe sein muss, so genügt es, sie einmal zu bestimmen, es geschah in jeder Polygonseite für einen hoch über dem Tunnel liegenden Punkt der verlängerten Polygonseite, damit noch alle Constructionspunkte auf das Blatt fallen. Alle Punkte, welche zur Construction der der Polygonseite entsprechenden Richtung dienen, tragen als Zeichen die Nummer dieser Seite.

Mittelst Parallelen zu diesen Gleitflächen durch die Polygonecken wurden ganz wie gewöhnlich die Kräfte auf die Seiten bestimmt und ausgezogen. Die beiden immer parallel laufenden Kräfte tragen auch die Nummer der Seite; der Druck auf die untere Ecke ist durch einen Accent von dem auf die obere ausgezeichnet.

Diese Kräfte, welche sich auf die Höhe des obern Endes der Polygonseite über der natürlichen Böschung beziehen, wurden auf die constante Doppelbasis von 10 Cmtr. reducirt (die dazu dienenden Constructionslinien wurden wieder ausgelöscht) und ihre Differenz giebt den Druck auf die entsprechende Polygonseite. Von diesen Constructionen macht nur die der Kraft 1 eine Ausnahme; wie in der vorigen Nummer bemerkt wurde, wird die Kraft imaginär, weil der Winkel, den die Polygonseite mit der Horizontalen bildet, kleiner als $\varphi_1 = 15^0$ ist; es wurde daher dem dort Gesagten entsprechend die Kraft 1 gleich dem Gewicht der über der Poly-

gonseite stehenden, durch zwei strichpunktirte Verticallinien begrenzten Lamelle angenommen.

Alle diese Kräfte wurden zu einem Kräftepolygon (siehe Taf. 36) zusammengesetzt und durch Probiren der Horizontalschub so bestimmt, dass die Drucklinie in das innere Drittel des Tunnelgewölbes gefallen ist.

Diese Form also hat die Drucklinie eines Tunnelgewölbes, welche der in diesem Abschnitt entwickelten, freilich sehr mangelhaften Theorie des Erddrucks entspricht.

Berichtigungen.

Seite 57 Zeile 5 v. u. lies $^1/_{12}\, b\ (h, -h)\ (l, -l)$ statt $^1/_{12}\ (h, -h)\ (l - l,)$.

„ 58 „ 13 v. o. „ $^1/_{24}\, b$ „ „ „ $^1/_{24}$ „ „

„ 96 „ 2 v. o. „ ähnlich statt projectivisch.

„ 176 Ueberschrift Nr. 66 lies einer Figur statt eines Körpers.

„ 229 Fig. 104 lies δ statt des mit ϱ bezeichneten Winkels.

„ 240 Zeile 16 v. o. lies $-\frac{h^2}{6\,\varrho_2}$ statt $\frac{h^2}{6\,\varrho^2}$.

„ 259 Zeile 8 v. u. lies Nr. 151 statt 154.

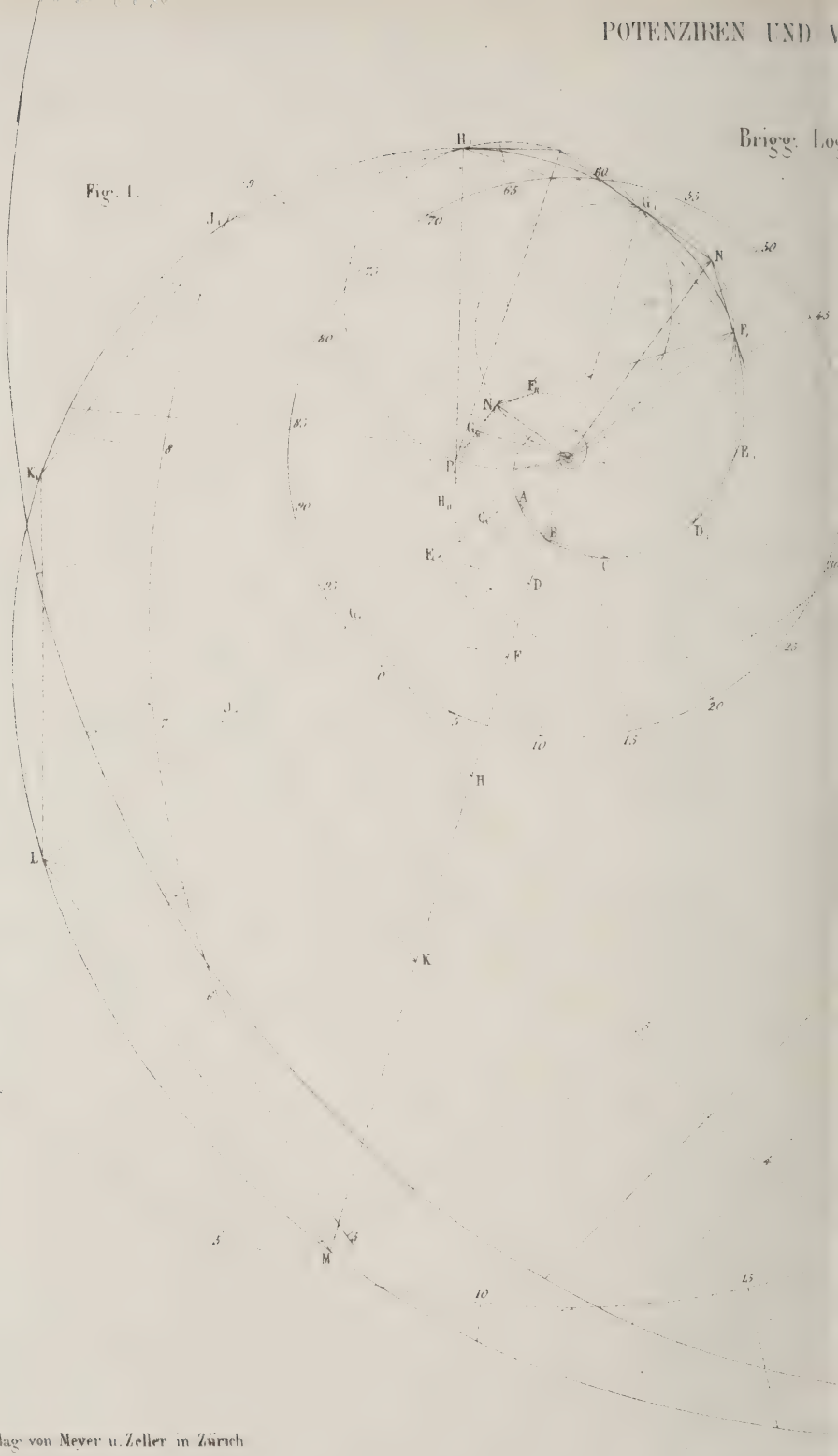
„ 553 Fig. 212 geht der Winkel μ_1 nur bis zur Linie Q_1.

„ 561 Zeile 4 v. u. lies $cotg\ ^1/_2\ \alpha_{,,}$ statt $cotg\ \alpha_{,,}$.

Druck von Otto Wigand in Leipzig.

Brigg: Lo

Fig. 1.

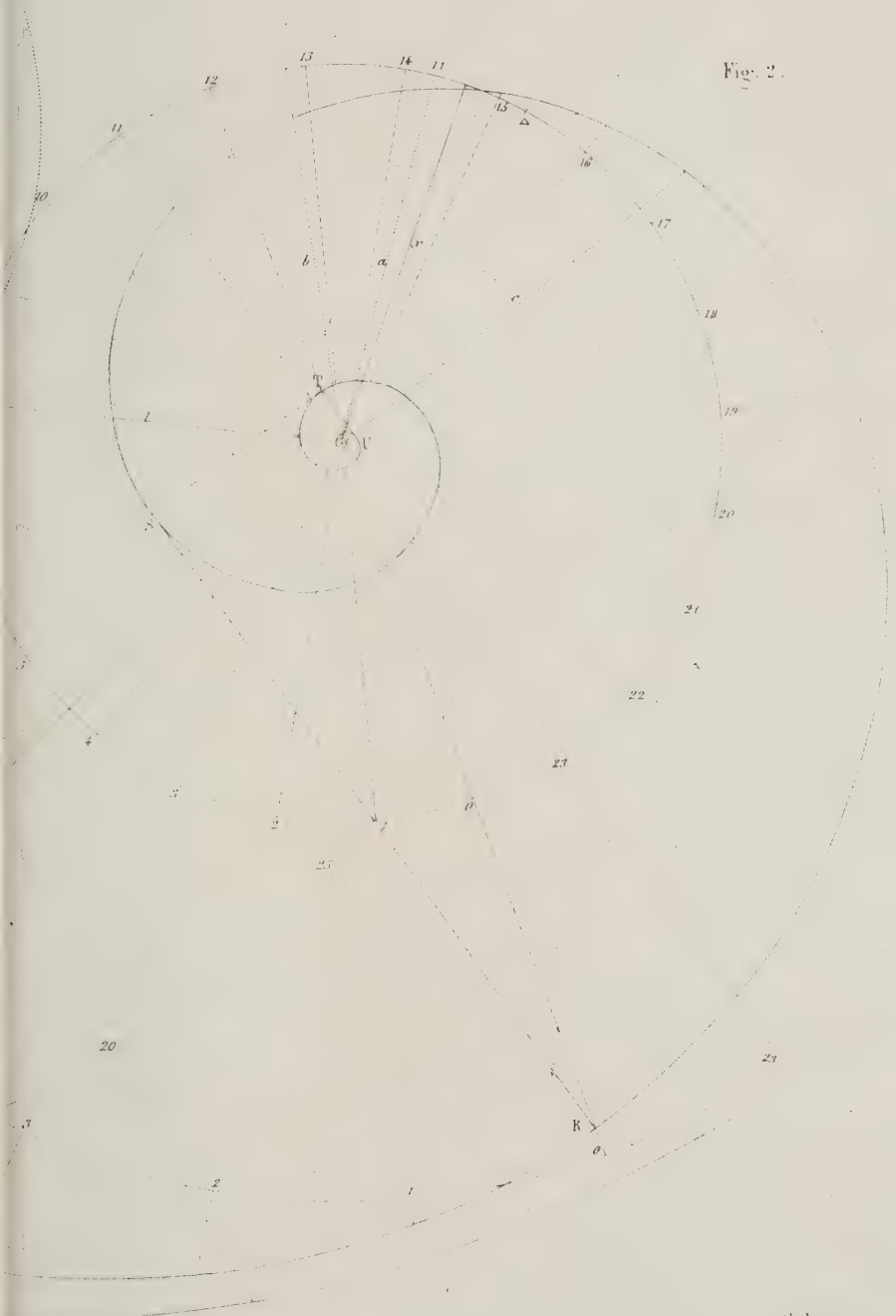


Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich

lith. Anstalt v. W

Logarithmische Selbstevolute.

Fig. 2.



Randegger u. Comp. in Winterthur.

Multiplicationspolygon

Fig. 1.

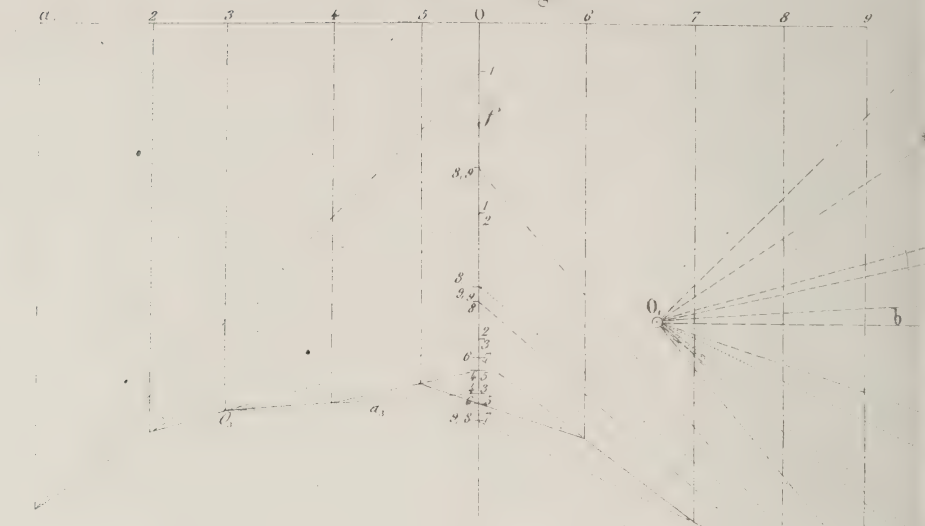


Fig. 2

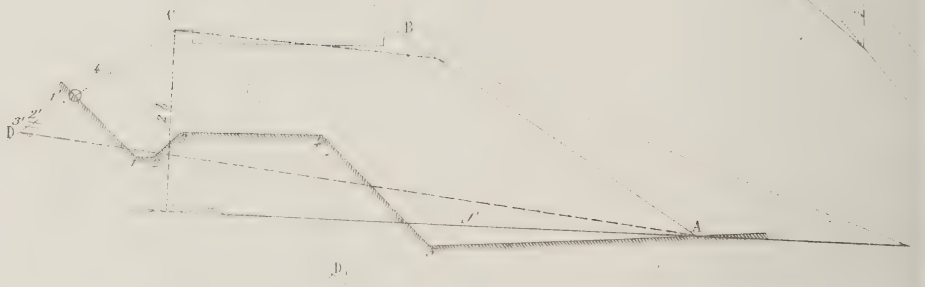
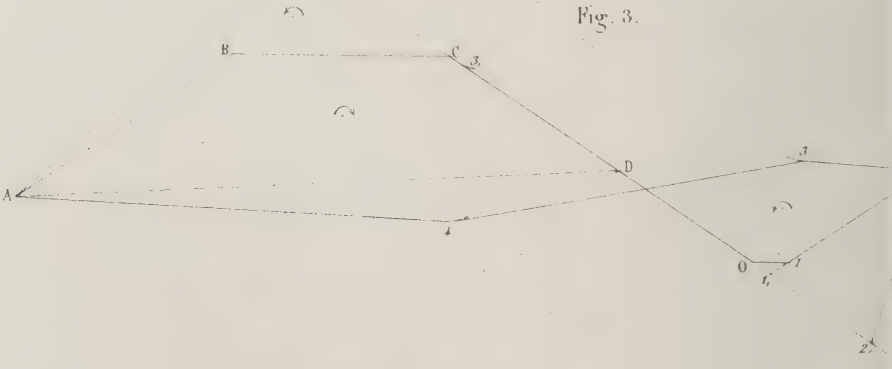


Fig. 3.



Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster.

Verwandlung von Bahnprofilen.

Fig. 4.

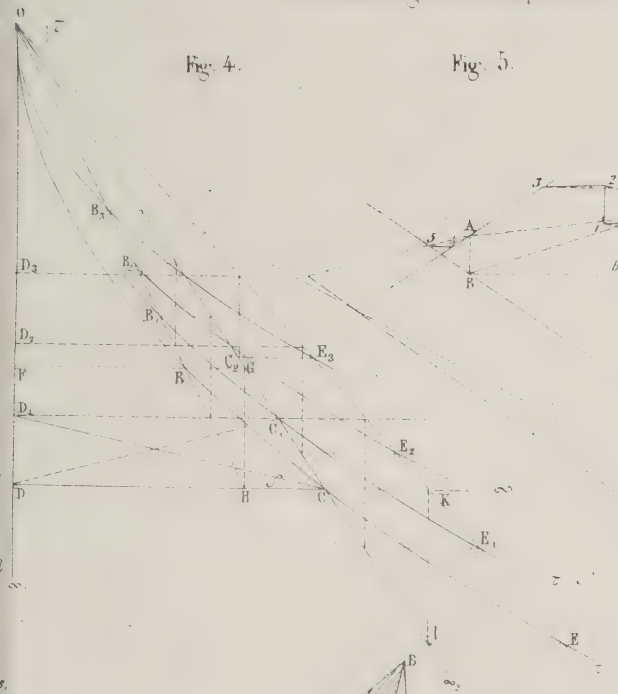
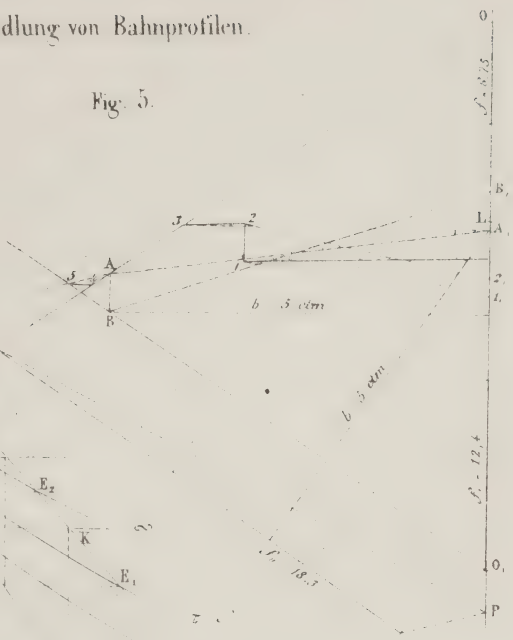


Fig. 5.



Verwandlung von Gewölbebogen.

Fig. 6

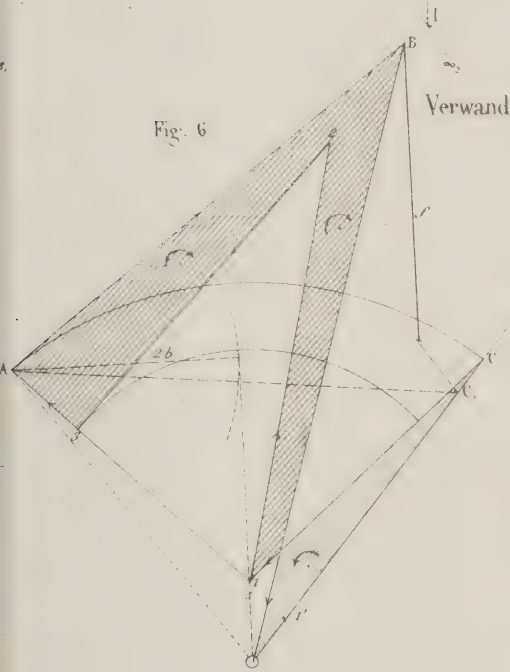
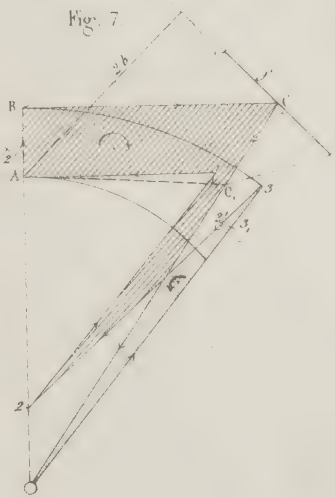
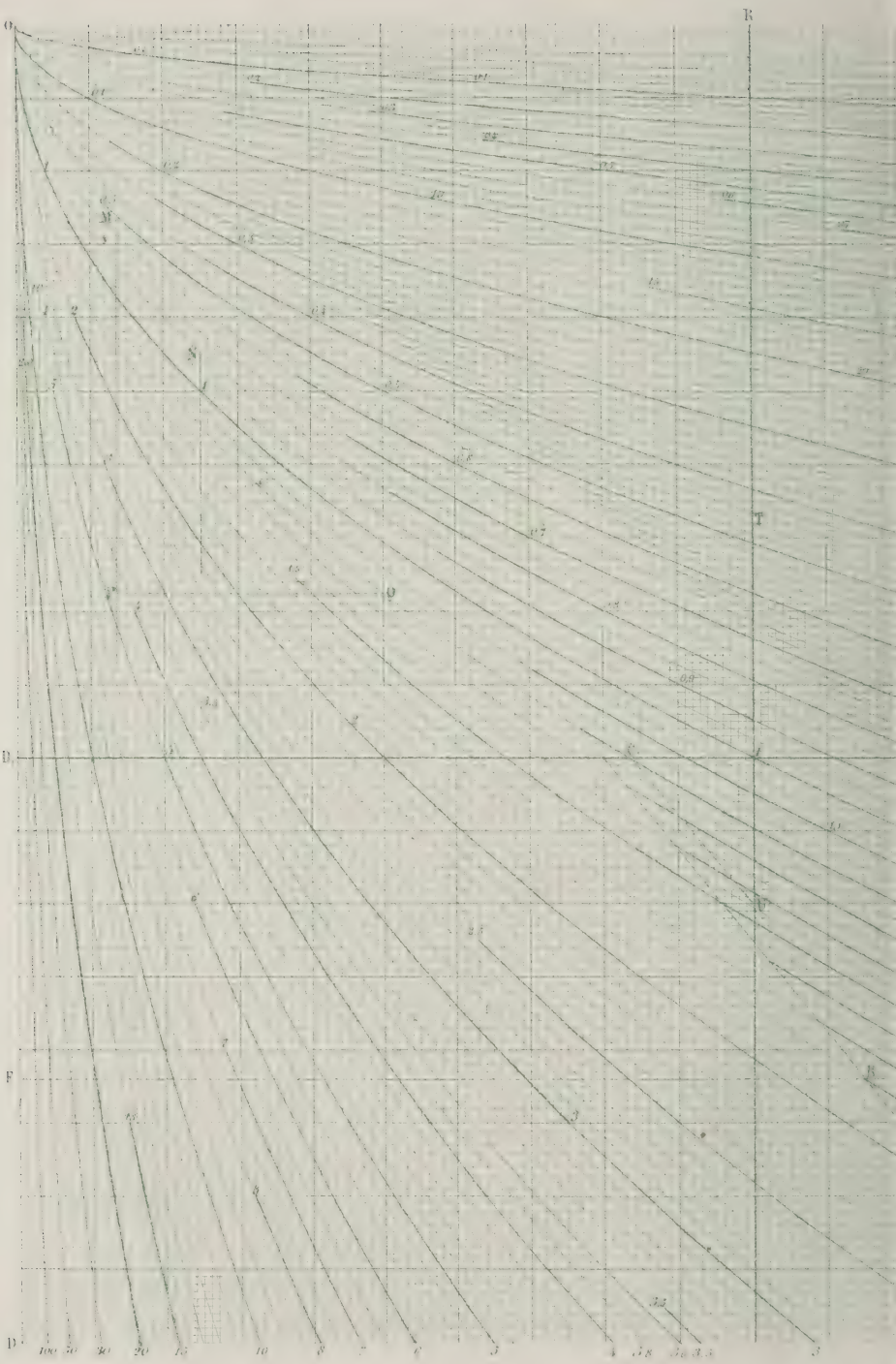


Fig. 7

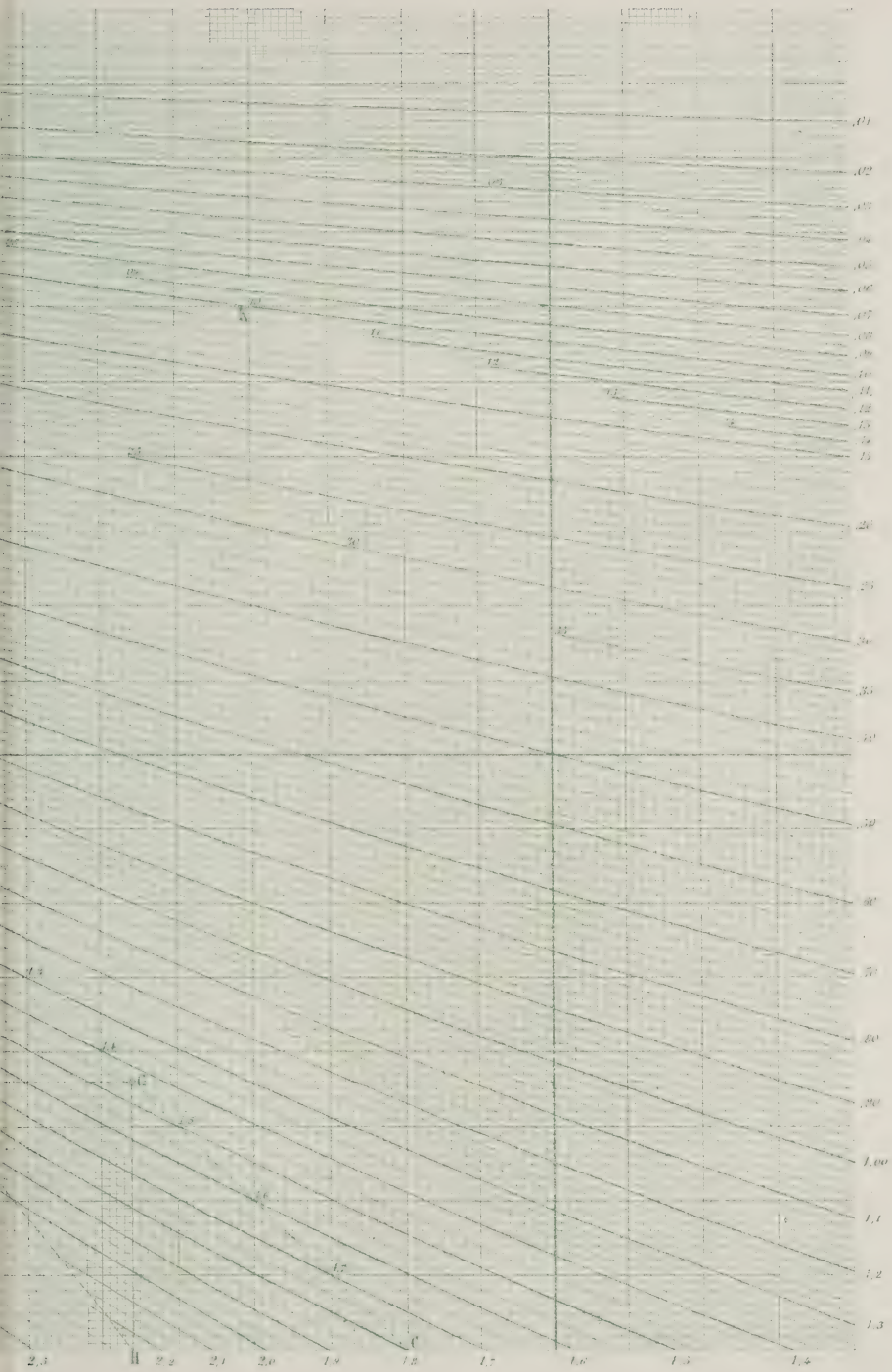


ggr u. Comp. in Winterthur



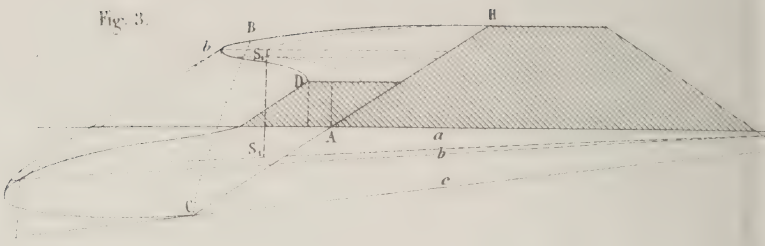
Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich

Lith. Anst. Wurster, Rand



s. C° in Winterthur.

Fig. 3.



Ein Wegübergang

Fig. 2.

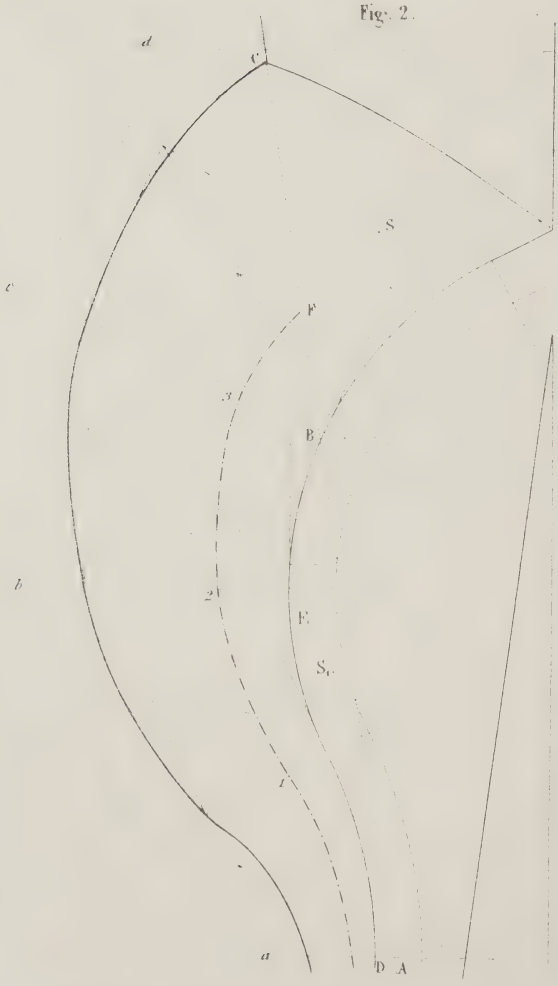
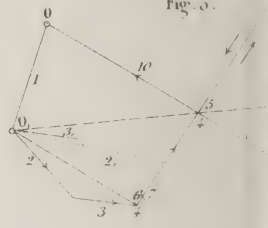


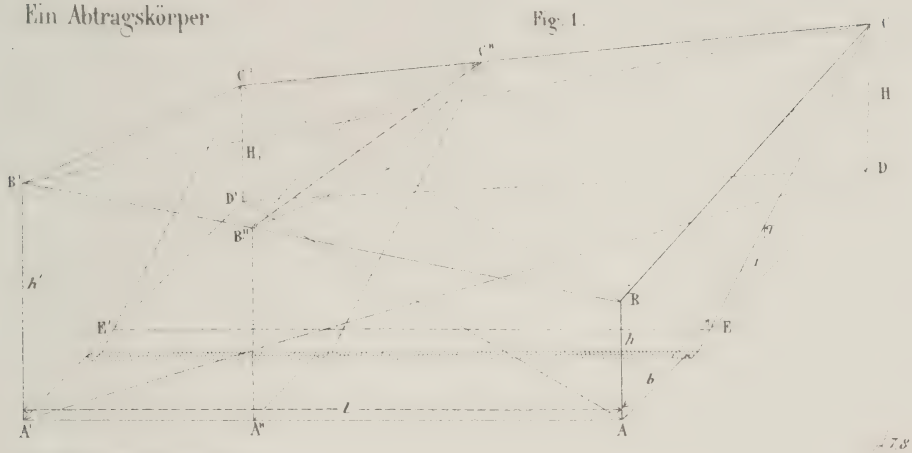
Fig. 5.



Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich

Ein Abtragskörper

Fig. 1.



Kräfte und Seilpolygone

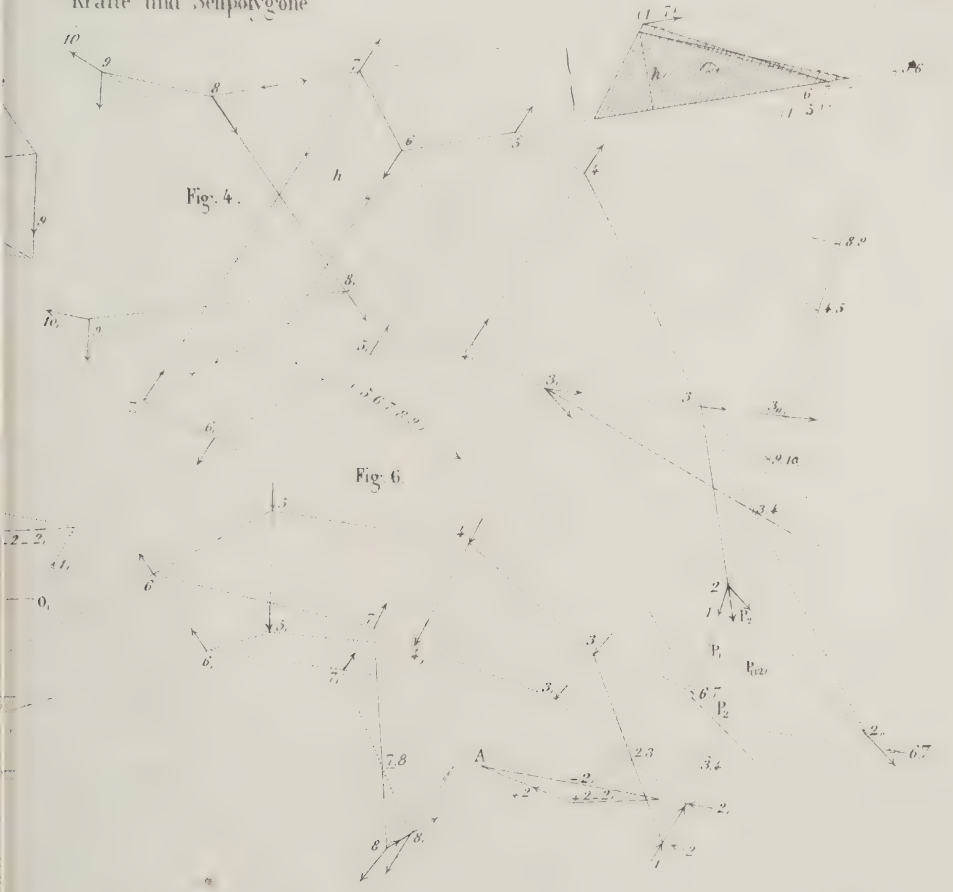


Fig. 4.

Fig. 6.

Randegger u. Comp. in Winterthur

Fig. 1.

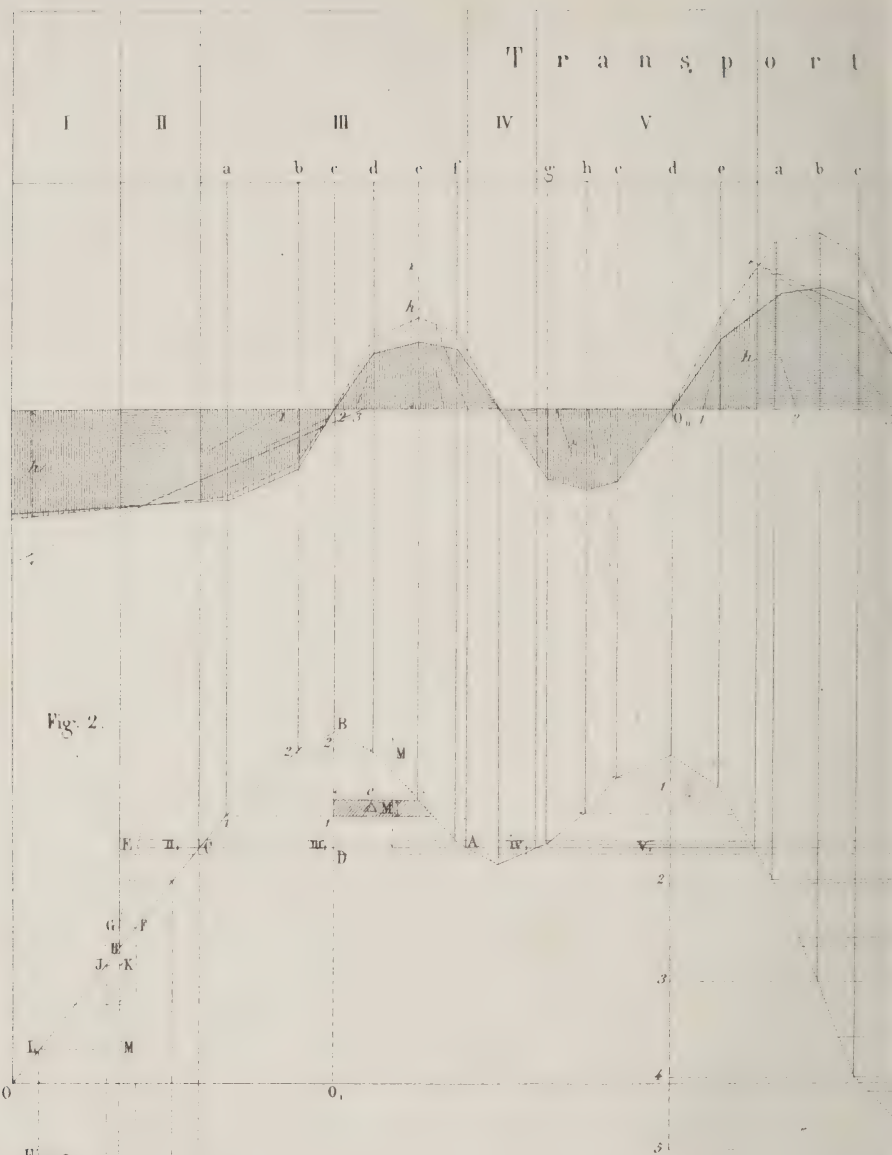


Fig. 2.

Fig. 3.

Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster, Ra

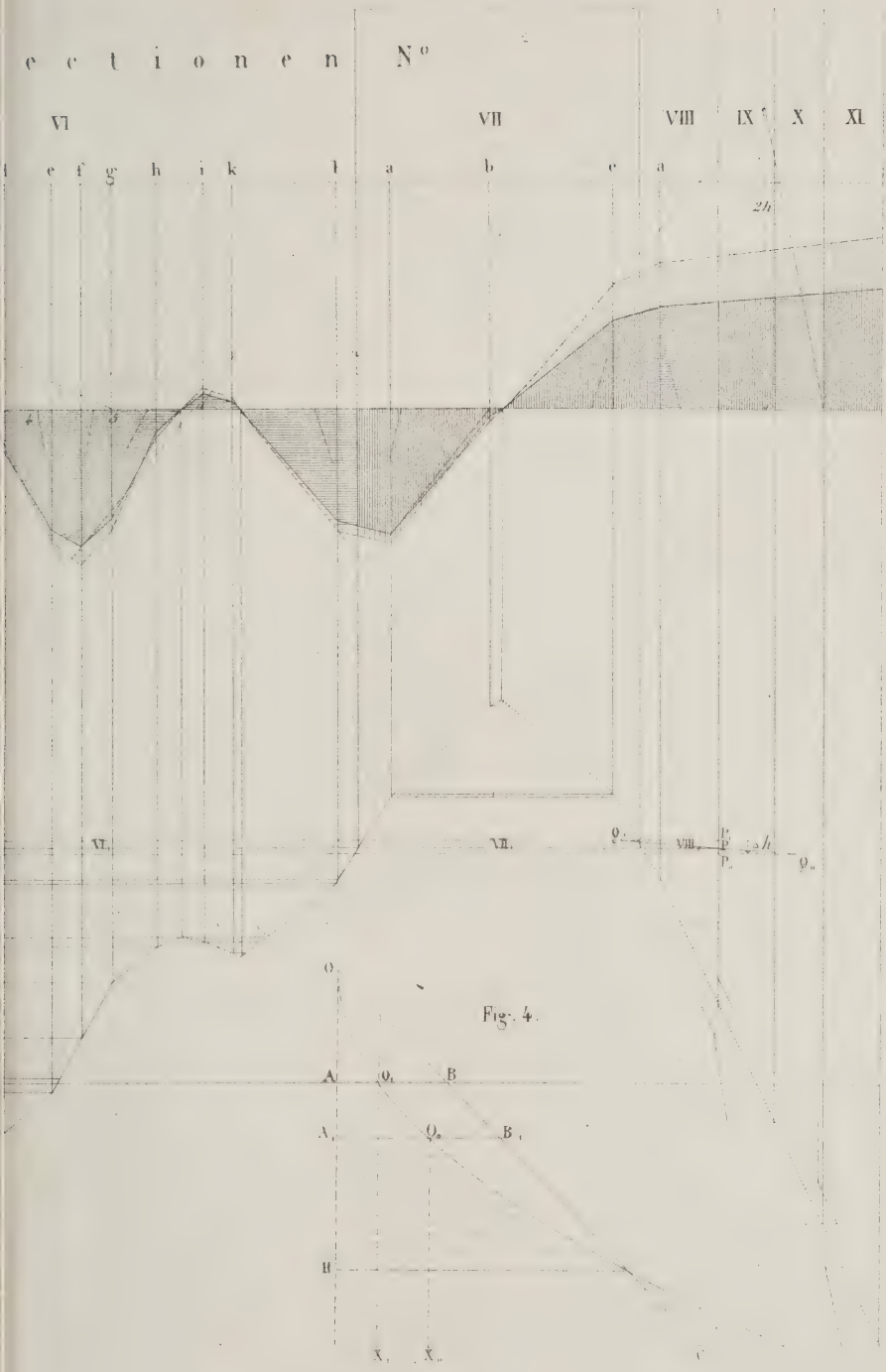
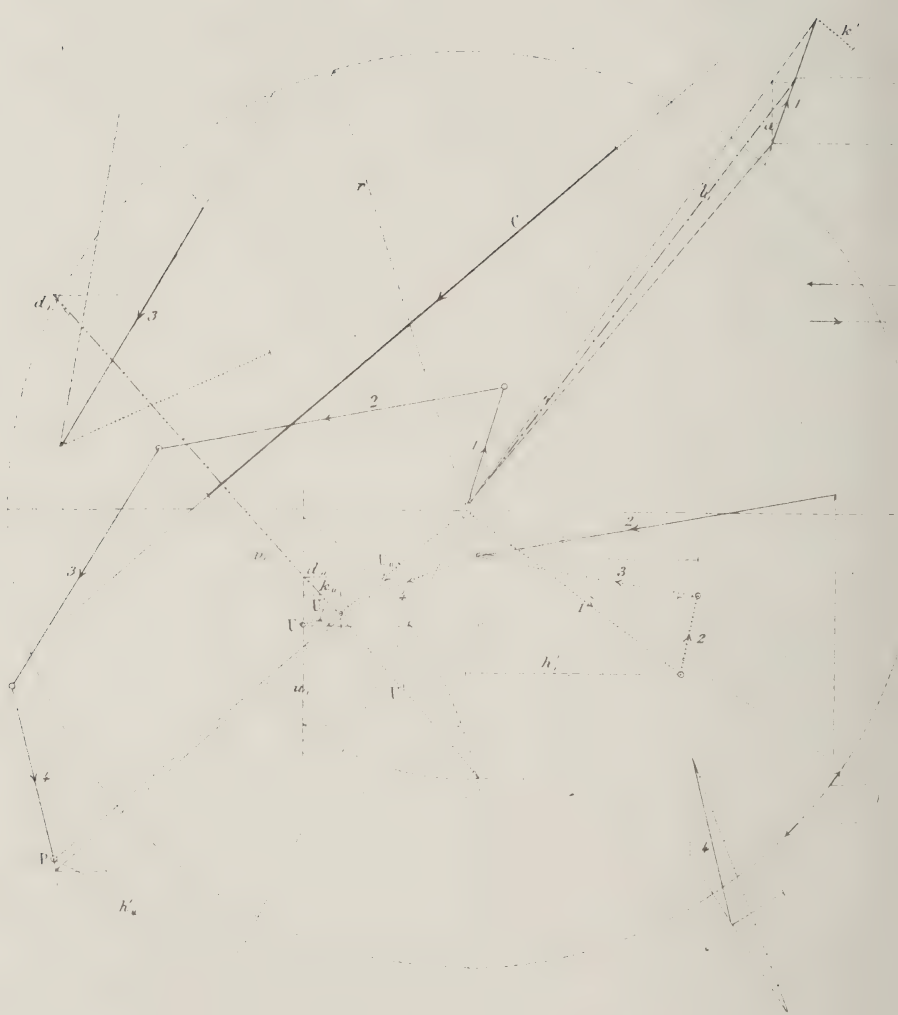


Fig. 4.

Culmann graphische Statik

er u. Comp in Winterthur.



Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt von Wurster, R

ER KRÄFTE IM RAUM.

r Centralaxe.

ger u. Comp. in Winterthur

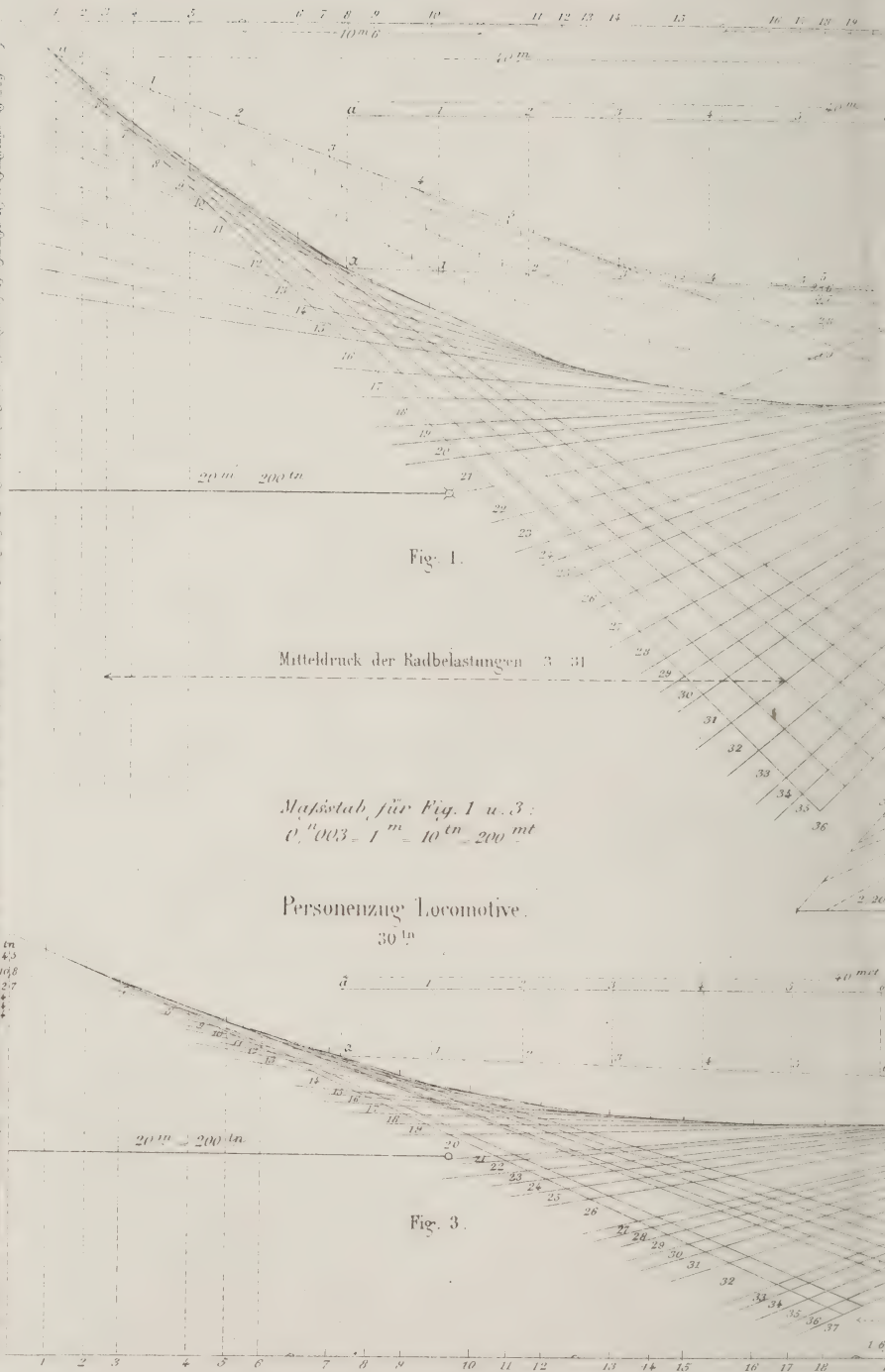
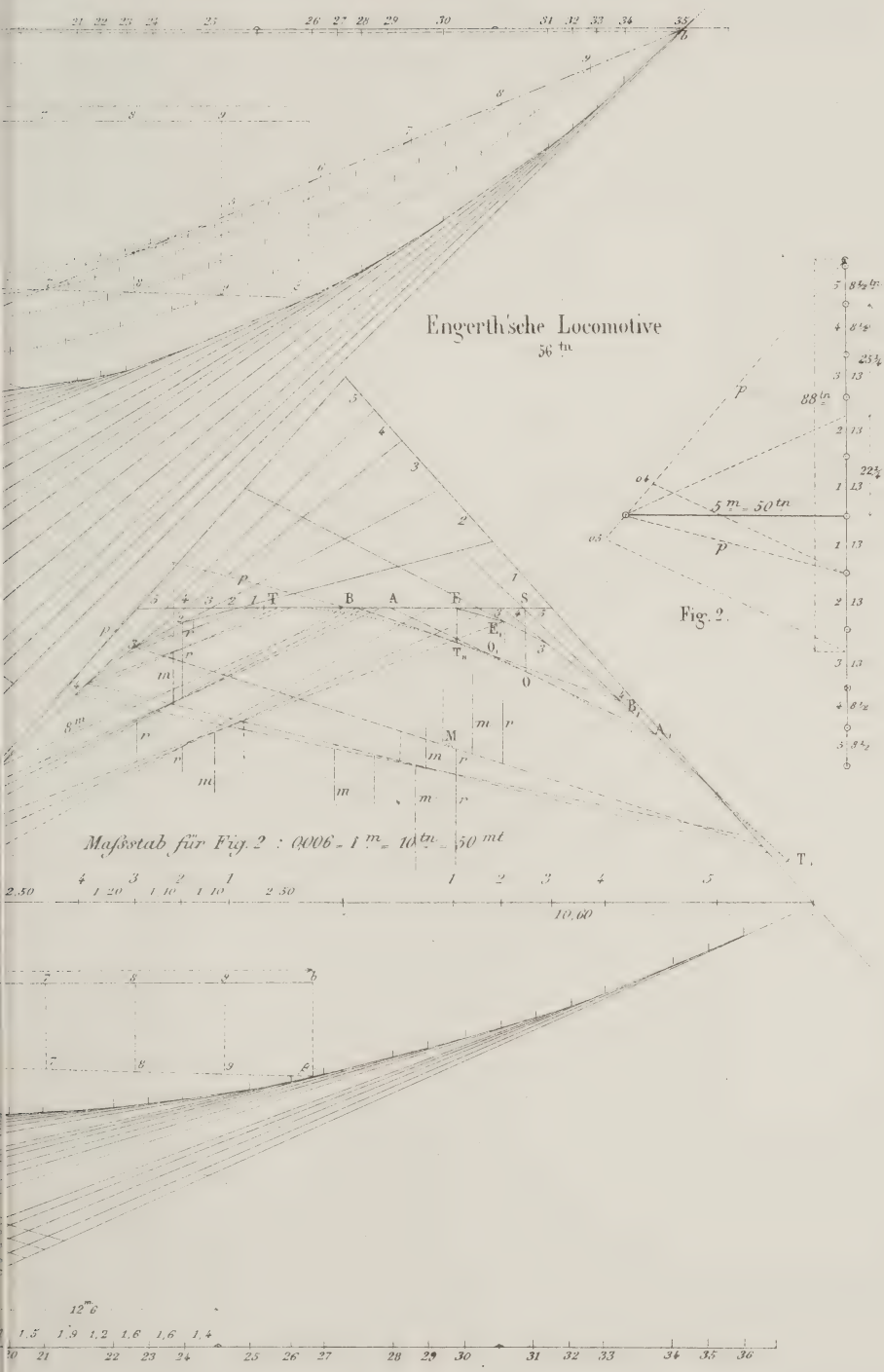


Fig. 1.

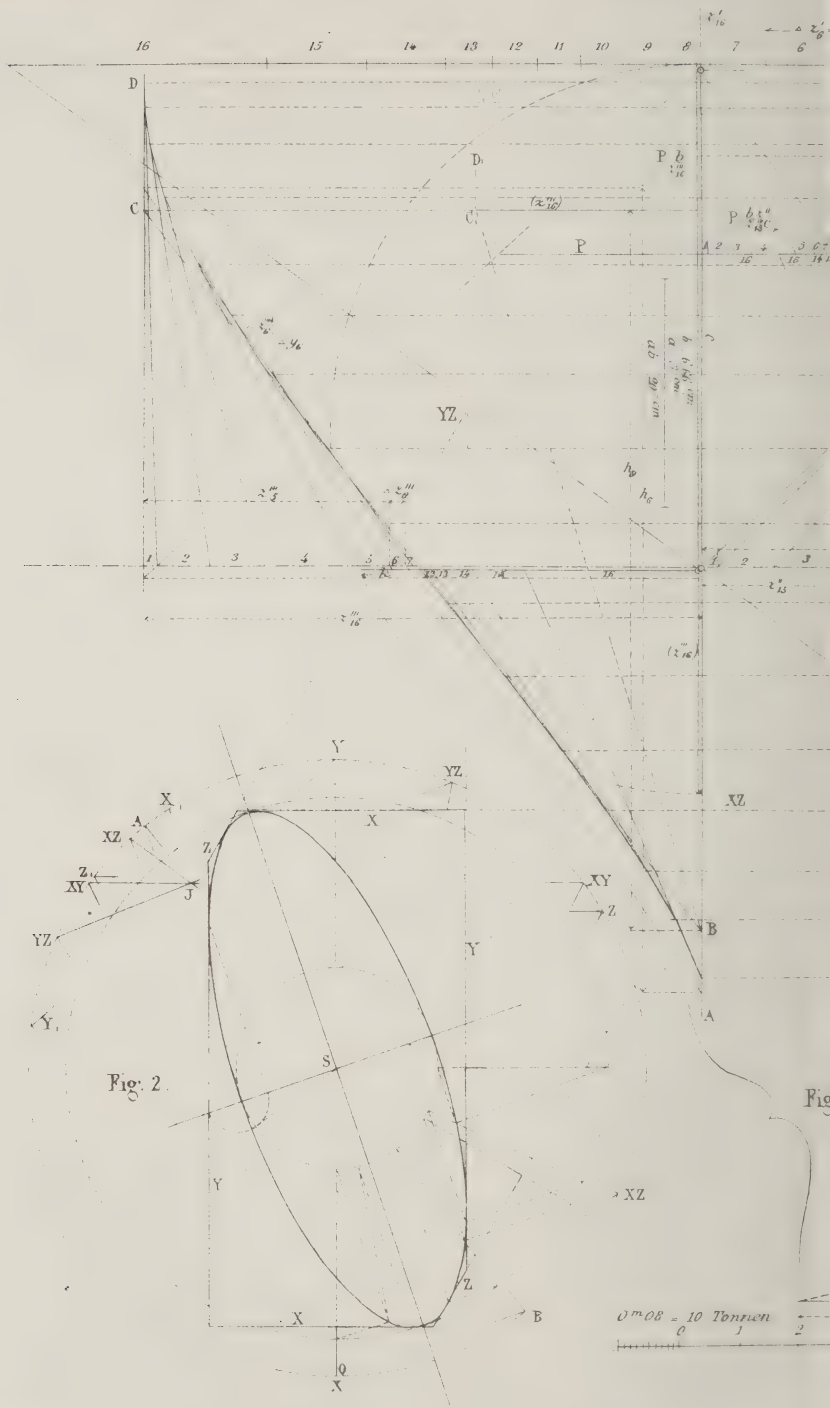
Fig. 3.

Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster, Randegg

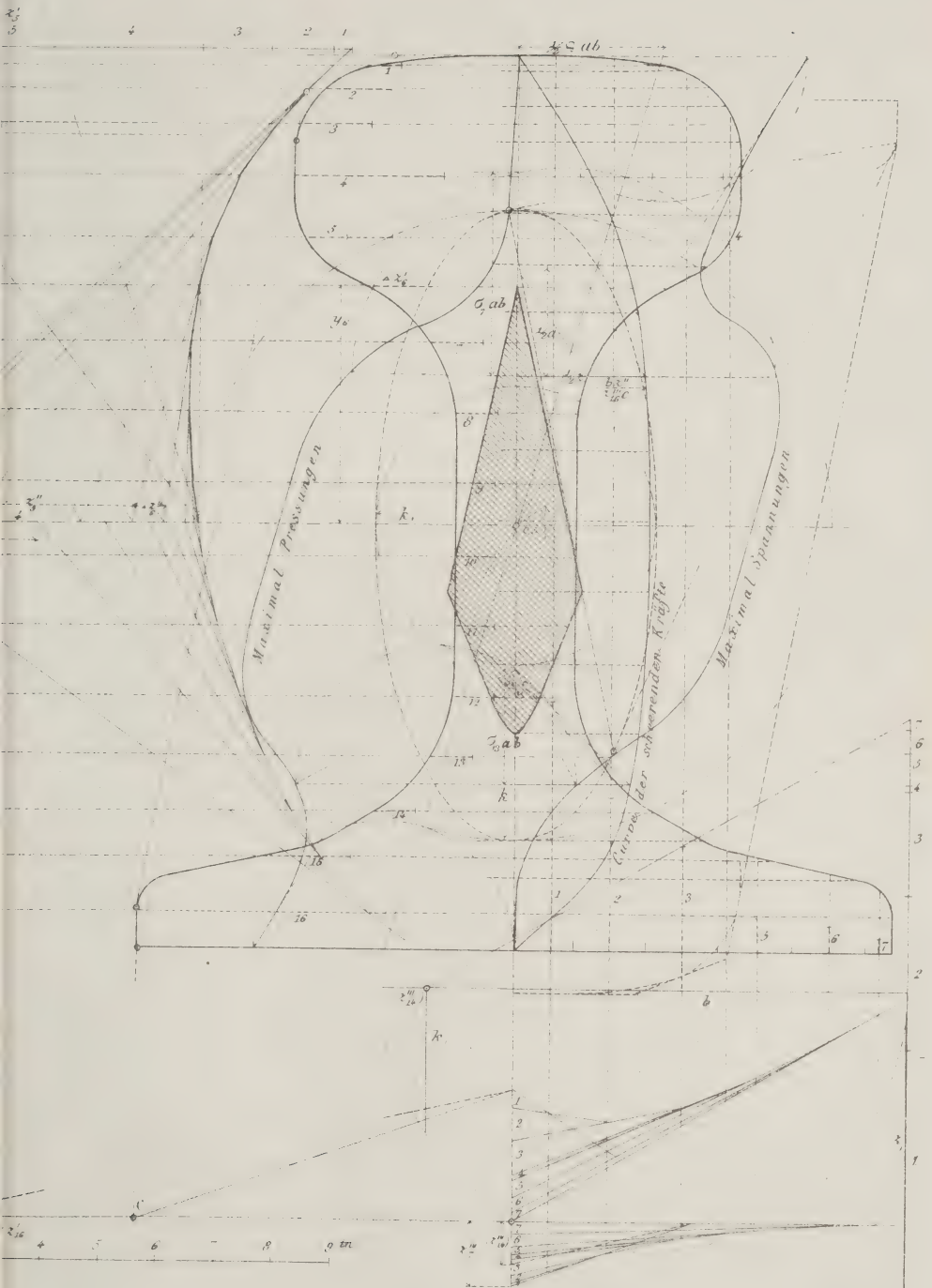


Comp. in Winterthur.

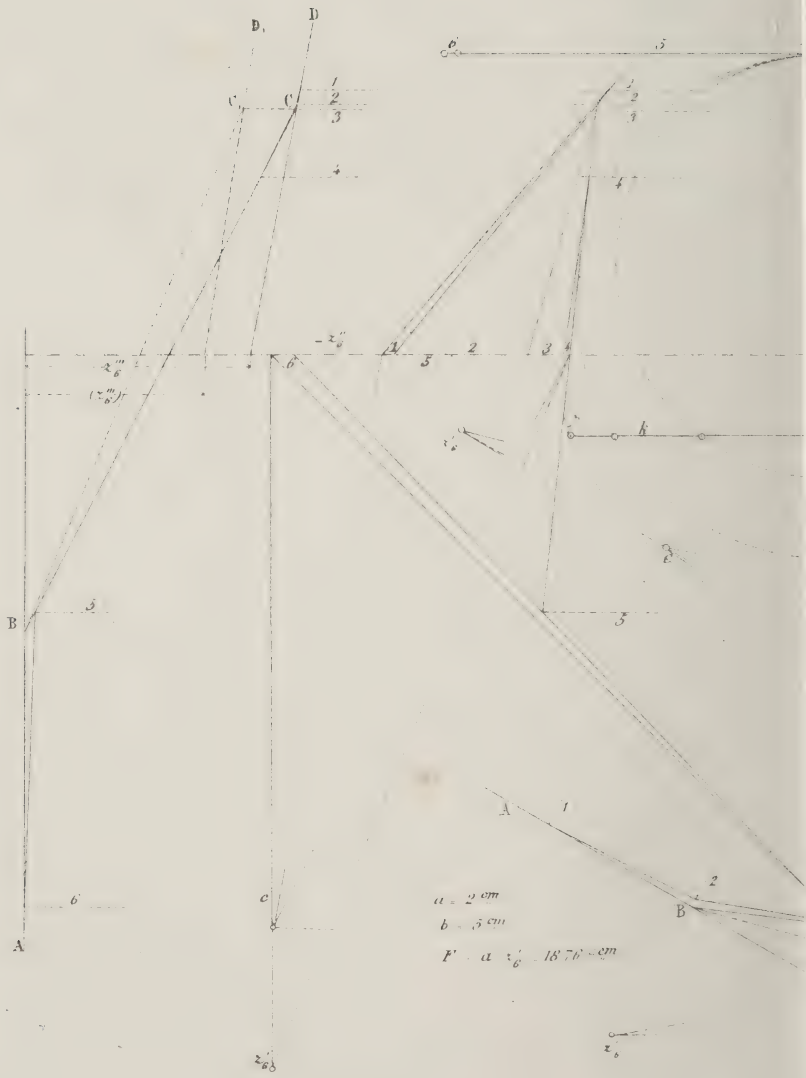


Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich

Lith. Anstalt v. V

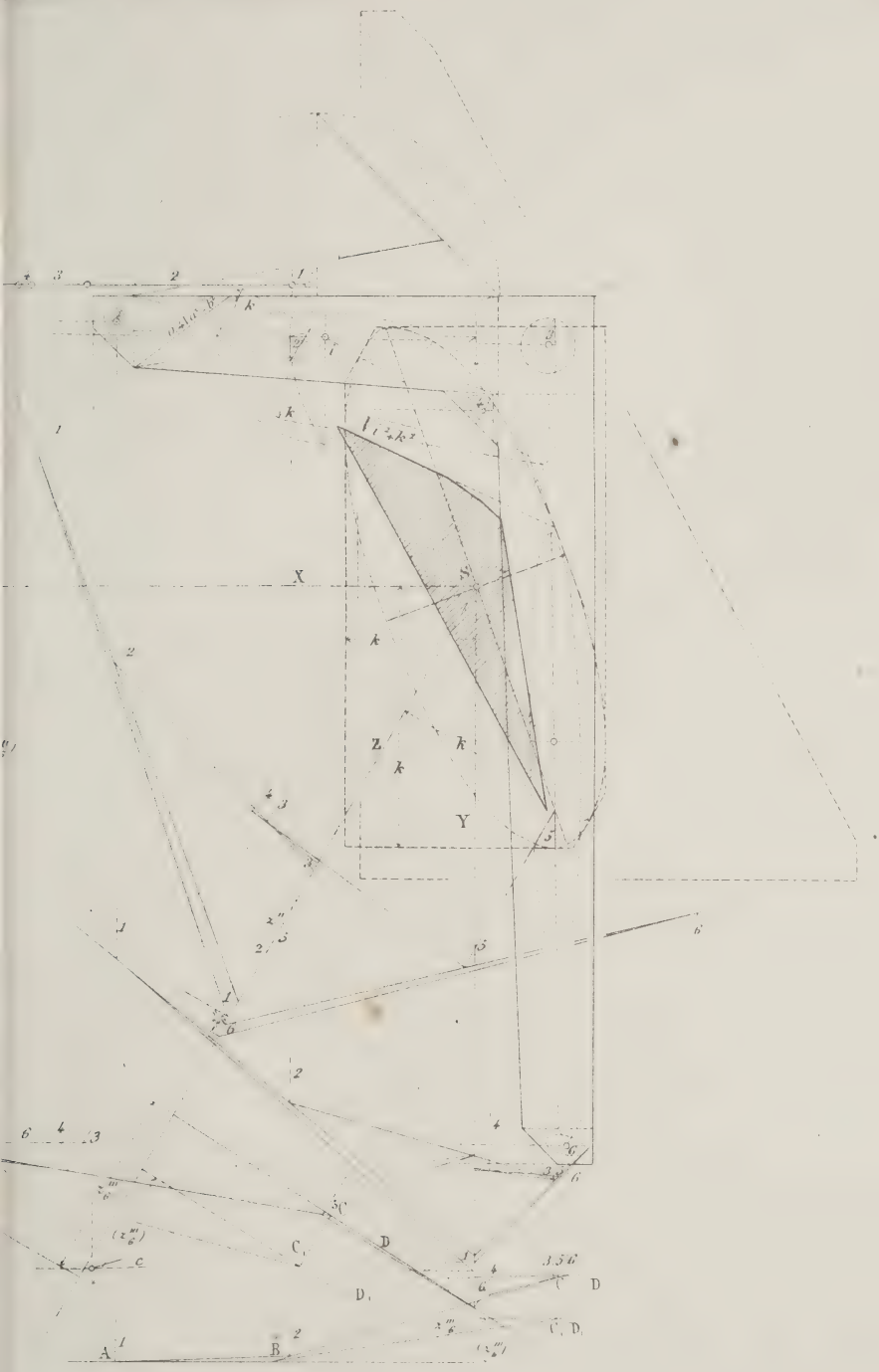


r. Randegger u. Comp. in Winterthur



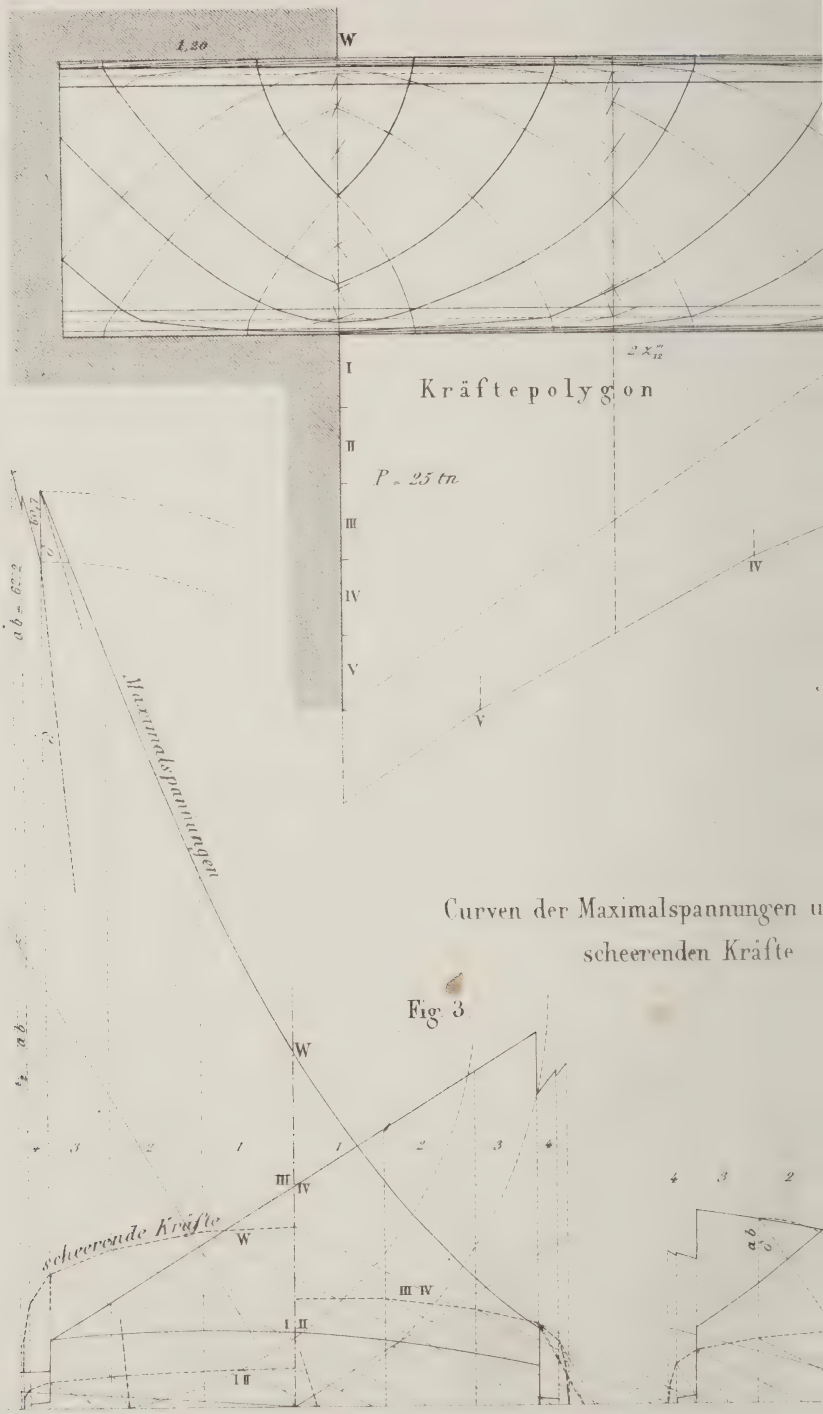
Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt von Wurster, Randeg



. Comp. in Winterthur.

Ansicht, Krä



Curven der Maximalspannungen u
scheerenden Kräfte

Fig 3

Verlag v Meyer u Zeller in Zürich

Lithogr Anstalt v

NES BLECHBALKENS

und Seilpolygon

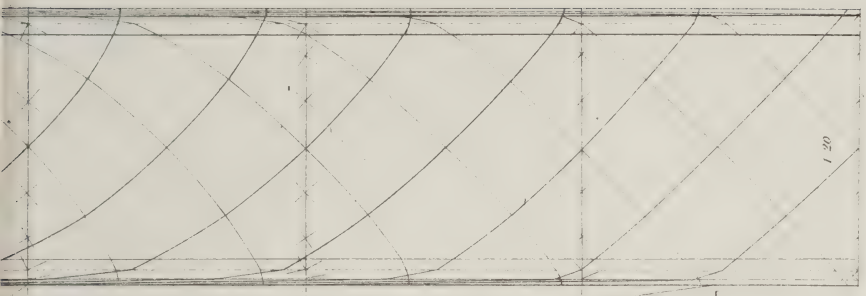
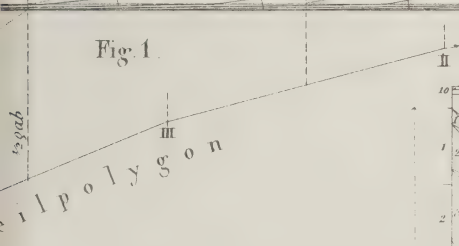


Fig. 1.



Maßstäbe

die Kräfte	,002 = 1 ton	
„ Längen der Fig. 1	,003 = 1 met	
„ „ „ „ 2	,010 = 1 „	
„ „ „ „ 3 u. 4	,006 = 1 „	

Fig. 2.

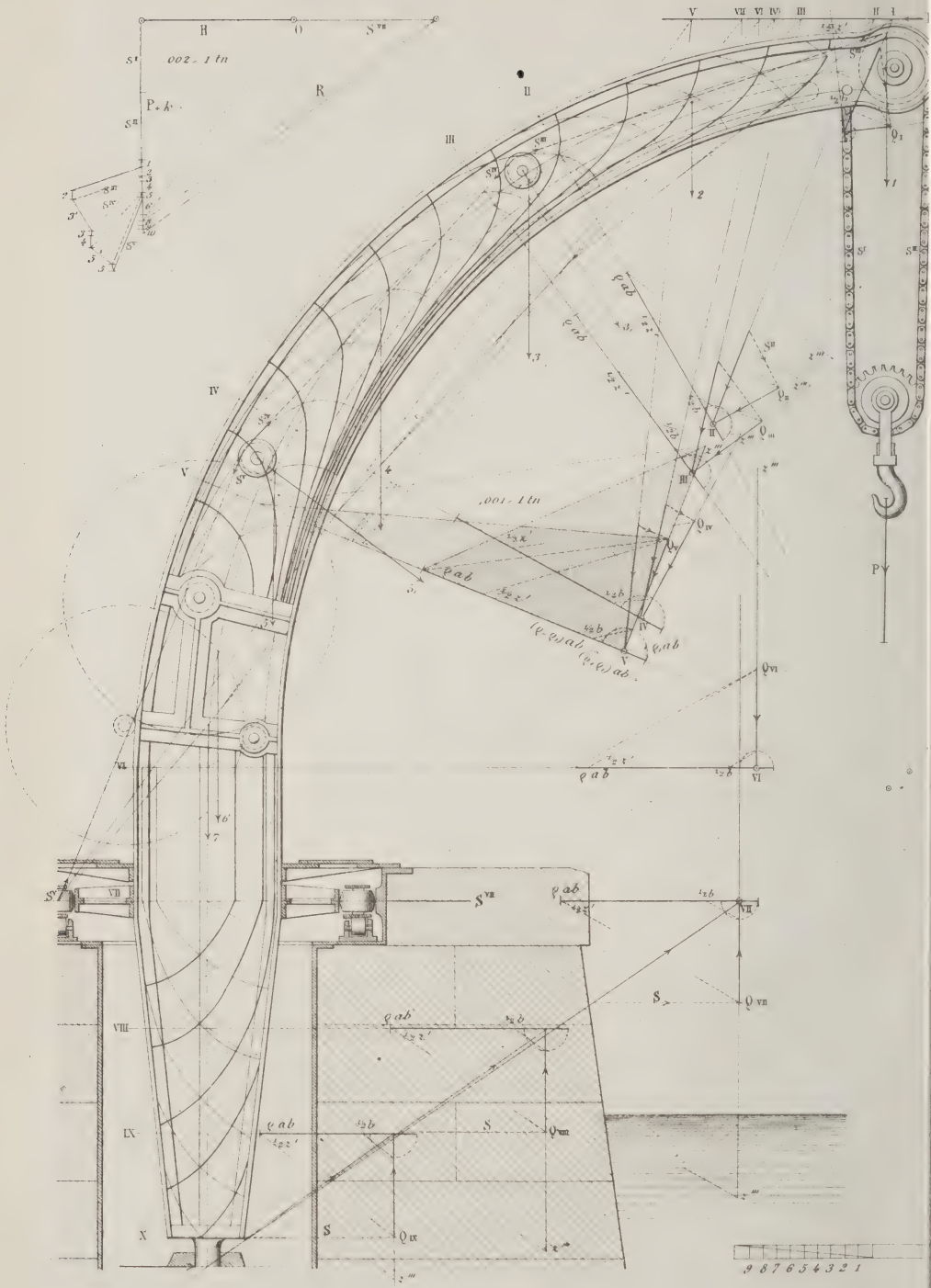
der

Fig. 4.

rster, Randegger & Cie in Winterthur

Kräftepolygon
Fig. 2.

Krahn und Seilpolygon
Fig. 1.

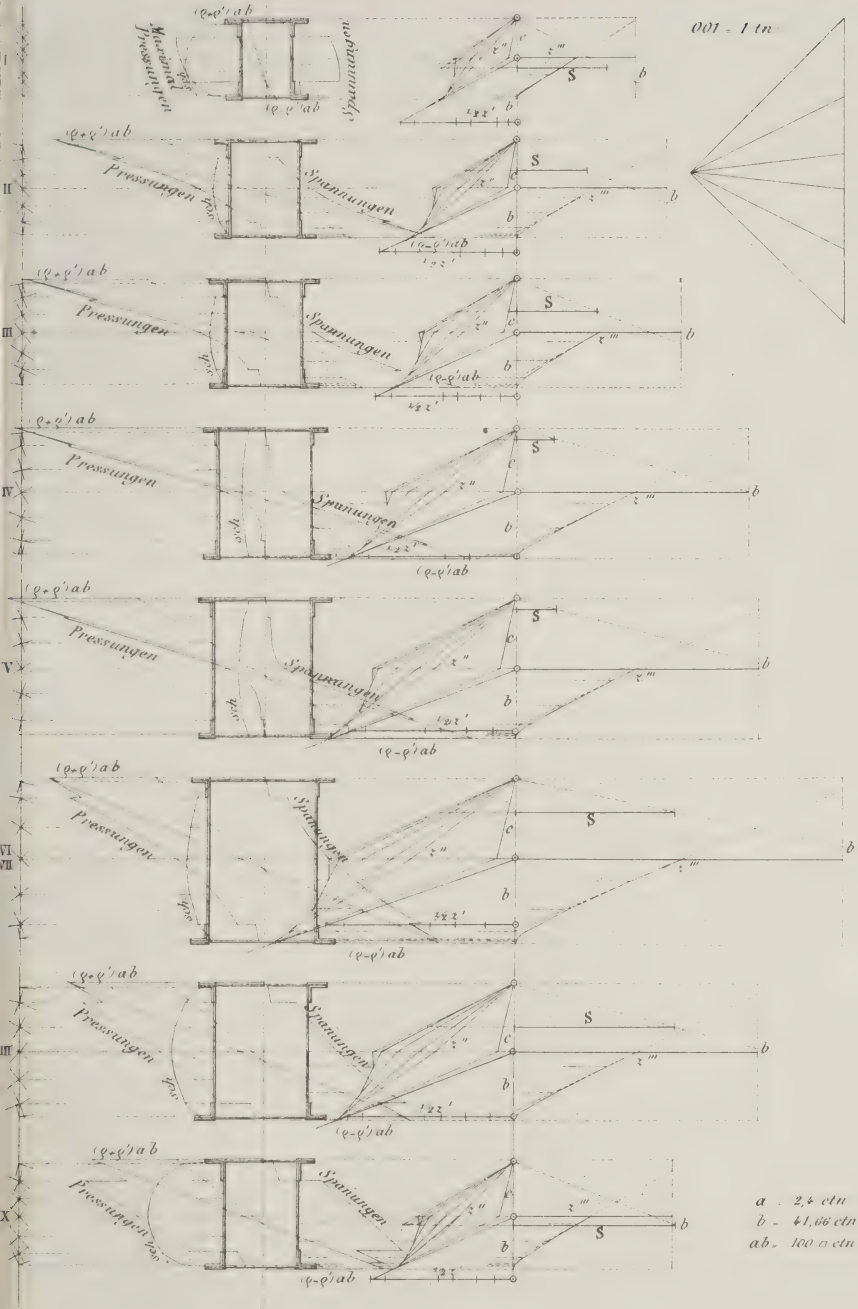


Verlag v Meyer u Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt von Wurste

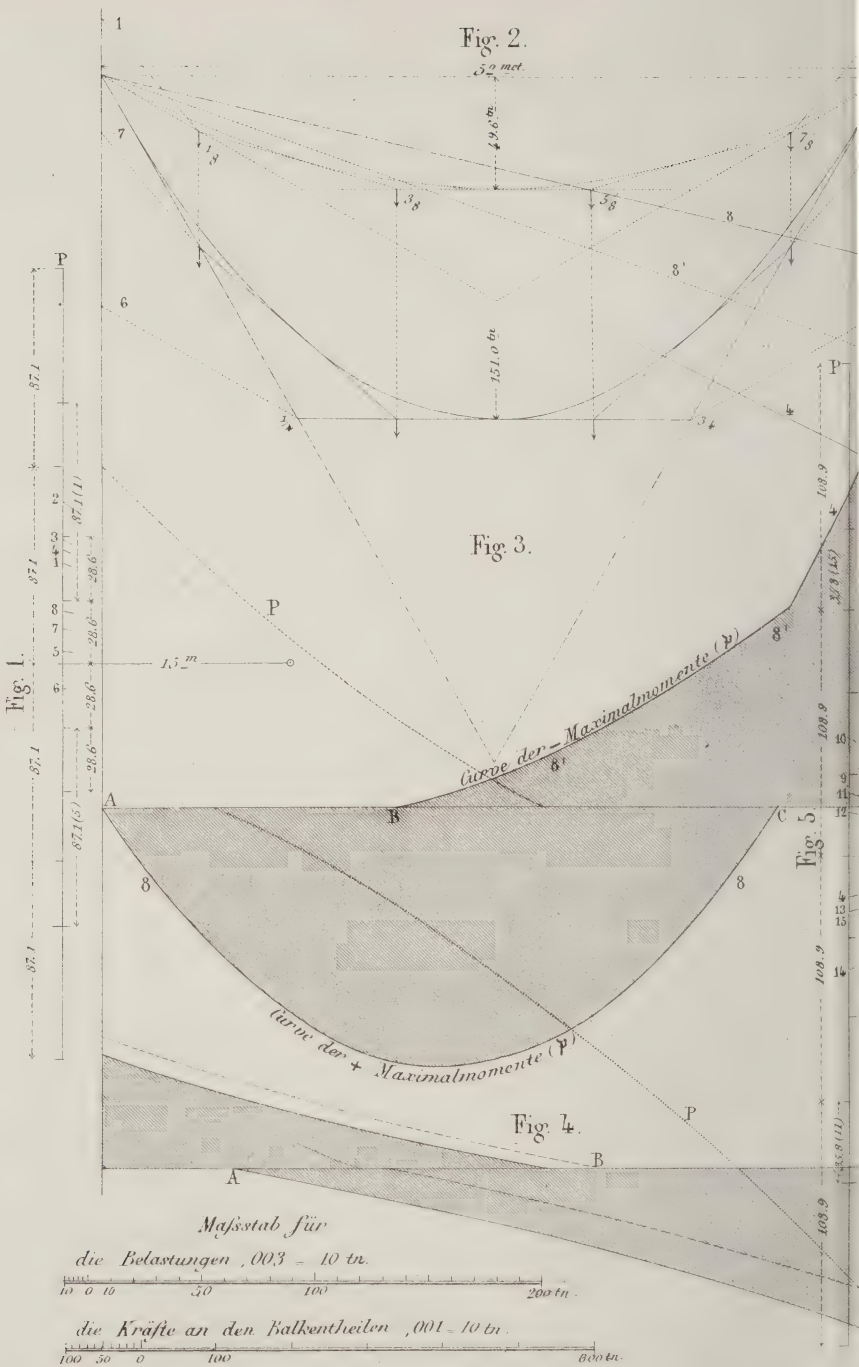
Querschnittsmomente

Fig. 3. Fig. 4.



Maßstab 1 : 50

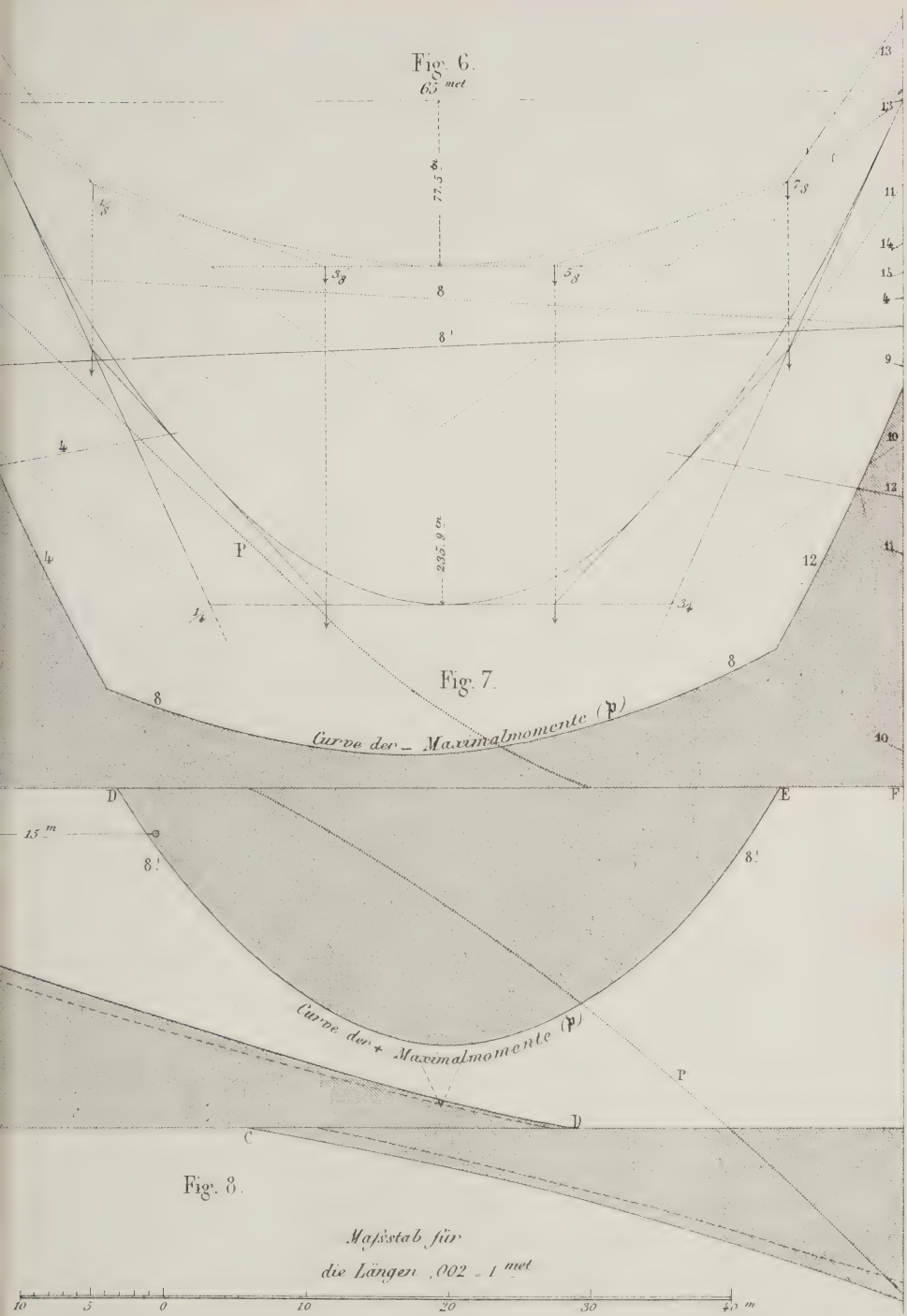
Landegger & Co. in Winterthur.



Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

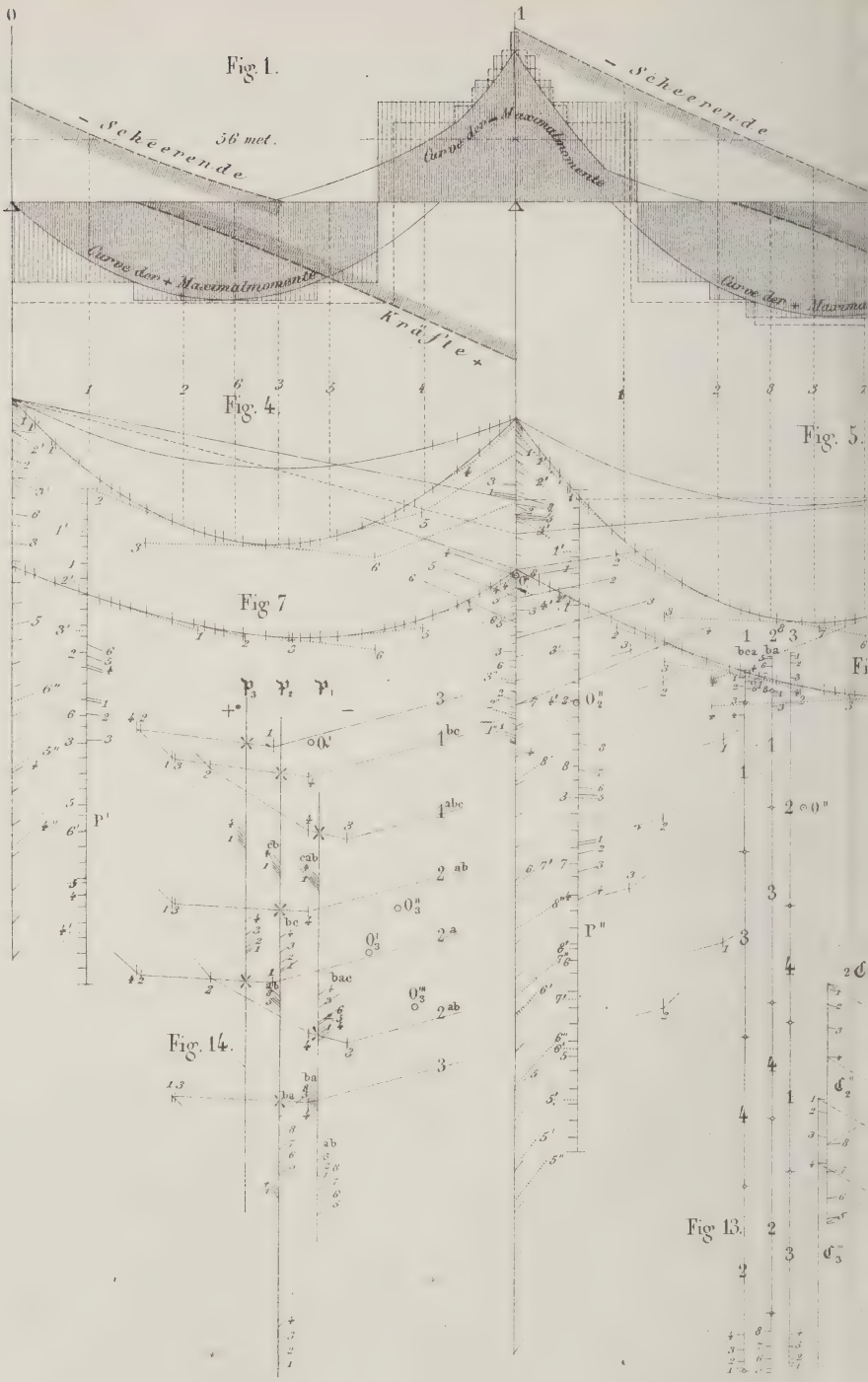
Lith. Anstalt v

65.65.52 met Weite bei constantem Querschnitt



ster, Randegger & C°in Winterthur.

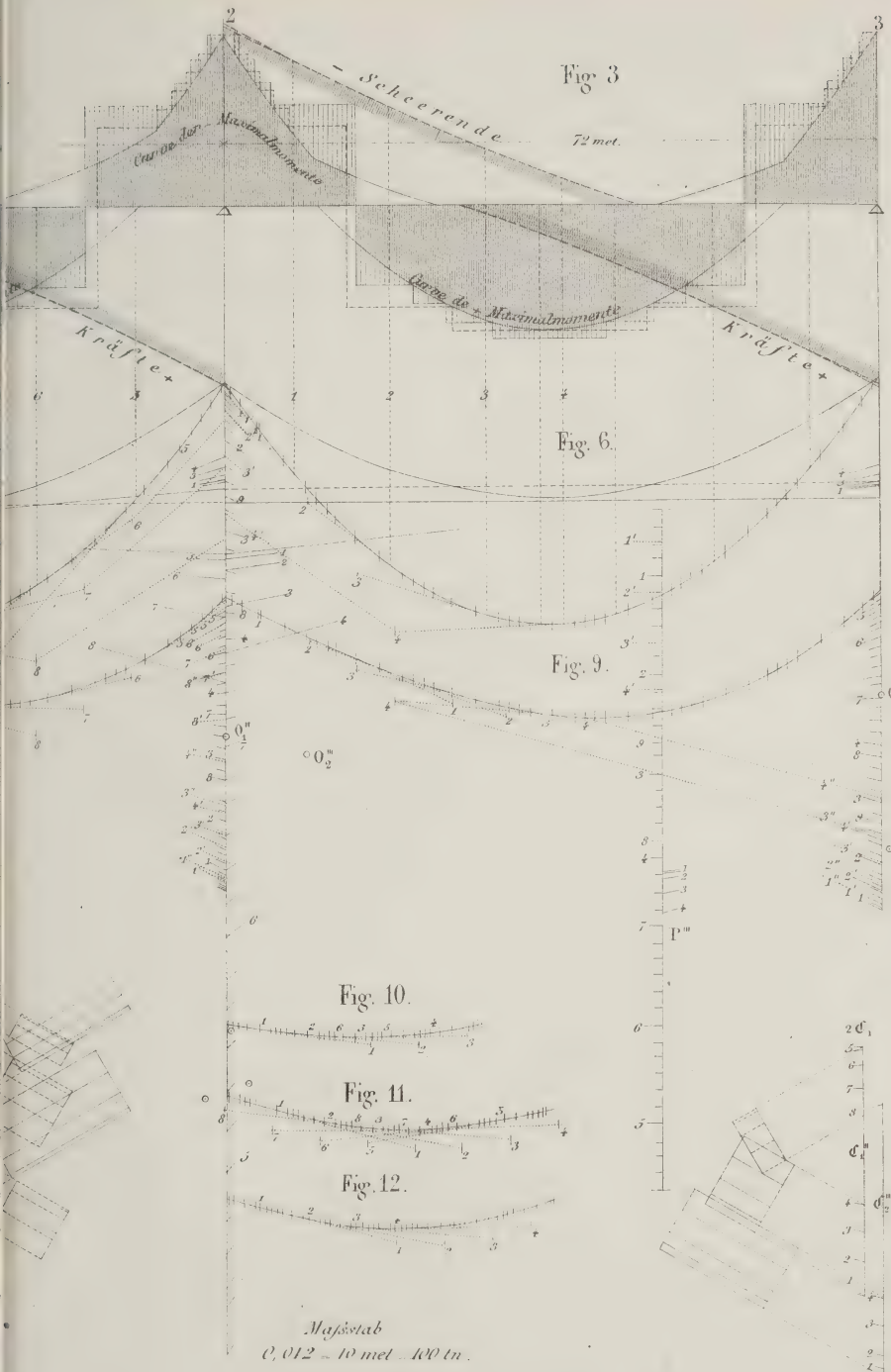
5 ungleichförmig belastete Öffnungen von 56 70



erlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster

0 56 met. Weite bei constantem Querschnitt.



gger & Co in Winterthur.

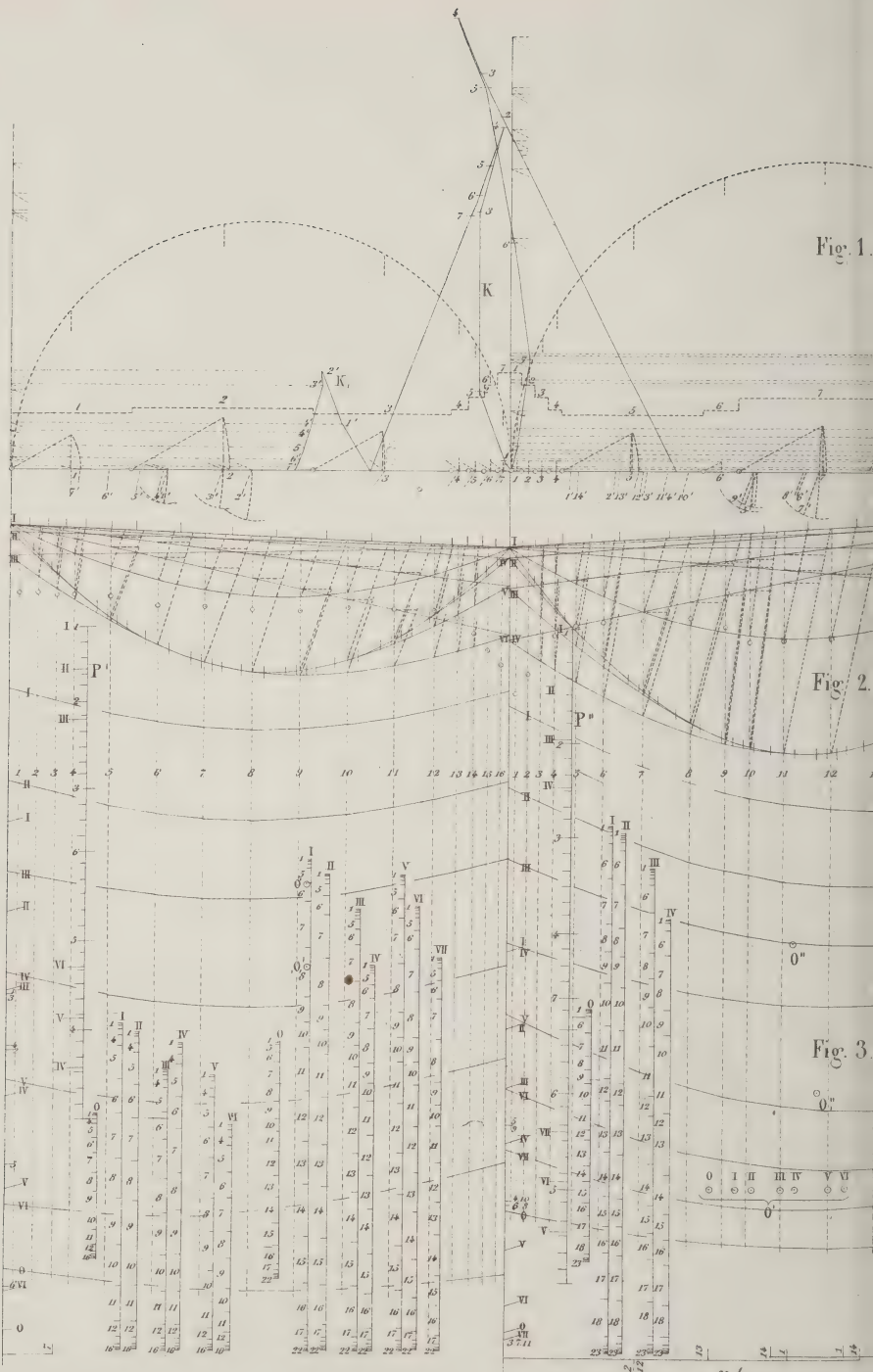


Fig. 1.

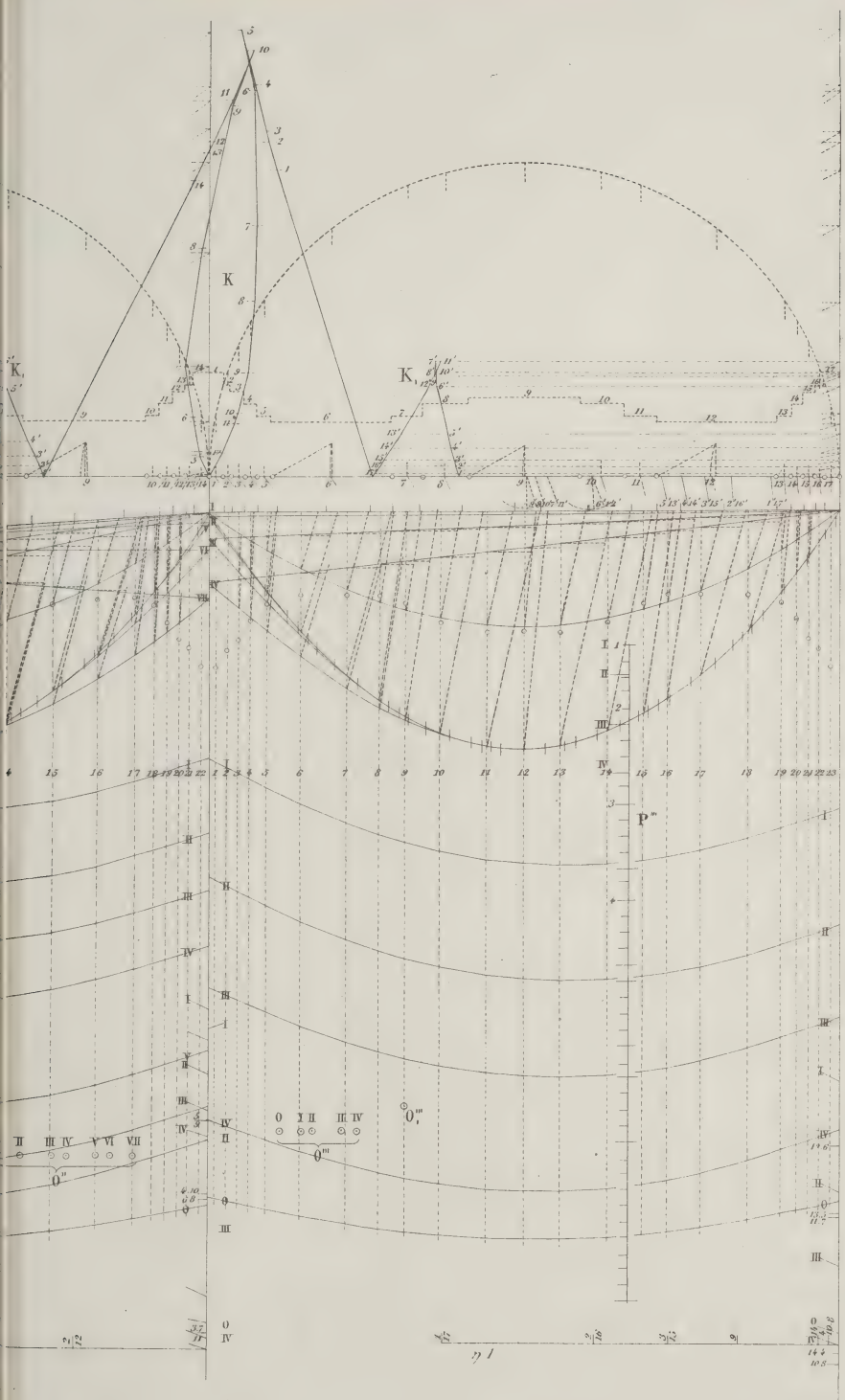
Fig. 2.

Fig. 3.

Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich

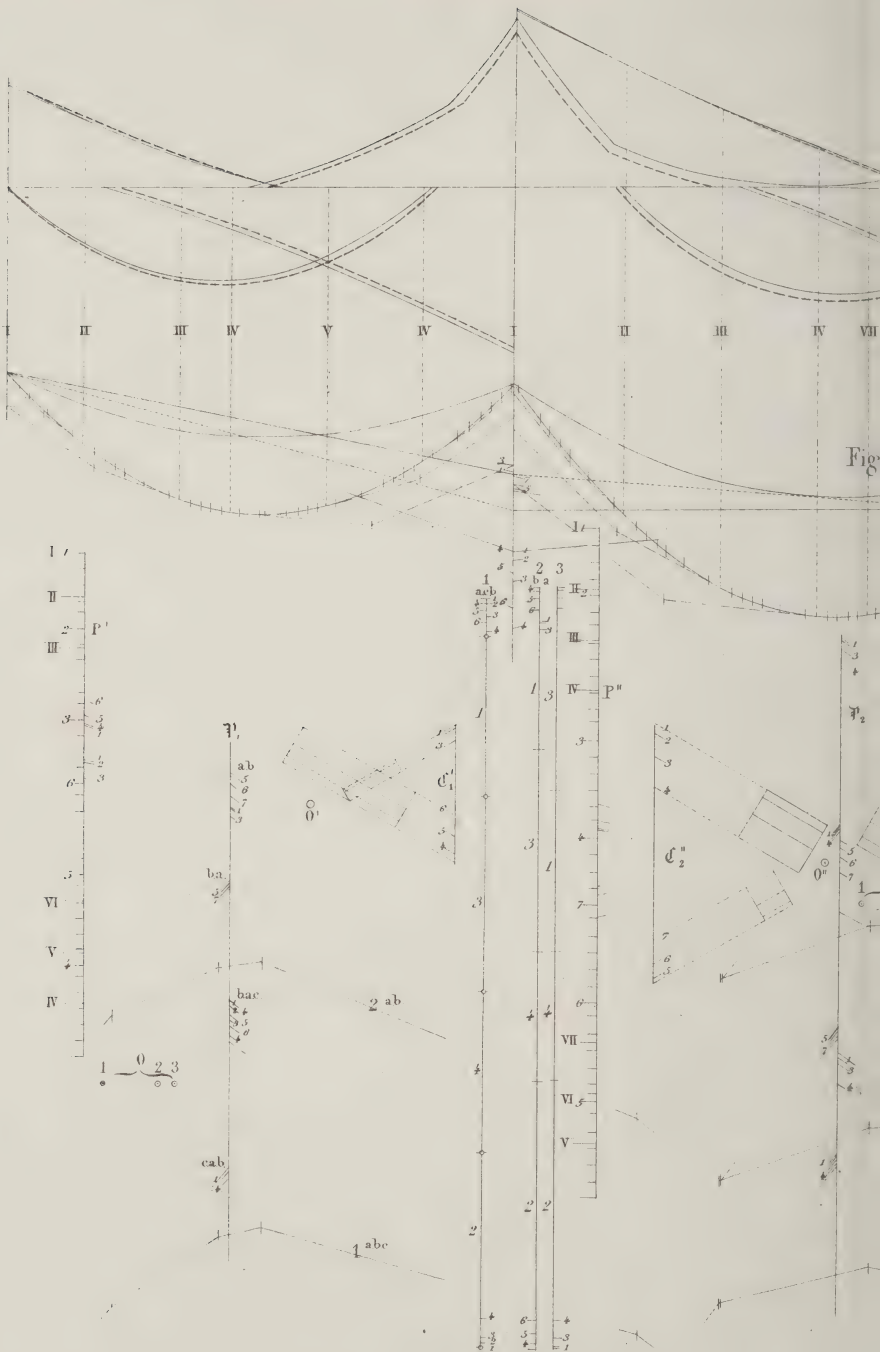
Lith. Anstalt von Wurster,

2,70, 56 Met. Weite bei variablem Querschnitt



ger & Cº in Winterthur.

5. ungleichförmig belastete Öffnungen von



Fig

Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster, R

) 72 70 56 met. Weite bei variablem Querschnitt

att

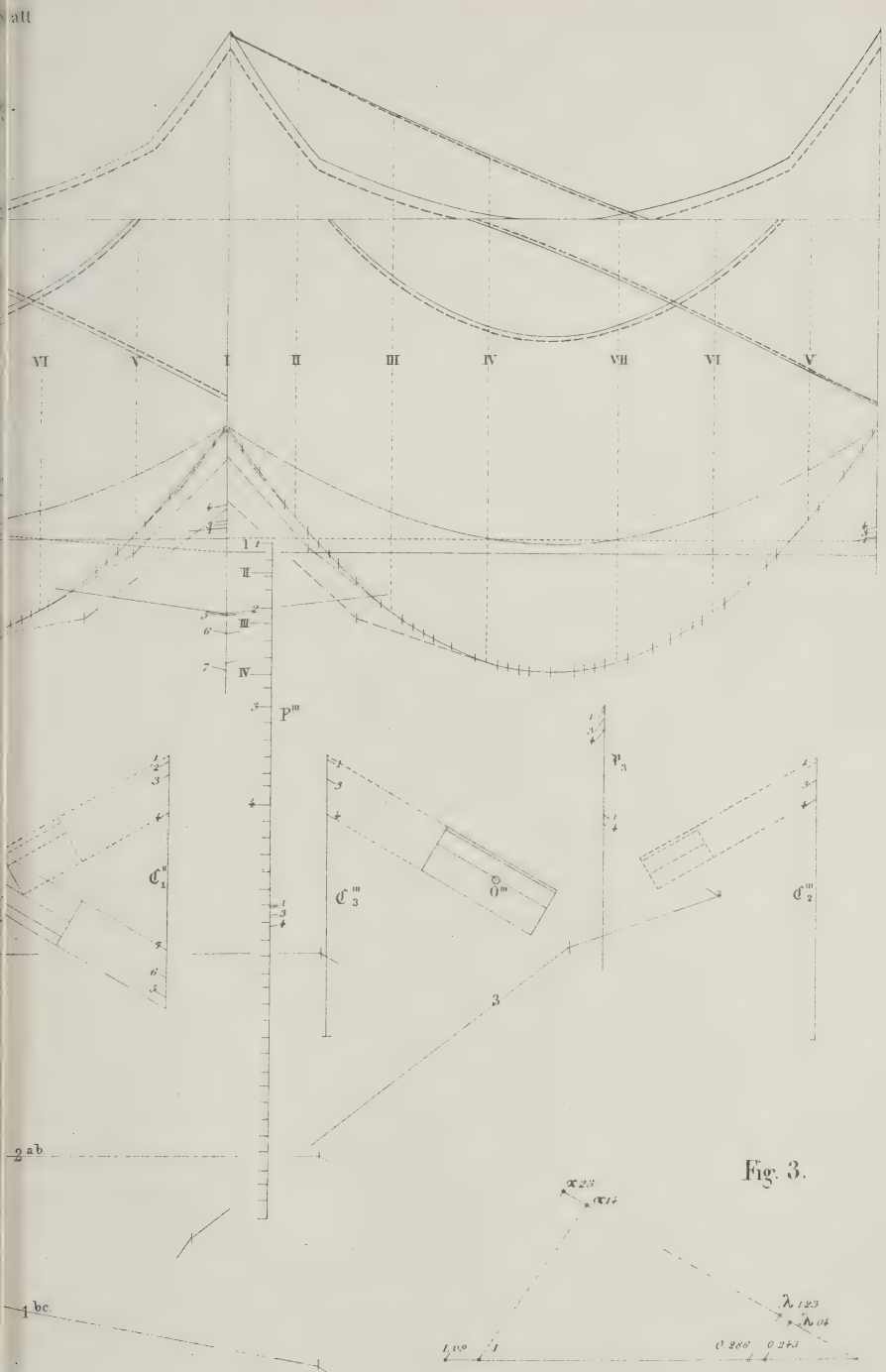


Fig. 3.

ger & C° in Winterthur

Das Fachwerk

Das Seilpolygon

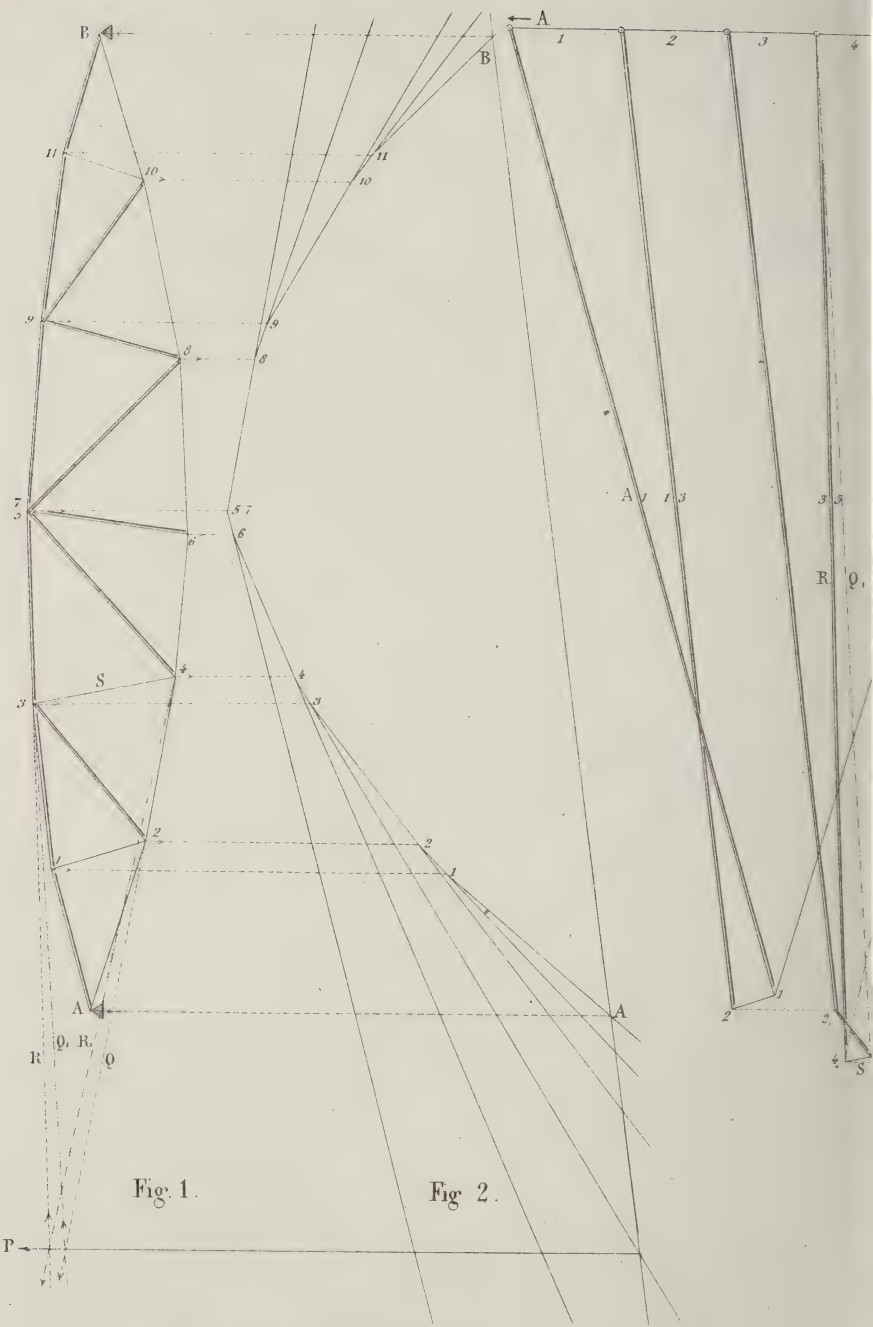


Fig. 1.

Fig. 2.

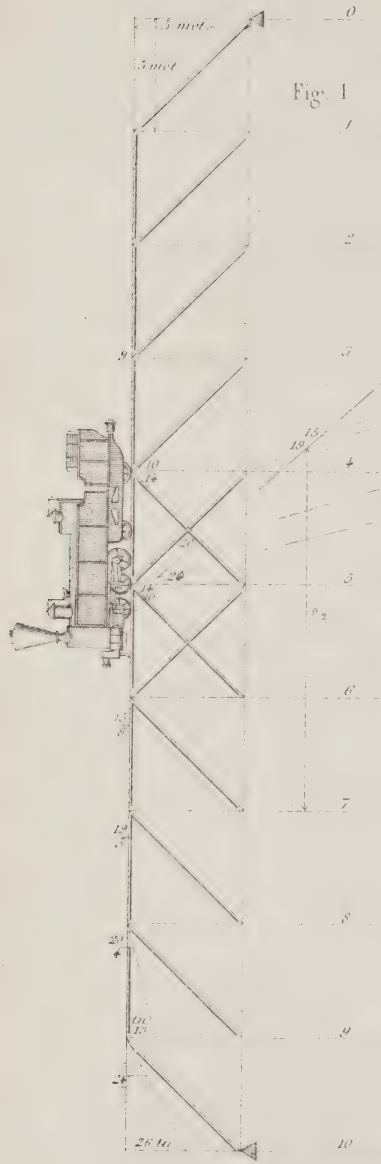
Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

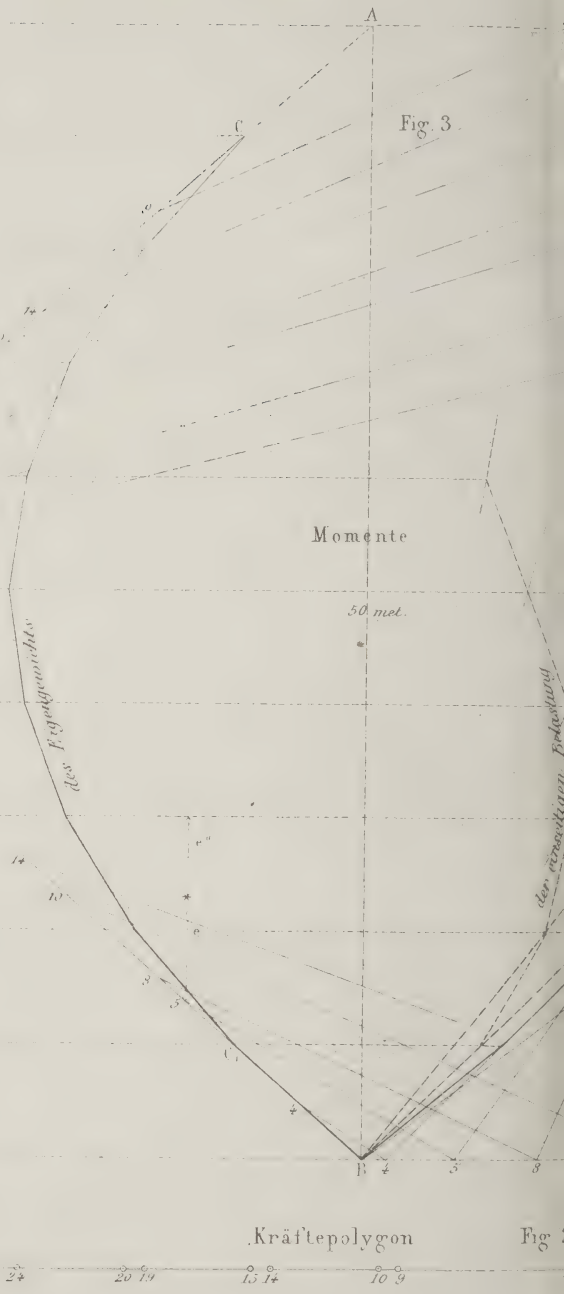
Lith. Anstalt von Wurster, Randegger

Der Kräfteplan

Fig. 3.

in Winterthur





Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich

Lith. Anstalt v. Wurster, Ran

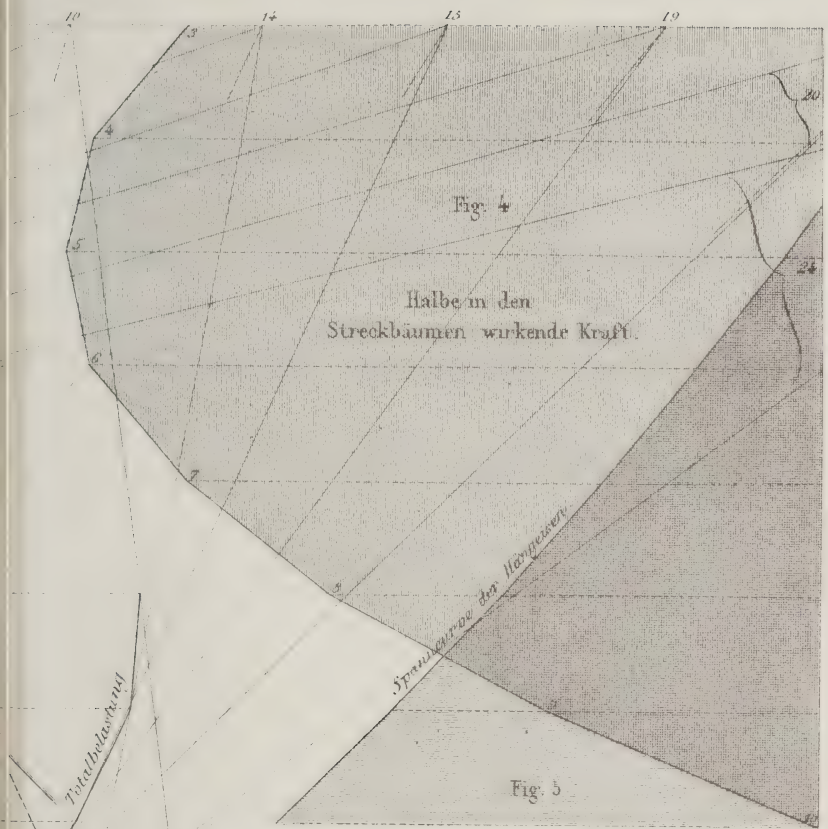
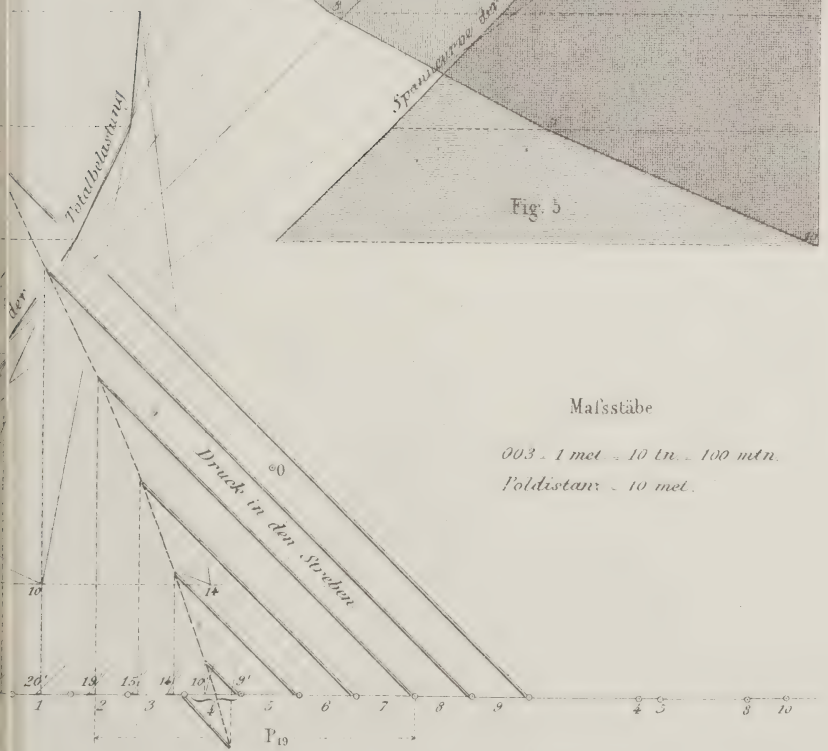


Fig. 4

Fig. 5

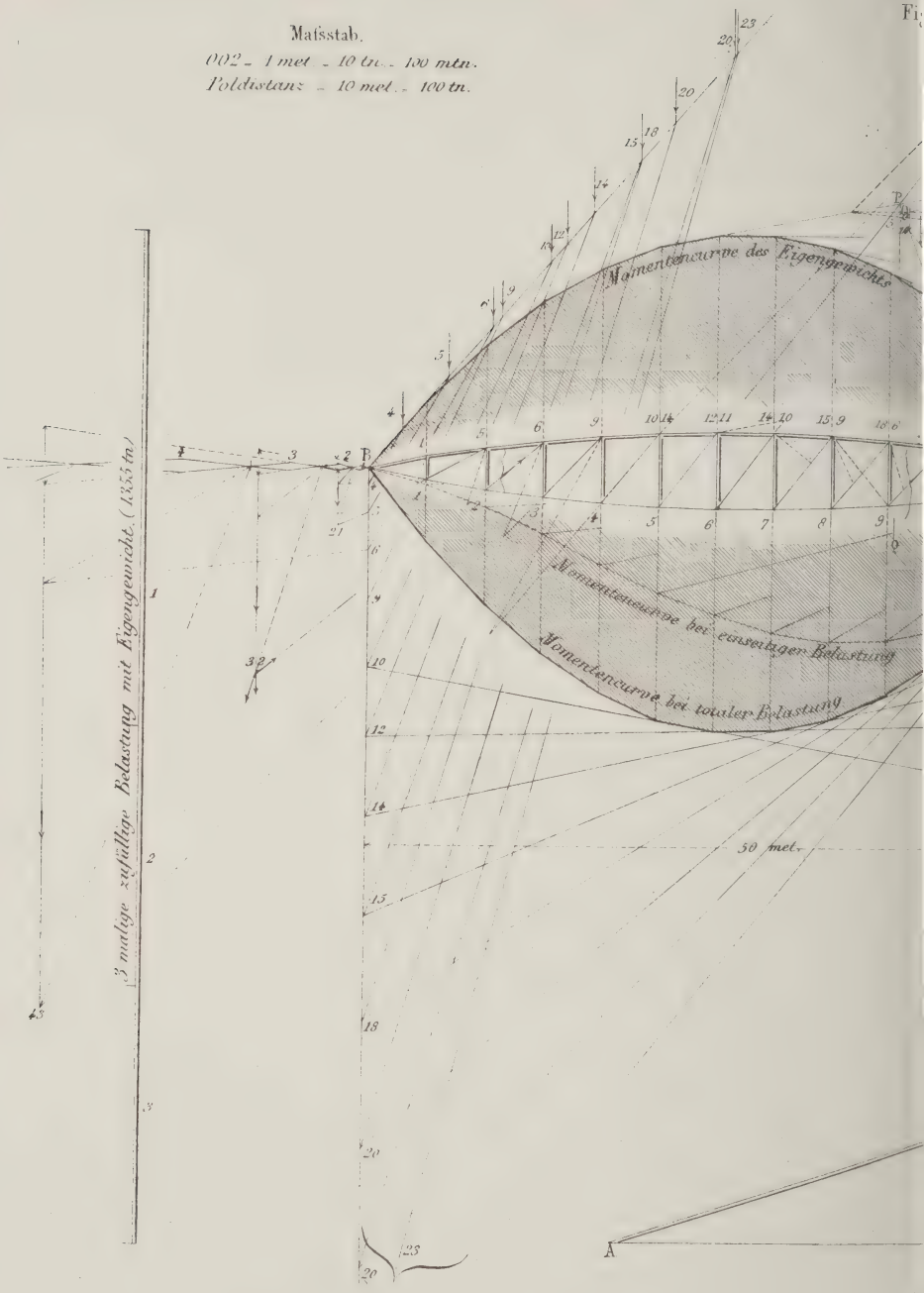


Maßstäbe

003 = 1 met = 10 tn = 100 mtn.

Poldistanz = 10 met.

& C° in Winterthur.



Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster, Randegger

Träger.

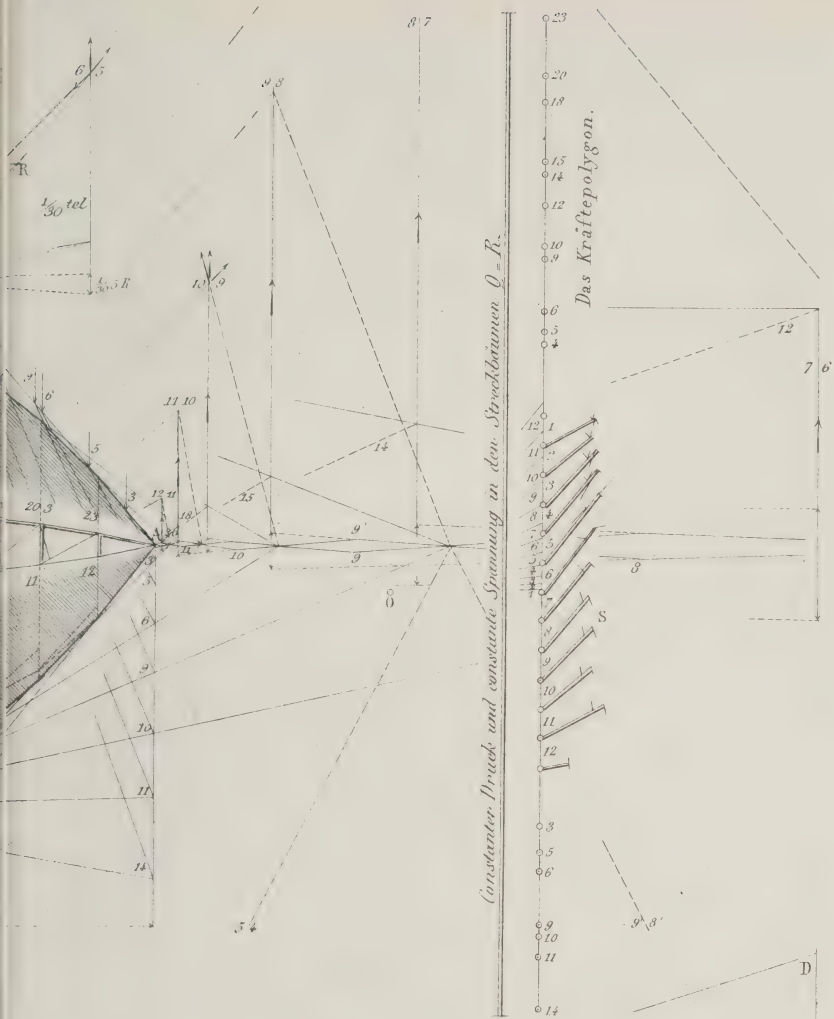
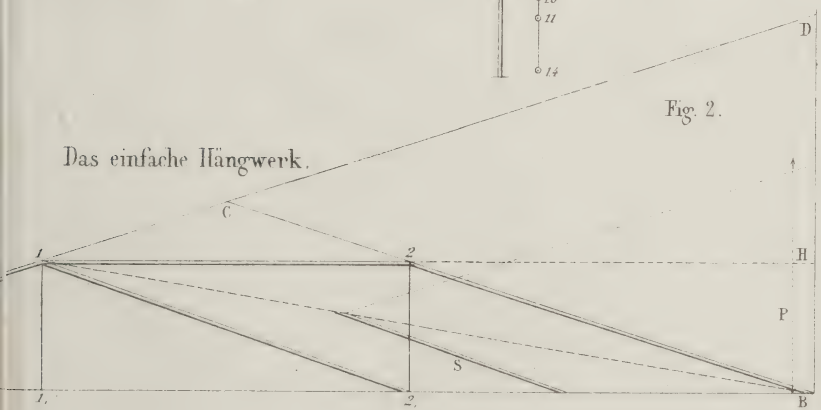


Fig. 2.

Das einfache Hängwerk.



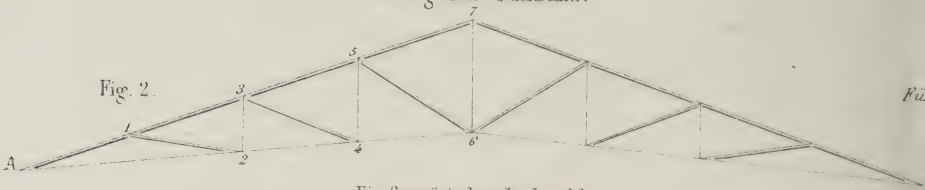
in Winterthur.

Ein belgischer Dachstuhl.

Fig. 1.

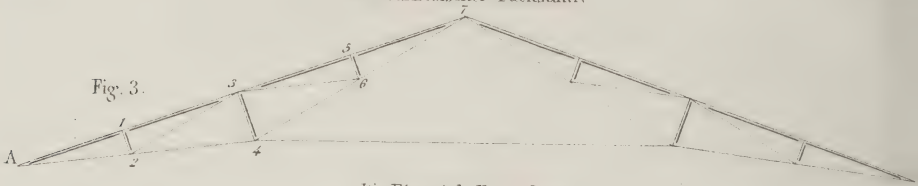
Der englische Dachstuhl.

Fig. 2.



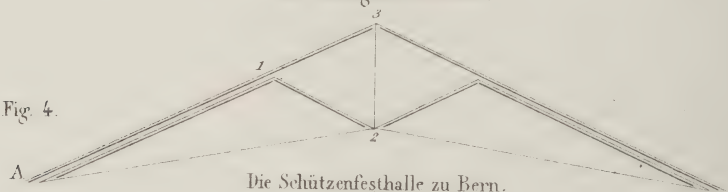
Ein französischer Dachstuhl.

Fig. 3.



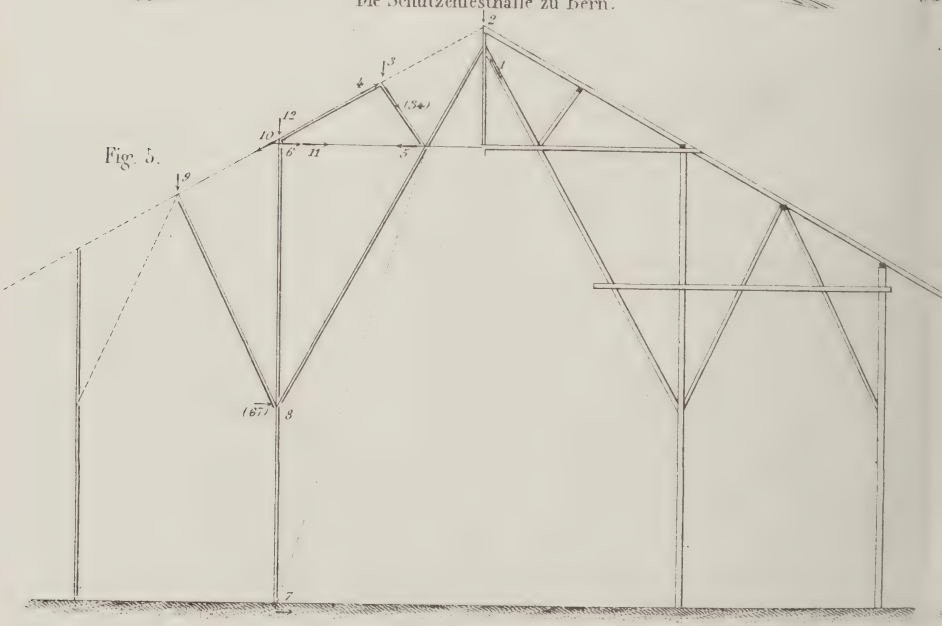
Die Einsteighalle zu Bern.

Fig. 4.



Die Schützenfesthalle zu Bern.

Fig. 5.

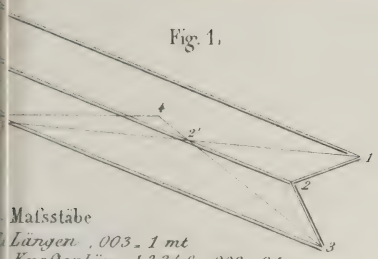


Verlag von Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster, Ran

Kräftepläne.

Fig. 1.



Maßstäbe
Längen . 003 = 1 mt
Kräftepläne 1 2 3 4 6 . 003 = 2 tn
5 7 . 003 = 1 tn

Fig. 4.

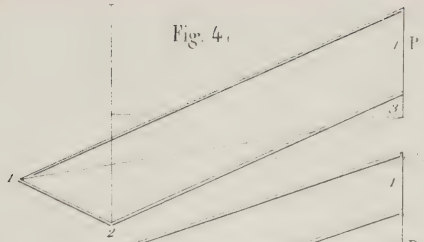


Fig. 2.

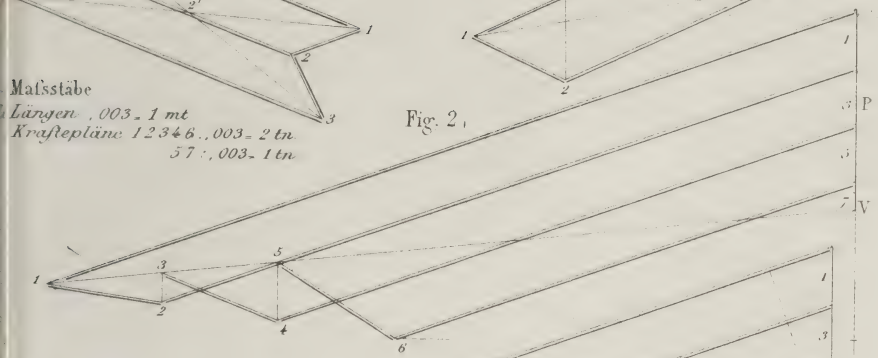


Fig. 3.

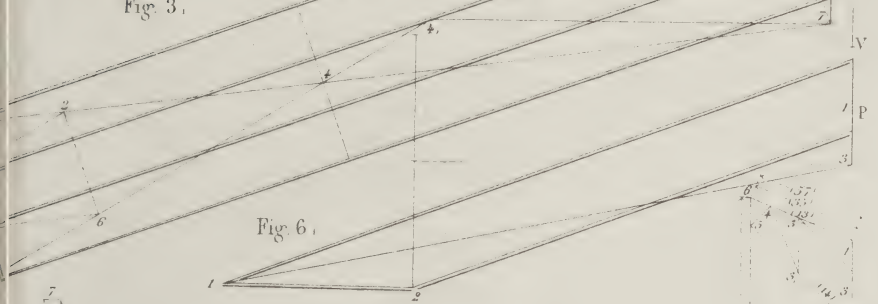
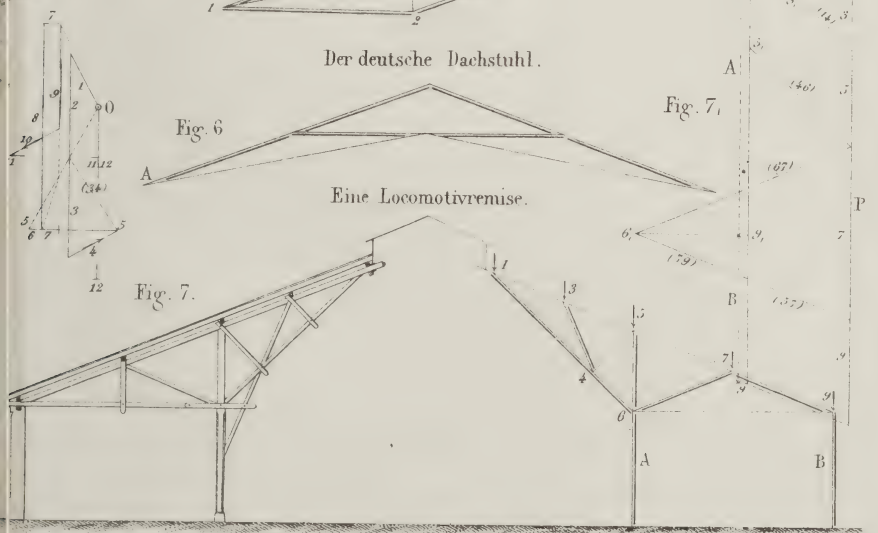


Fig. 6.



Der deutsche Dachstuhl.

Fig. 6

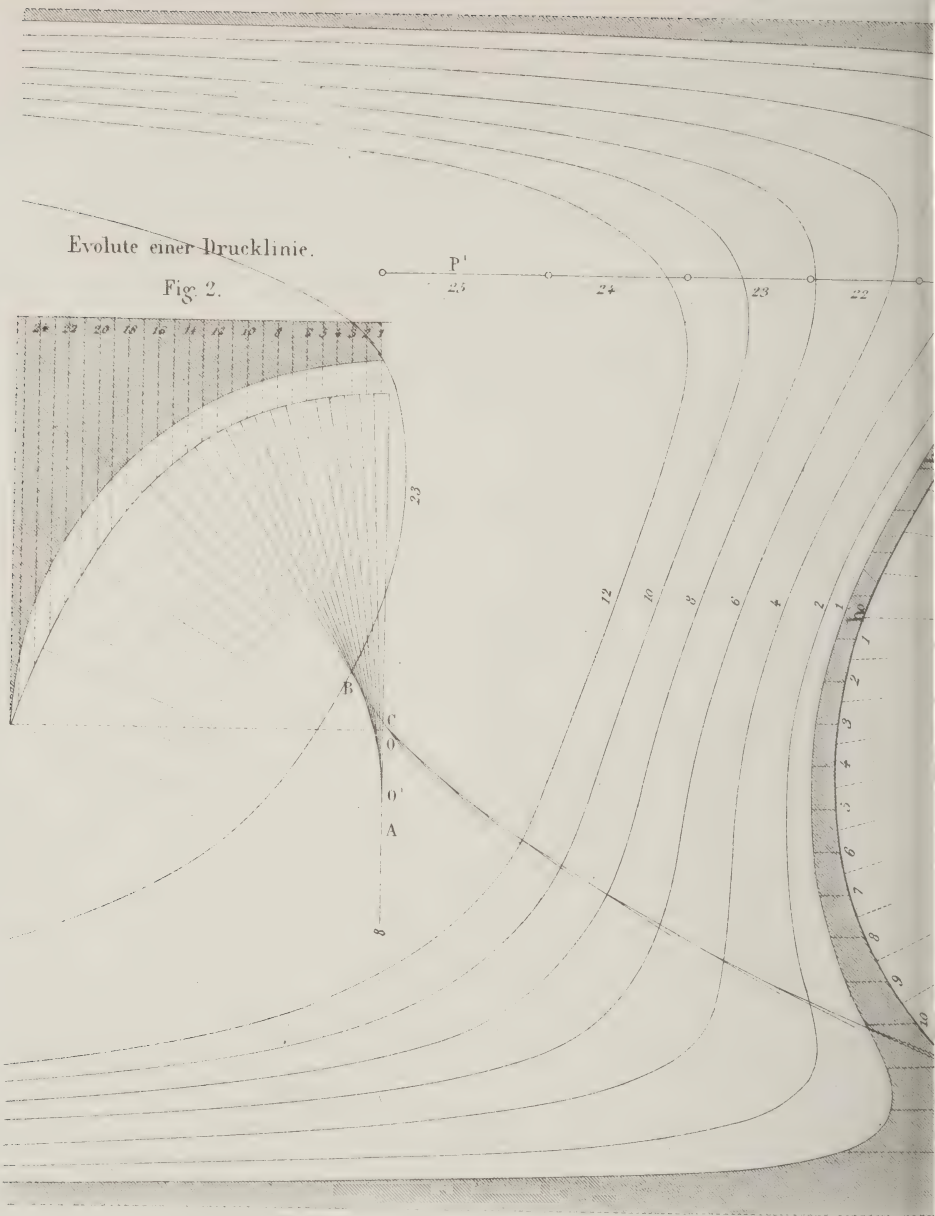
Eine Locomotivremise.

Fig. 7.

Fig. 7.

& C. in Winterthur.

Belastungscurven eines



Evolute einer Drucklinie.

Fig. 2.

Verlag v. Meyer u Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster, Ra

ien Gewölbes.

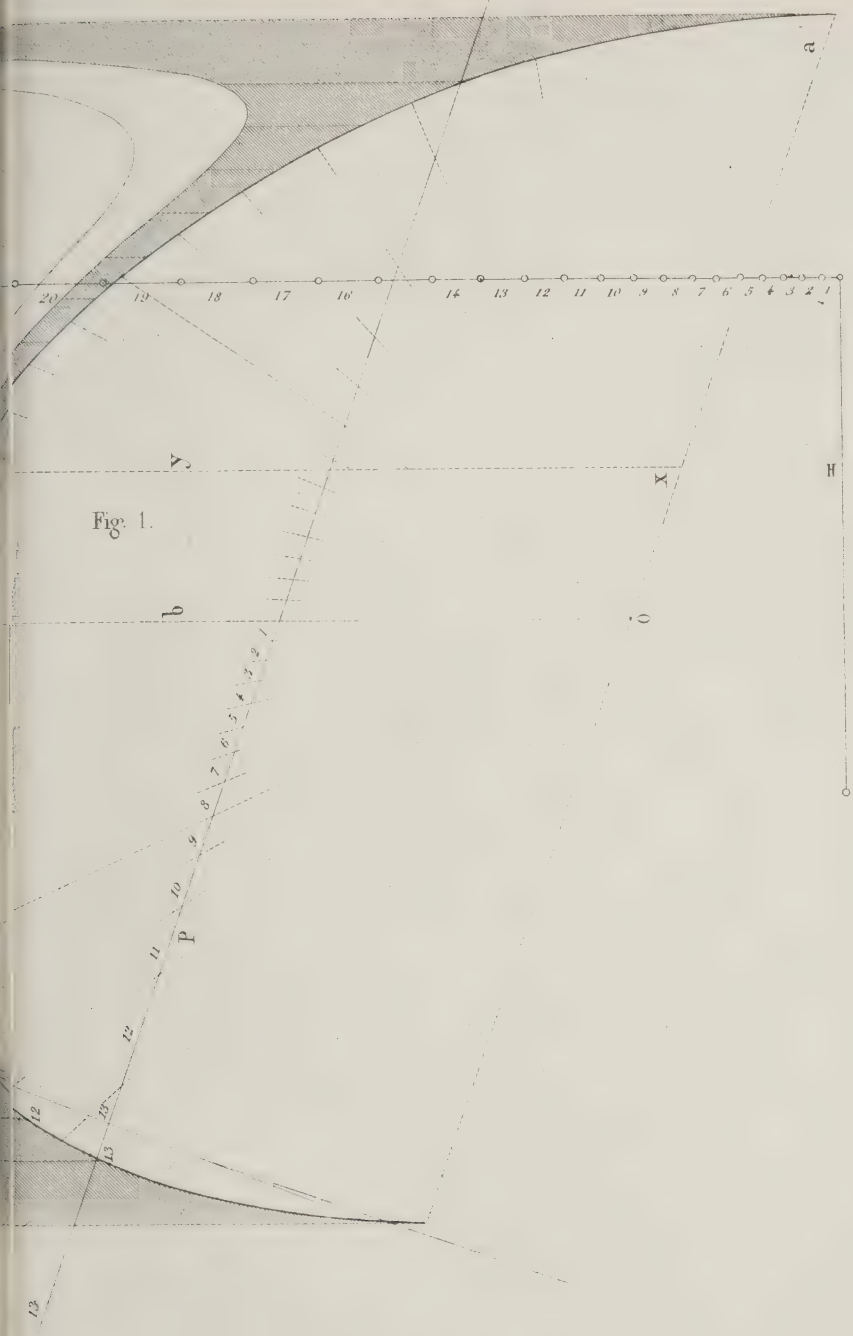


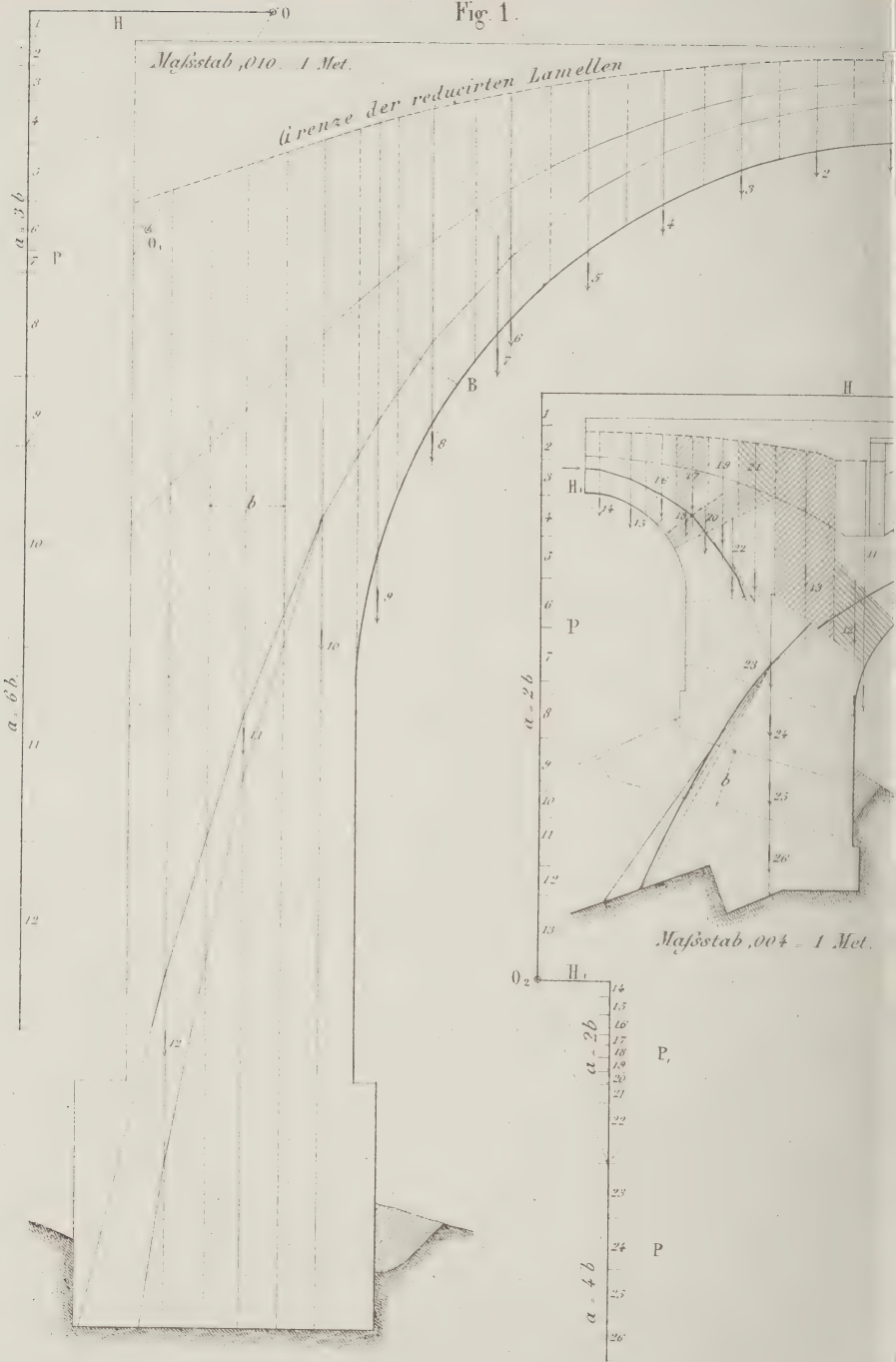
Fig. 1.

gr & Cº in Winterthur.

UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

Halbkreisbogen.

Fig. 1.



Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt von Wurster, Randeg

Entlastungsräume (zu Fig. 3)

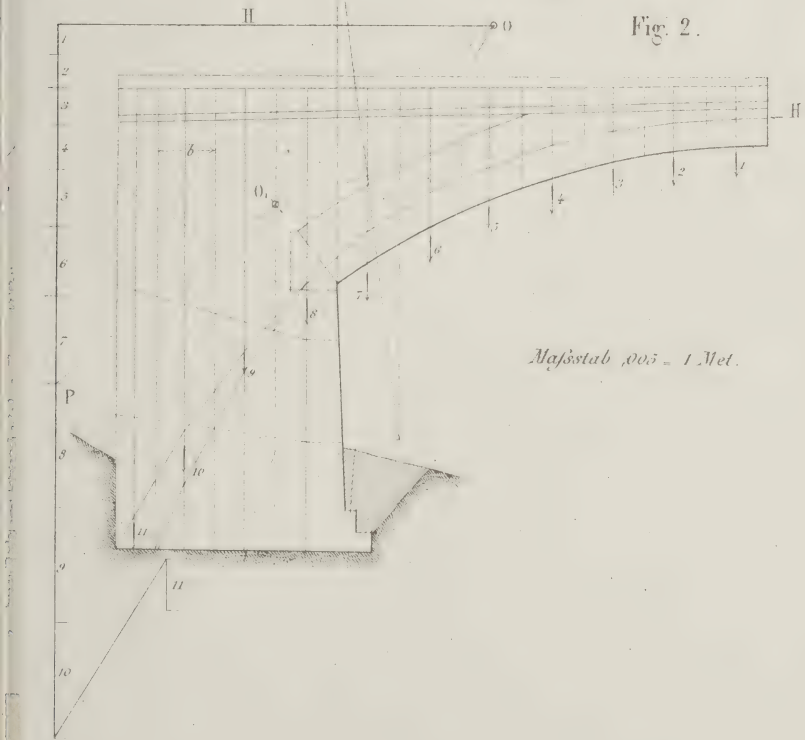
Fig. 4.

pelbogen des Maidenhead Viaducts.

Fig. 3

Stichbogen

Fig. 2.



Maßstab ,005 = 1 Met.

Druck eines kre

Fig. 1.

Fig. 3.

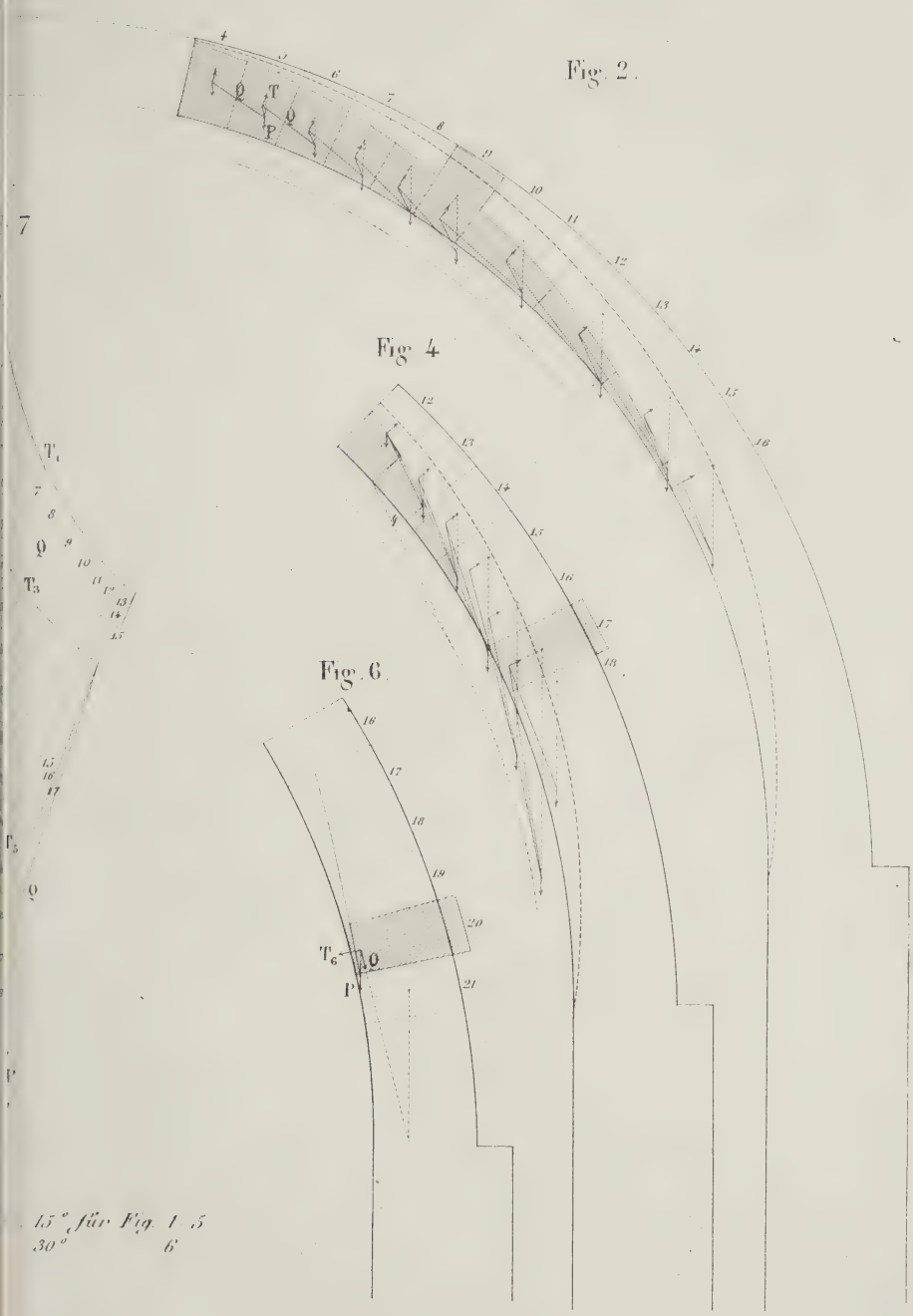
Fig. 5.

Reibungswink

erlag v Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt von Wurster,

migen Gewölbes.



Culmann, graphische Statik

ggen & C° in Winterthur.

Fig. 1.

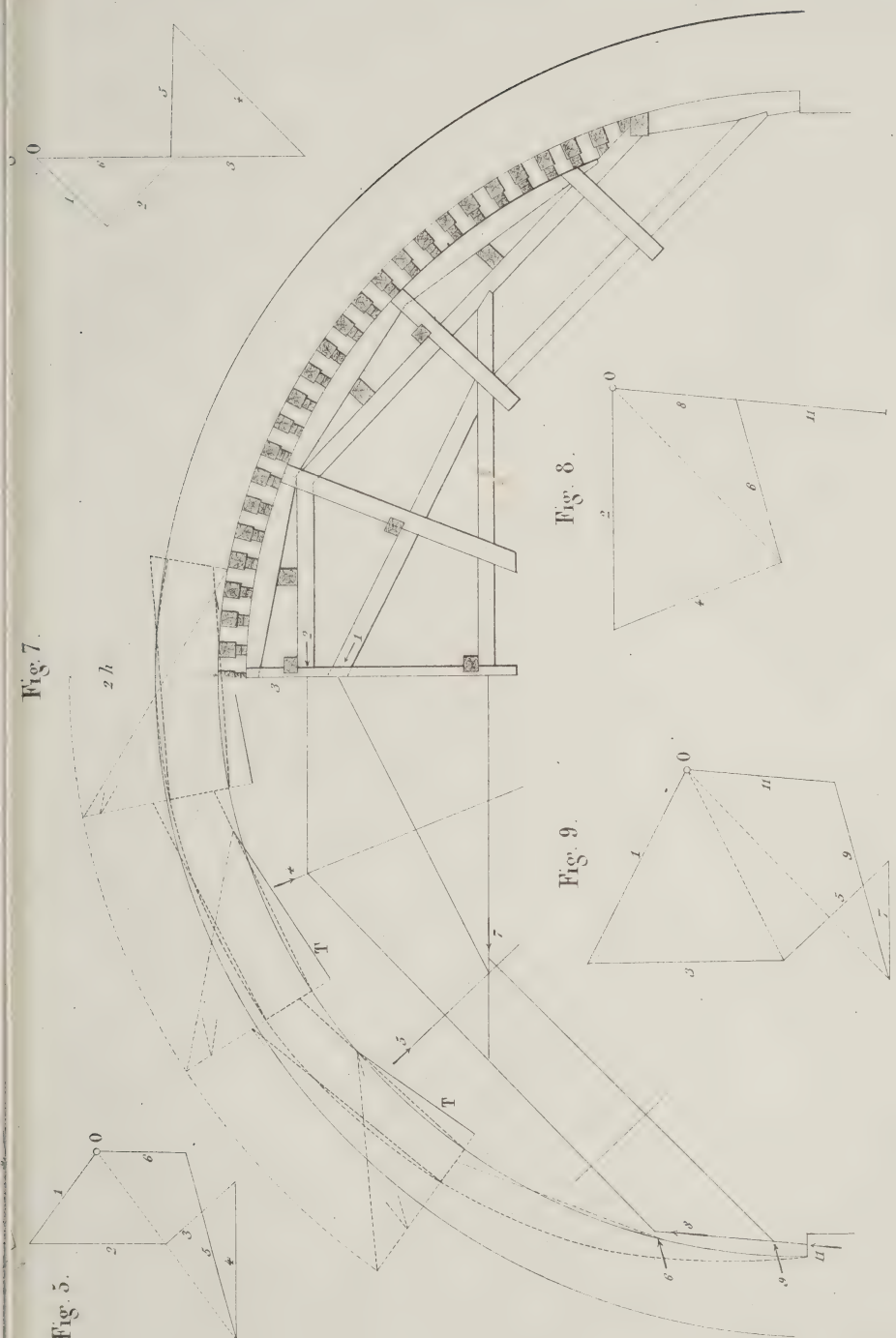
Fig. 4.

Fig. 3.

Fig. 2.

ag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

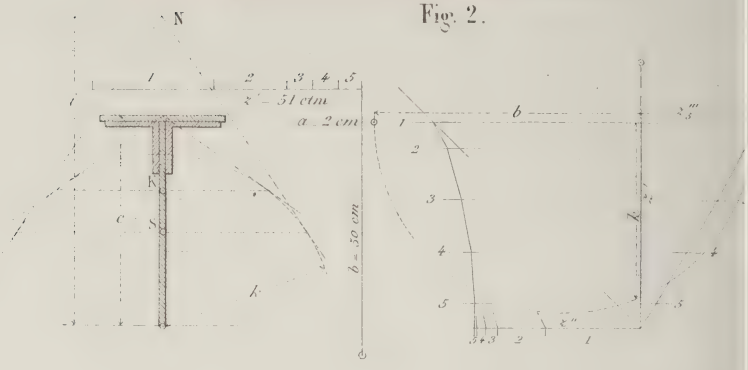
Lithogr. Anstalt v. Wurster,

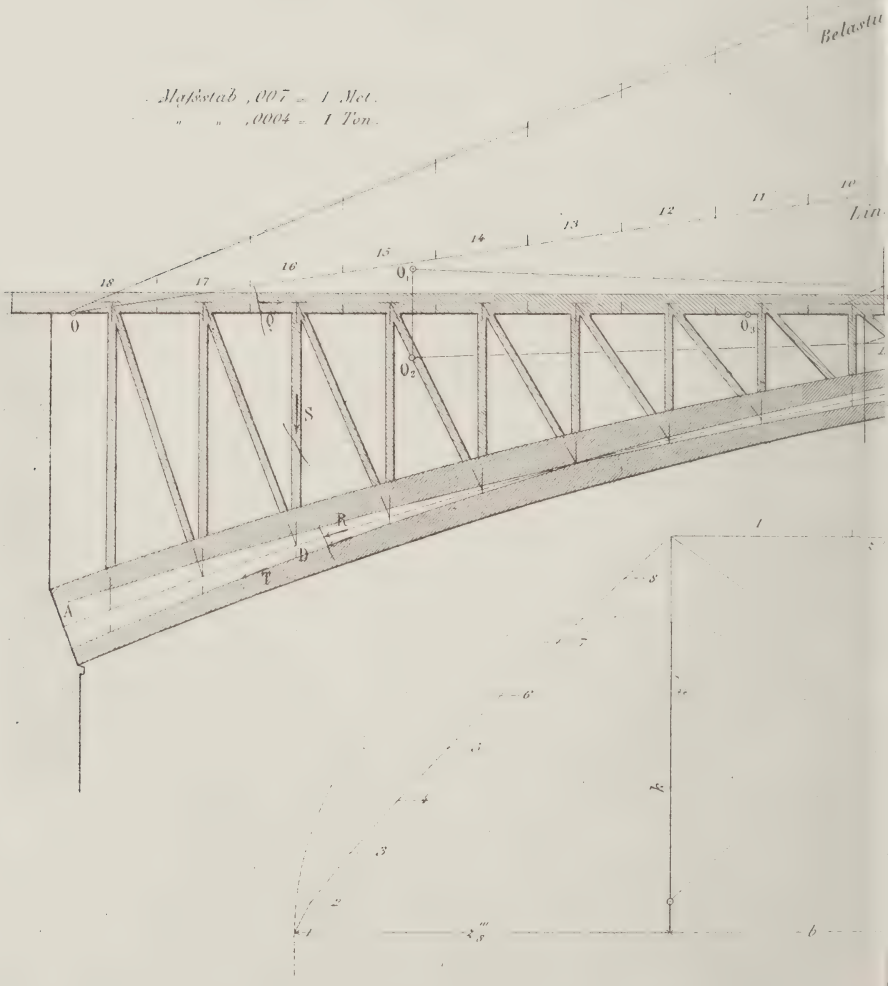


egger & C° in Winterthur.

Querschnitt bei dem obern Bruchpunkt.

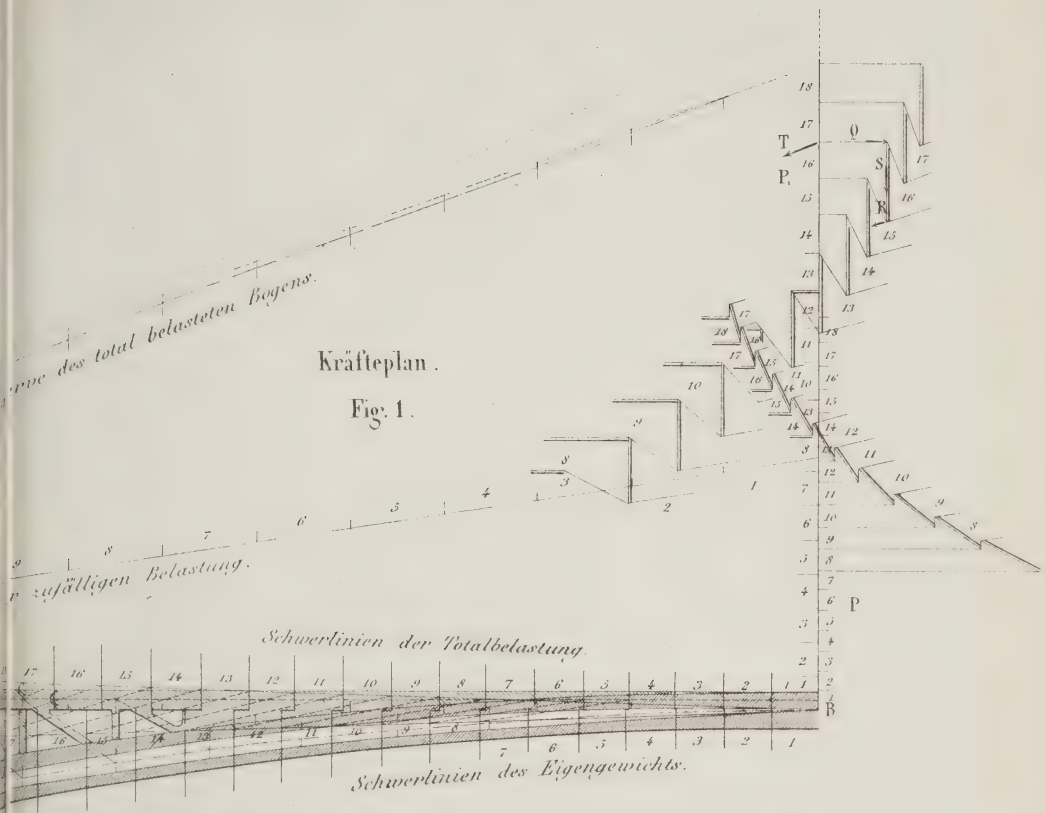
Fig. 2.





Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wu



Querschnitt am Widerlager.

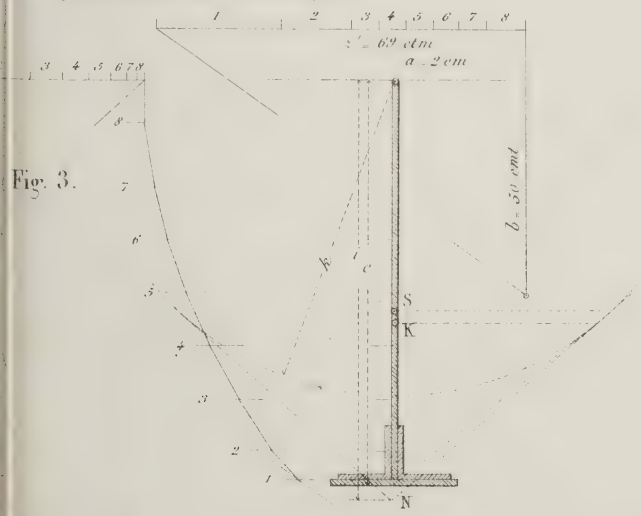


Fig. 3.

tab ,07 1 Met

Randegger & Cie in Winterthur.

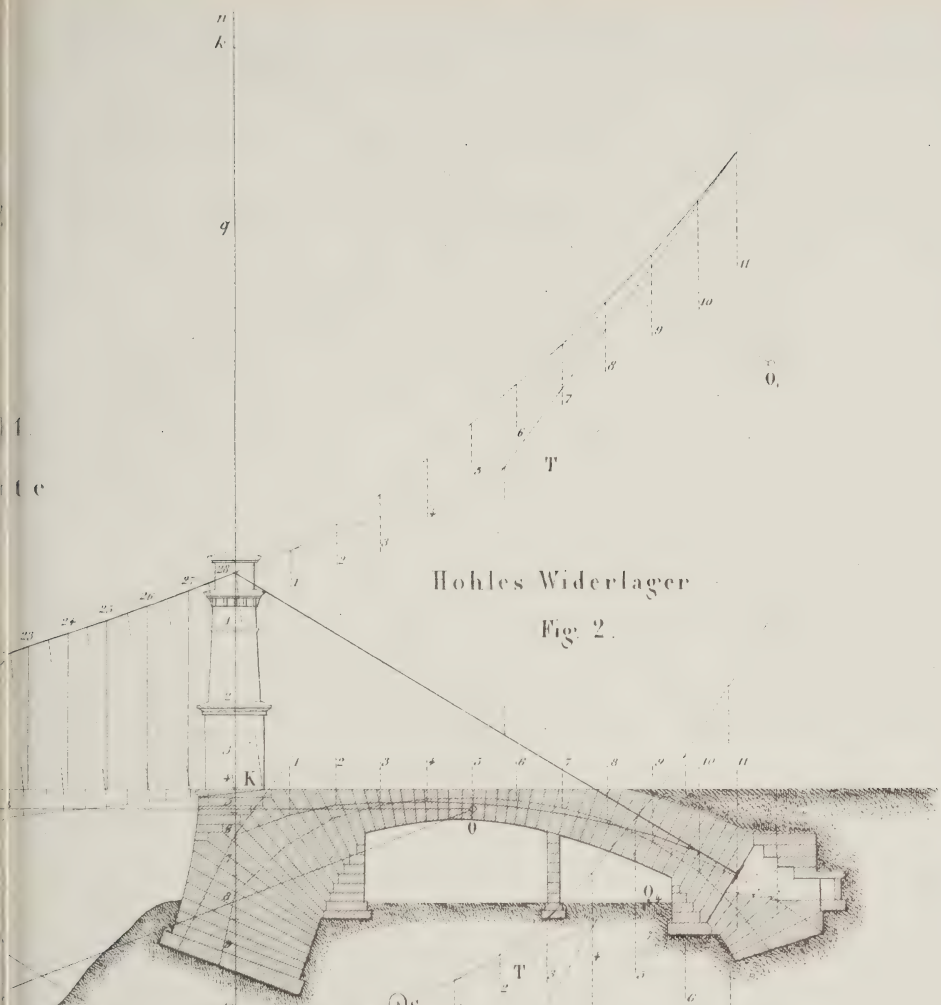
KRÆFTEPLAN EINER HÆNGEBRÜCK

Mafsstäbe

für die Längen		
" " Kräfte	Fig. 2 u. 3	,003 = 100 Ton.
" " "	Fig. 4	,0015 = 100 Ton.
Spannweite		2 l = 197 Met.
Pfeil (Pylonenhöhe		f = 19 Met.

Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lithogr. Anstalt v. Wurster, Ra



Hohles Widerlager

Fig. 2.

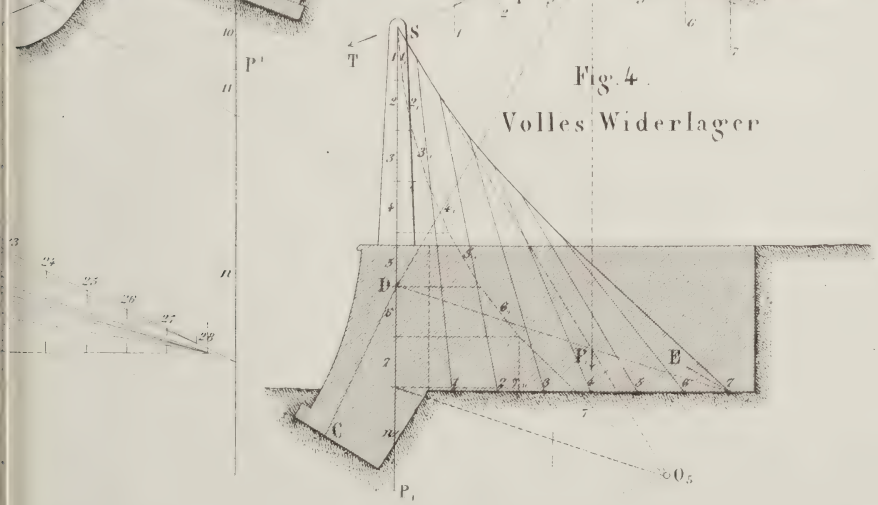


Fig. 4.

Volles Widerlager

r & C° in Winterthur.

Das Fac

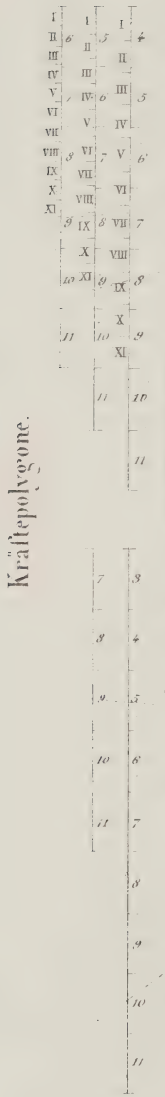
Fig

Fig. 2.

Die Seilpo

Fig.

Kräftepolygone.



Momenten

Fig.

Curven der scheer

Fig.

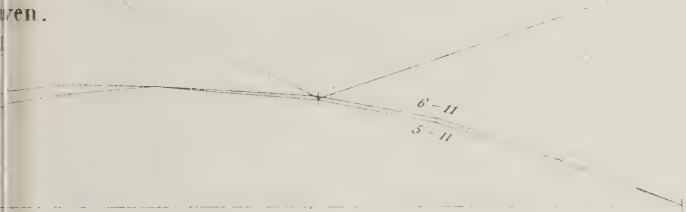
Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt von Wurster, Rand

rk.

one.

ren.

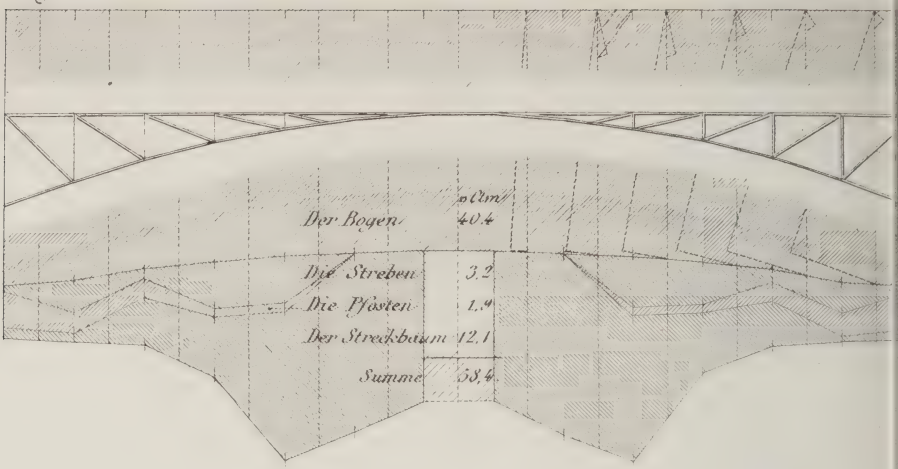


den Kräfte.

e & C° in Winterthur.

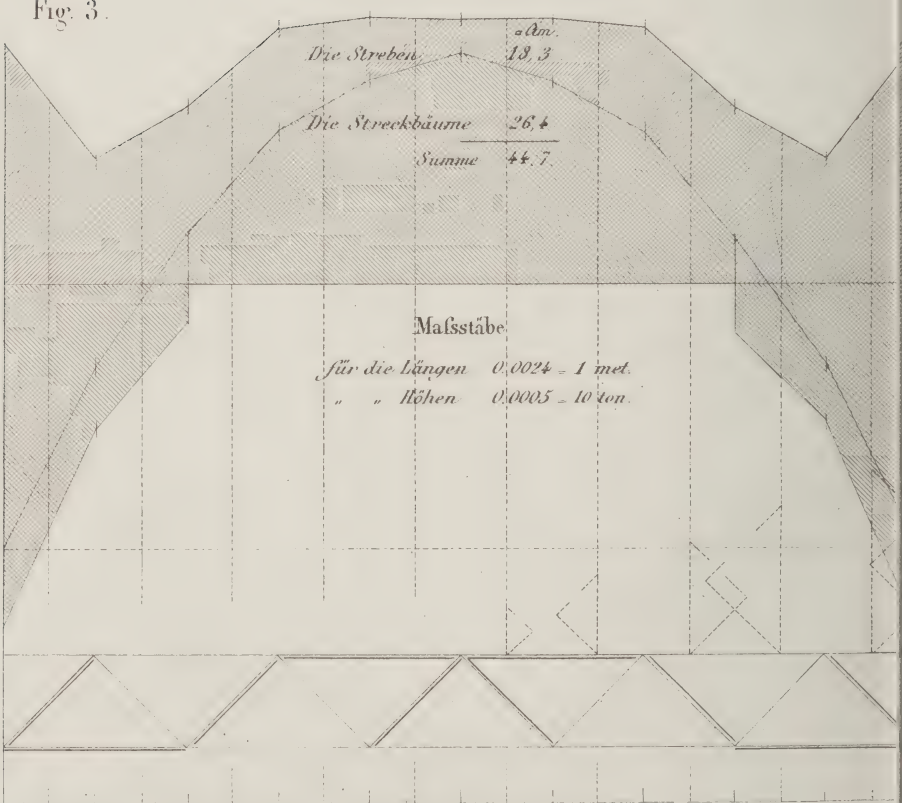
Der Bogen.

Fig. 1.



Der continuirliche Balken.

Fig. 3.

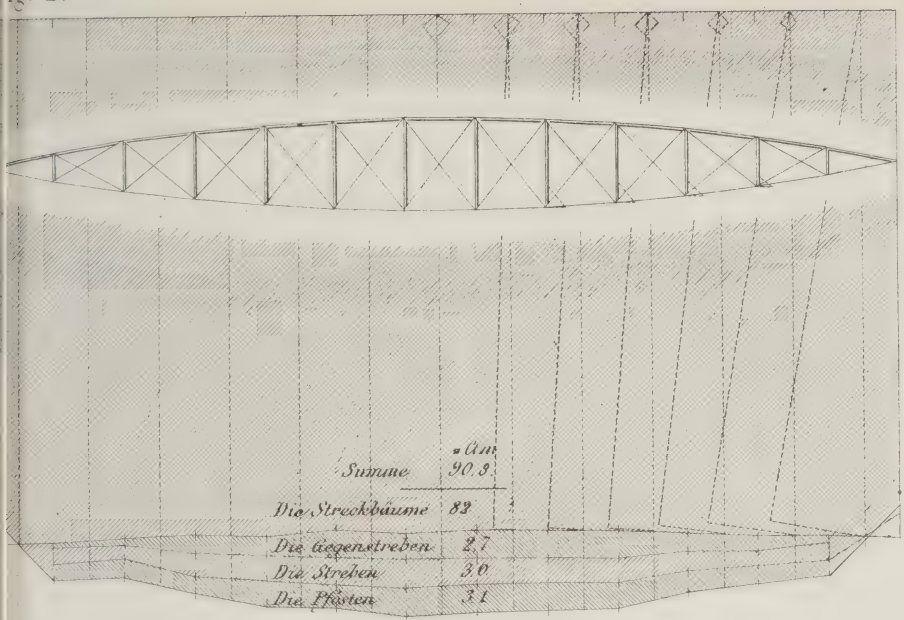


g. v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt von Wurster Ra

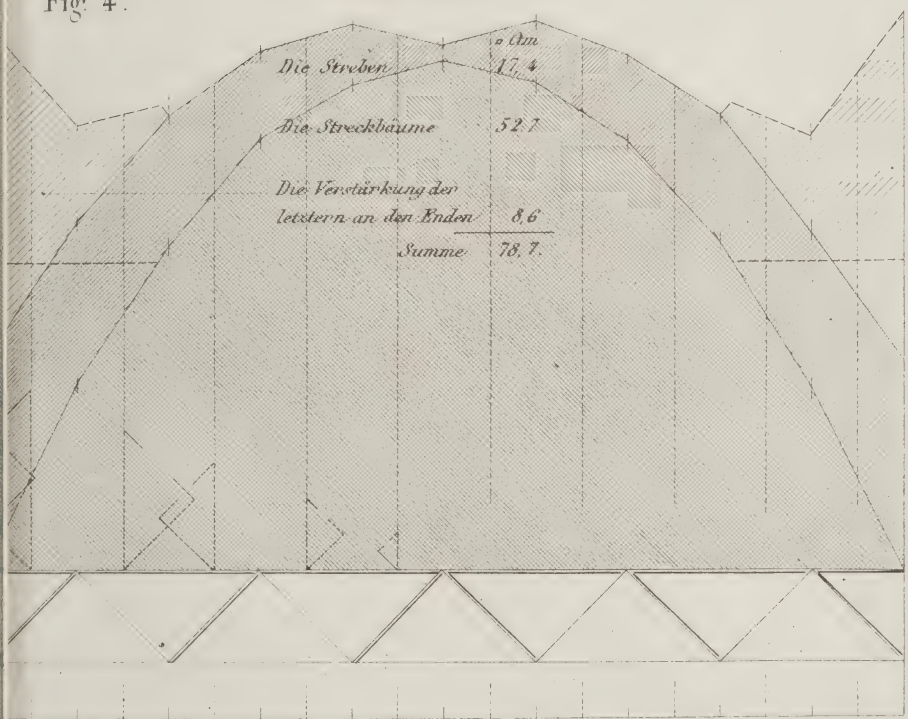
Der Pauli'sche Träger.

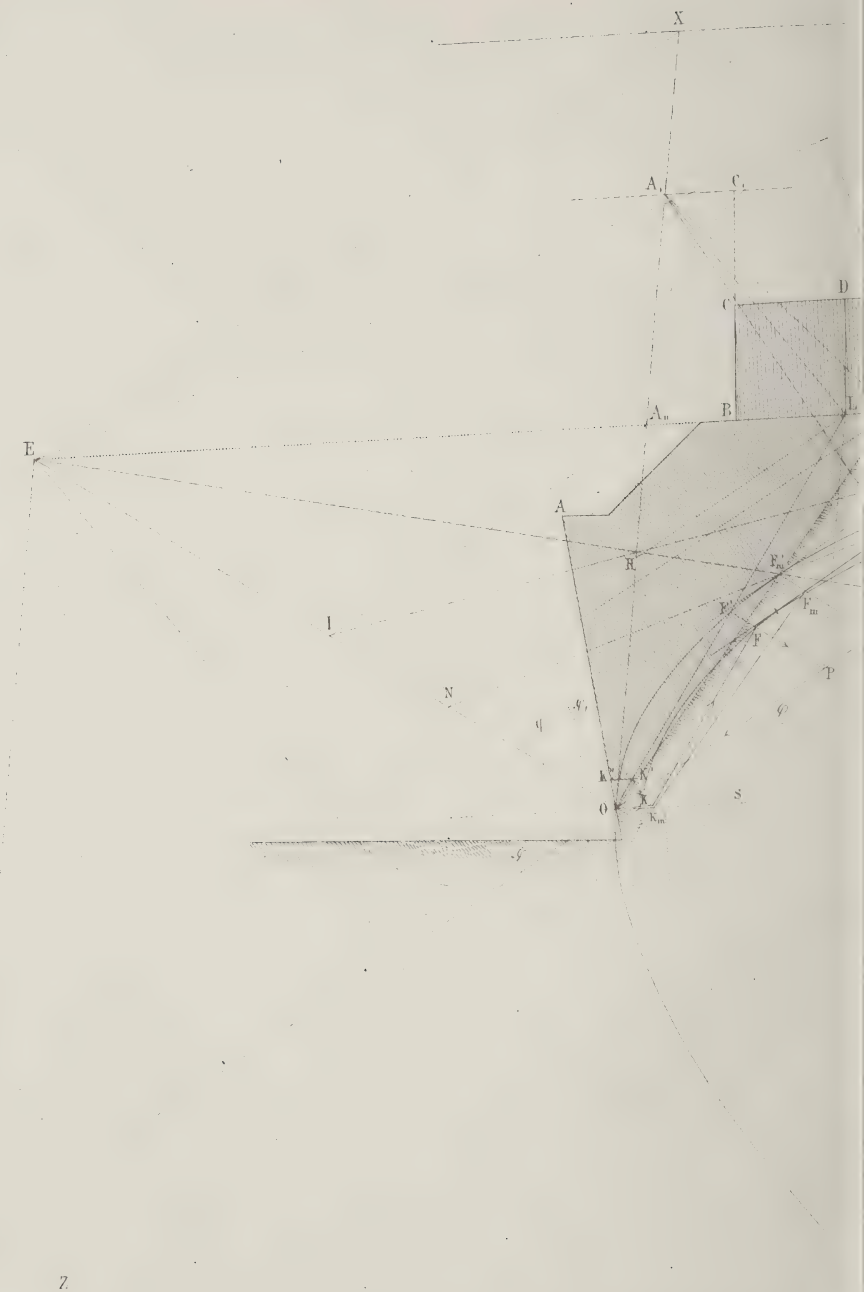
Fig. 2.



Das Fachwerk.

Fig. 4.





Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich

Lith. Anstalt v. Wurster, Randegger & C

CK.

Fig. 1.

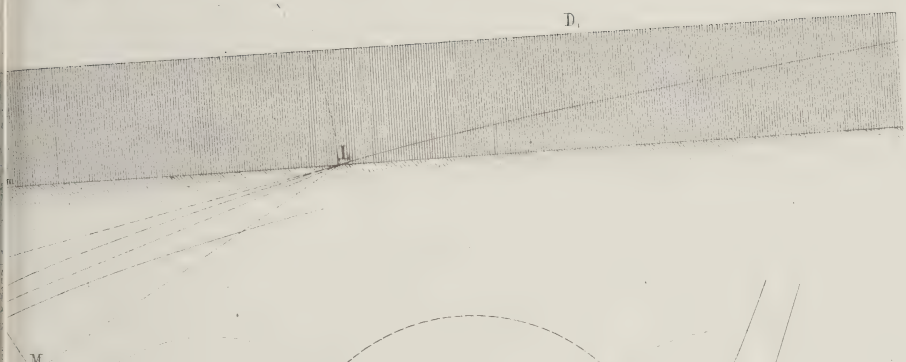


Fig. 3.

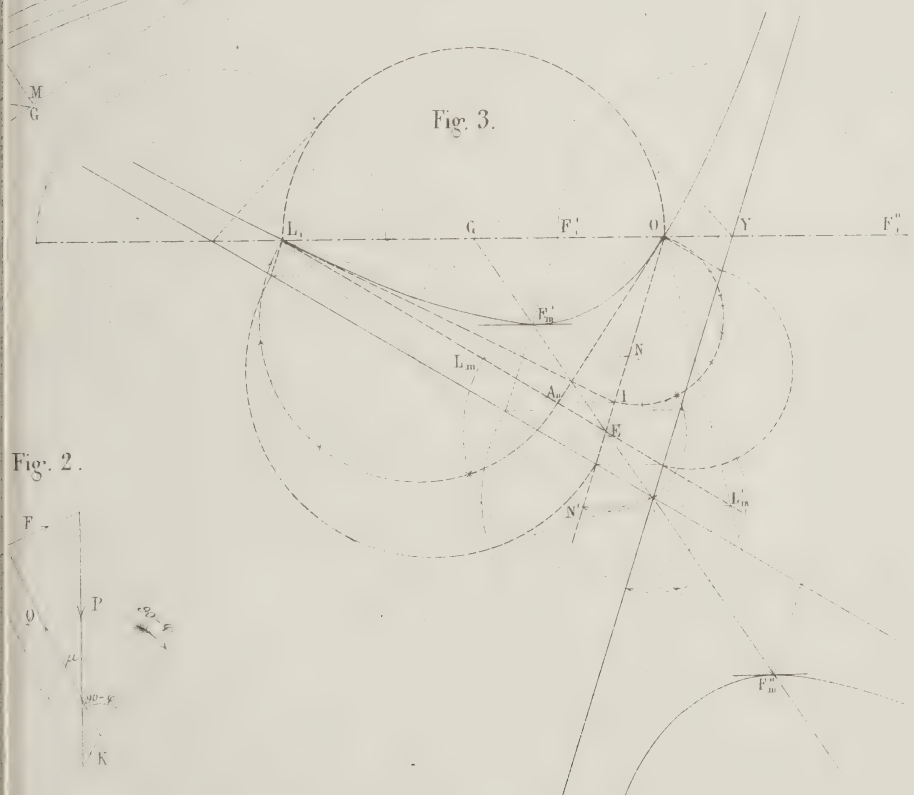
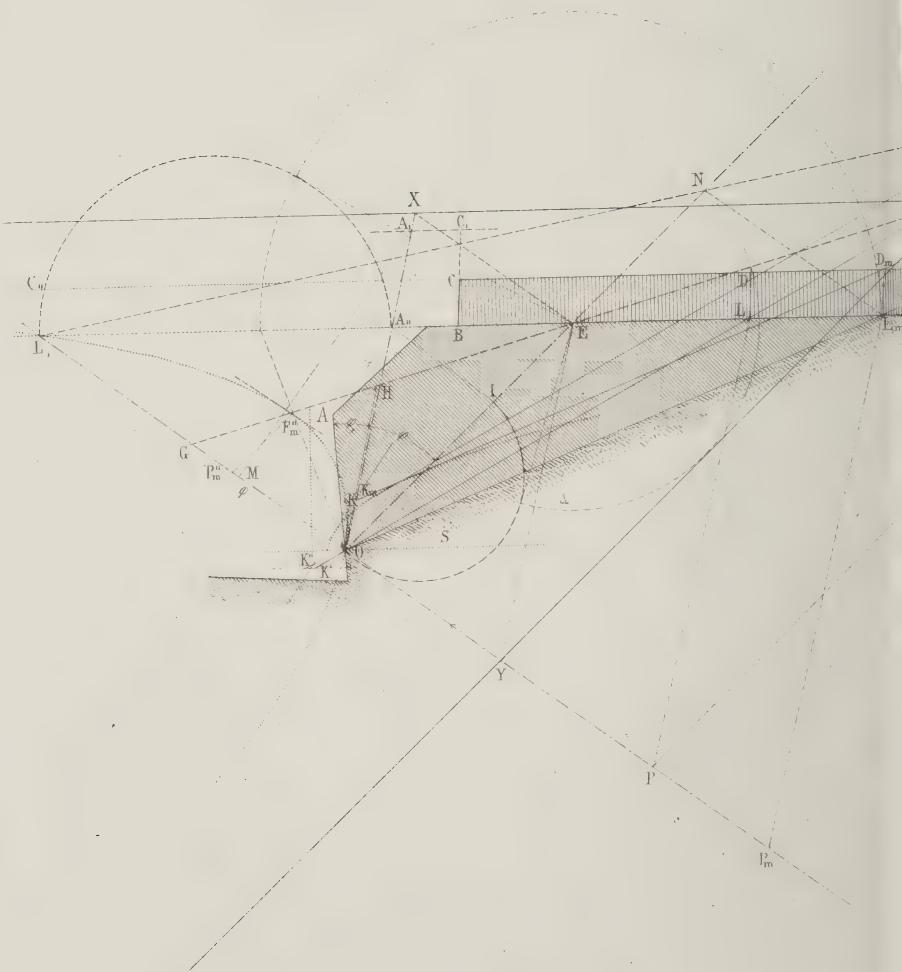


Fig. 2.

Culmann, graphische Statik

Winterthur.



Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wu

)SCHUB.

Fig. 1.

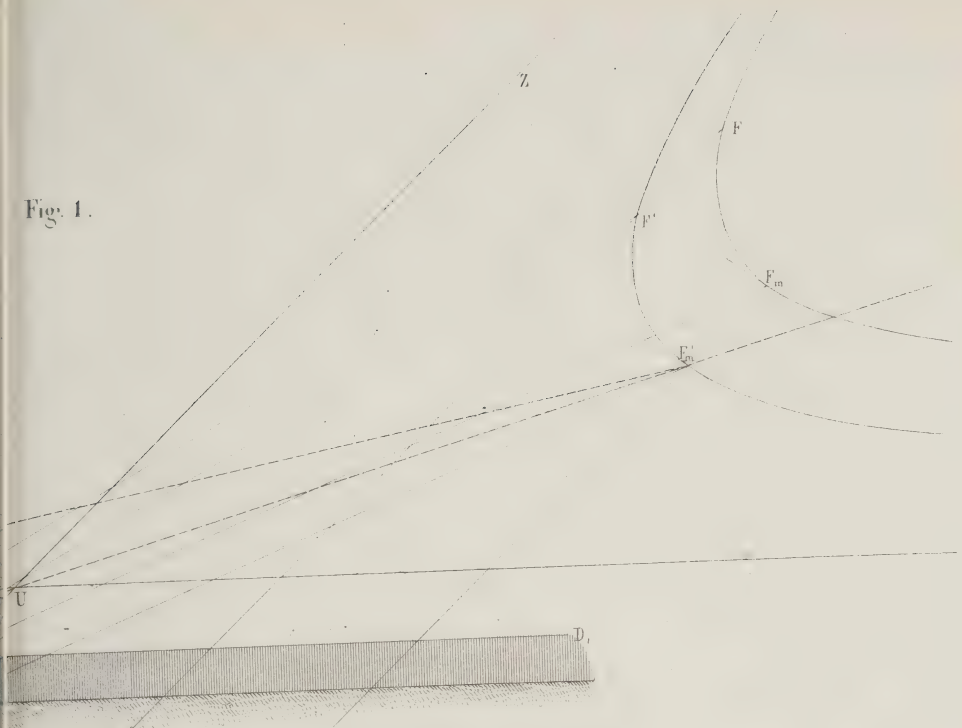


Fig. 2.

Culmann, graphische Statik.

Randegger & Cº in Winterthur.

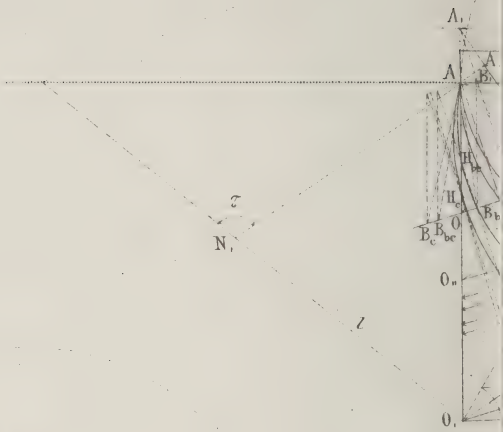
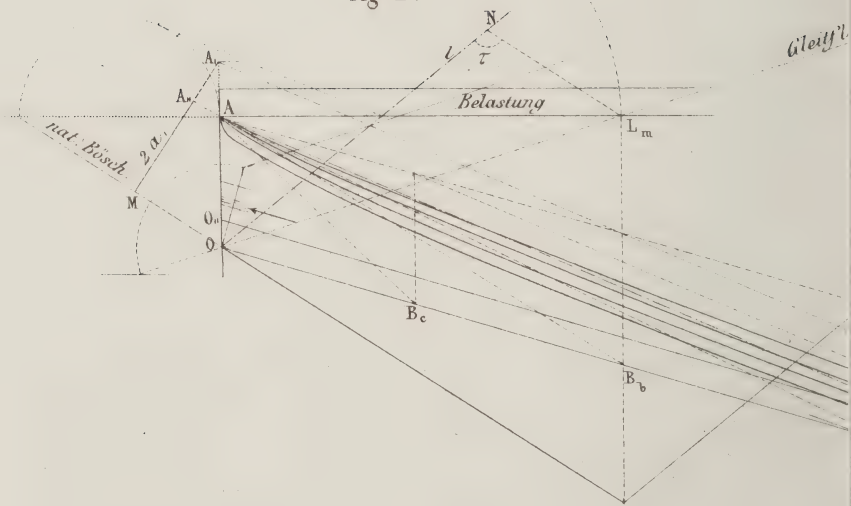


Fig. 2.



Verlag v Meyer u Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v

Fig. 1.

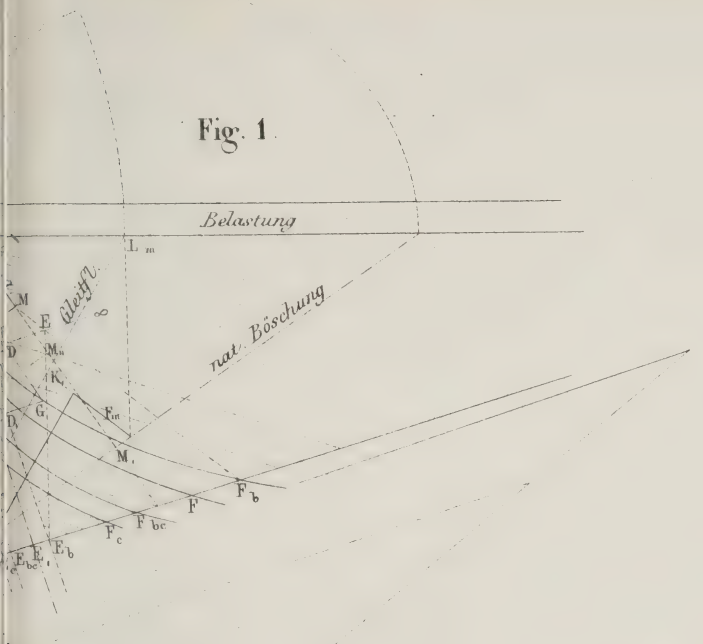
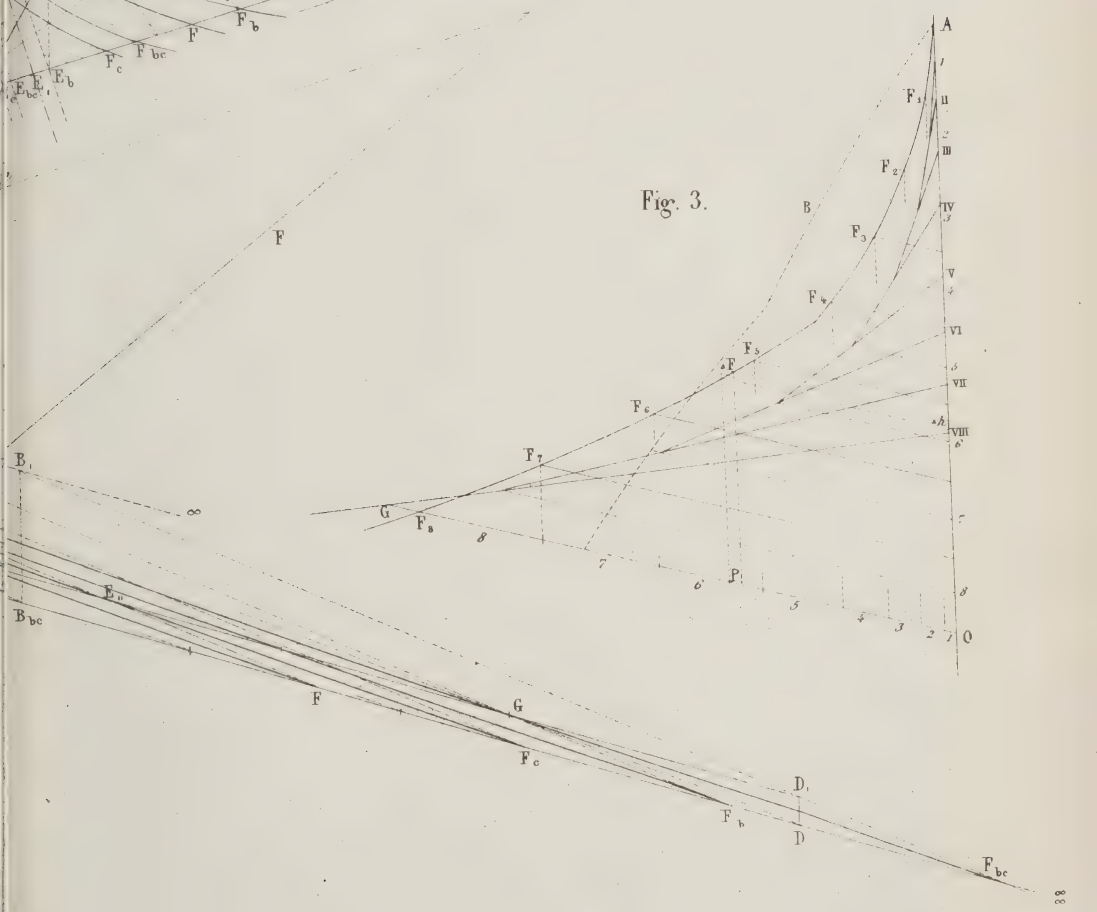


Fig. 3.



ster, Randegger & Cº in Winterthur.

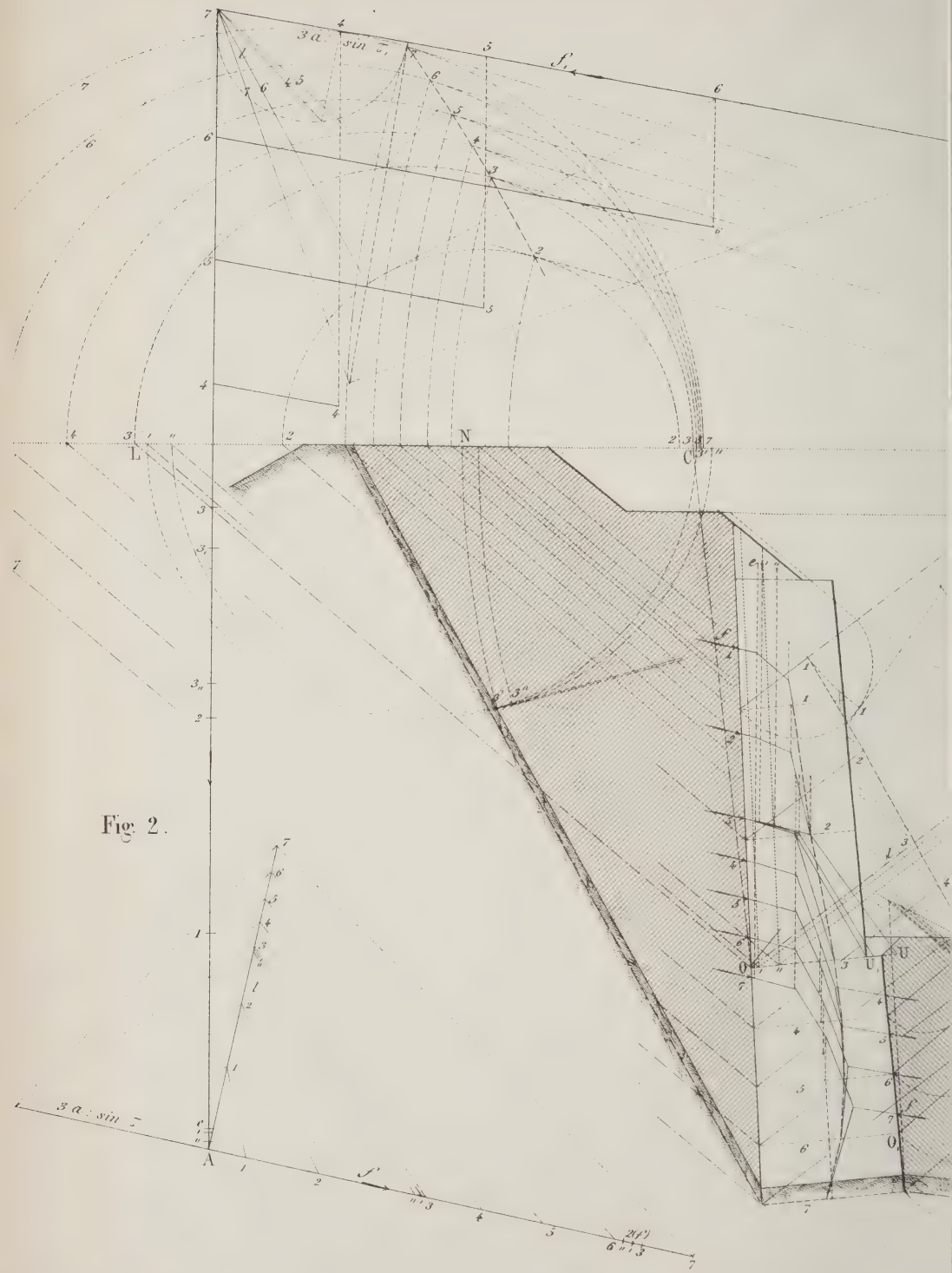
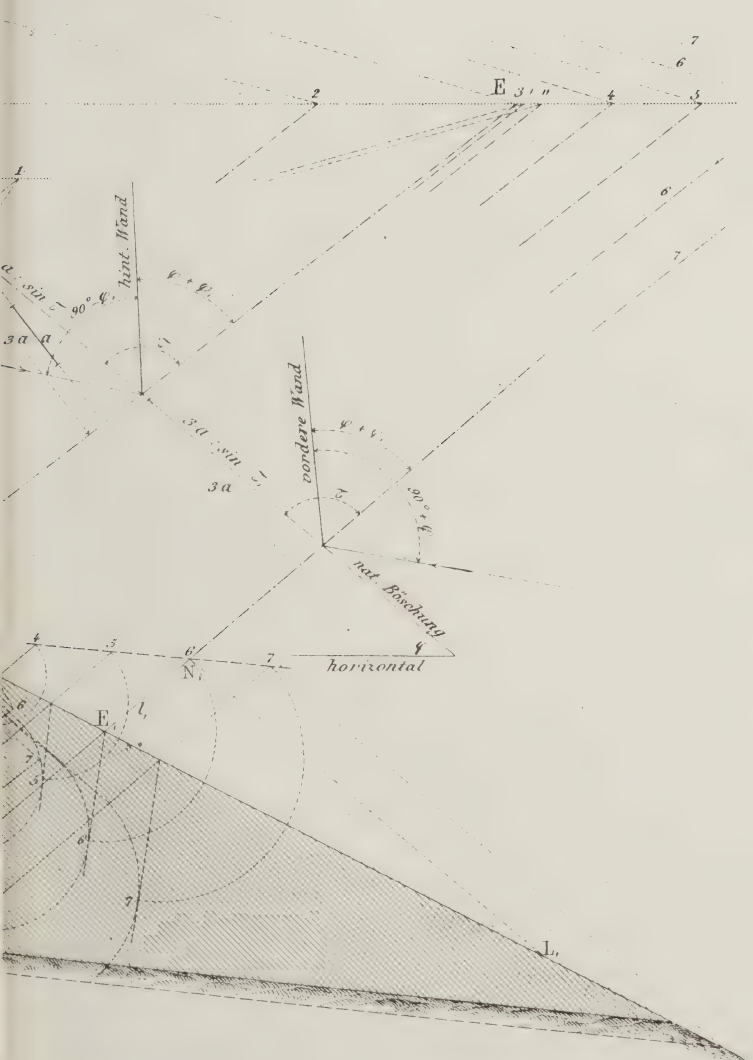


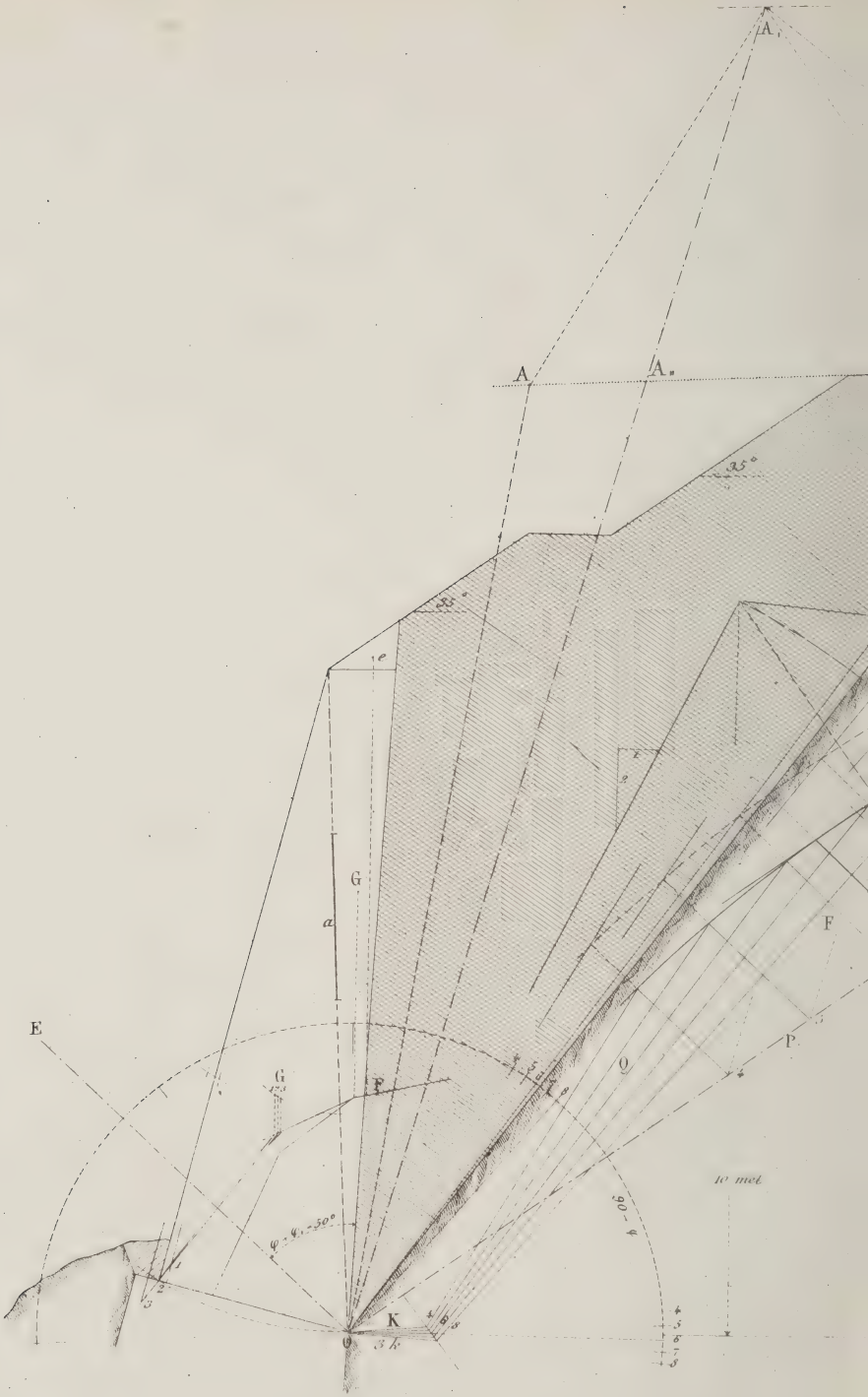
Fig. 2.

Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

$\varphi = 40°$
$\varphi_1 = 15°$
$\frac{\varpi}{\varpi_1} = 1,5$
$\sigma = 2$

Fig. 1.

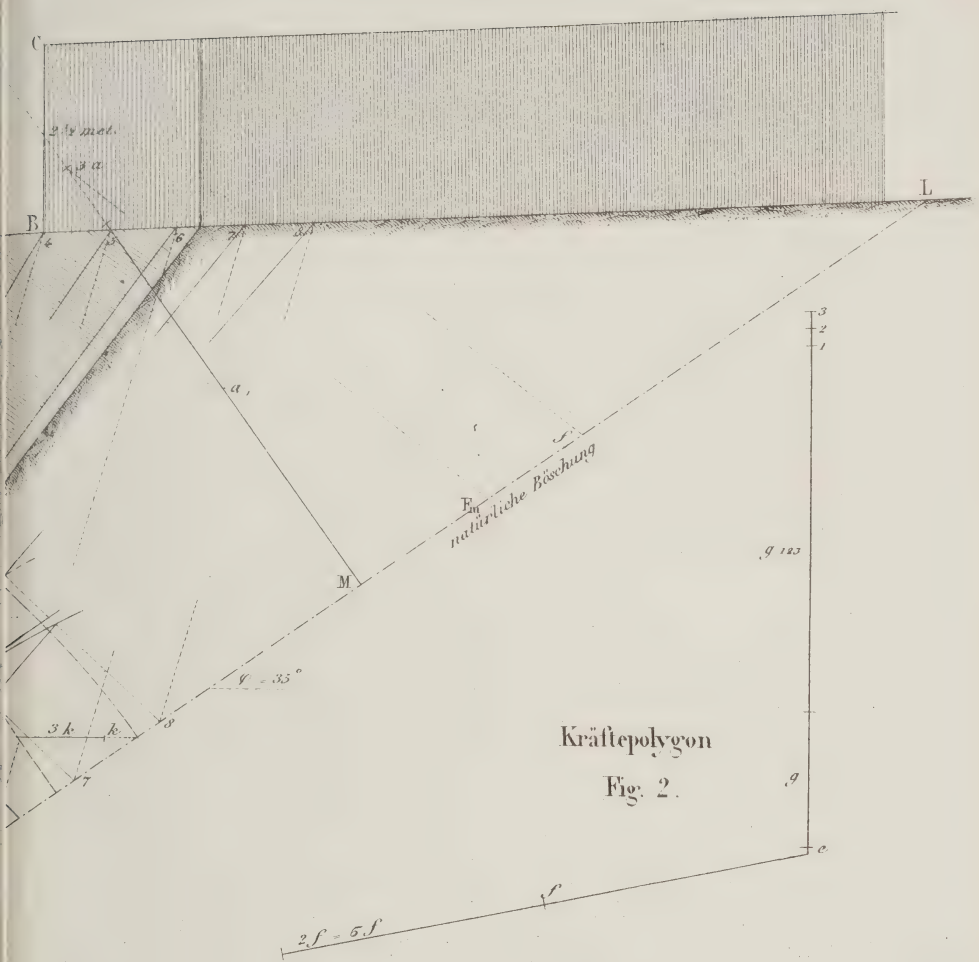




Verlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurs

Fig. 1.



Kräftepolygon

Fig. 2.

$\varphi = 35°$

$\varphi = 15°$

$\varpi : \varpi_1 = 1,5$

$\sigma = 2$

Maßstab $1 = 100$

Culmann, graphische Statik

andegger & C° in Winterthur

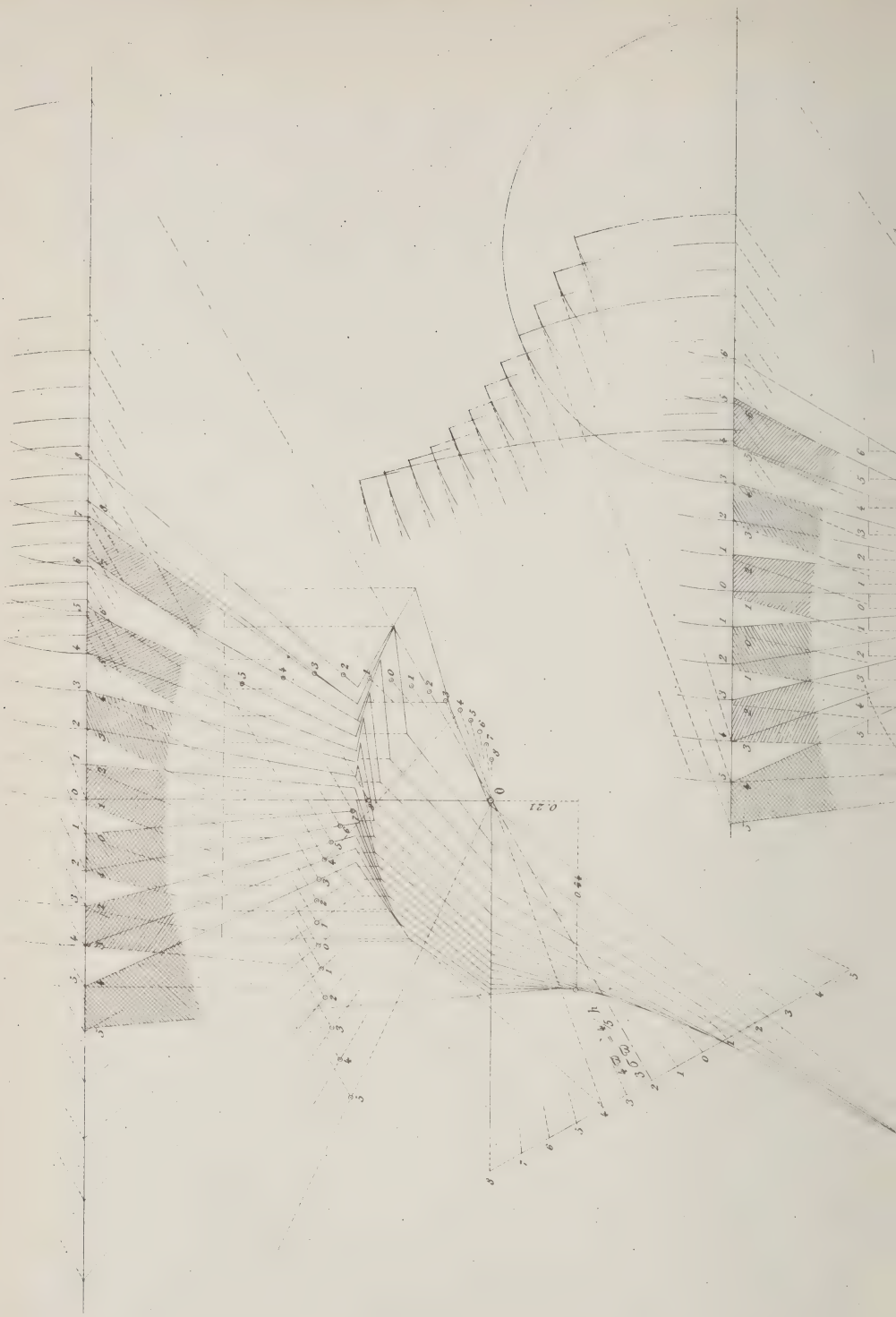
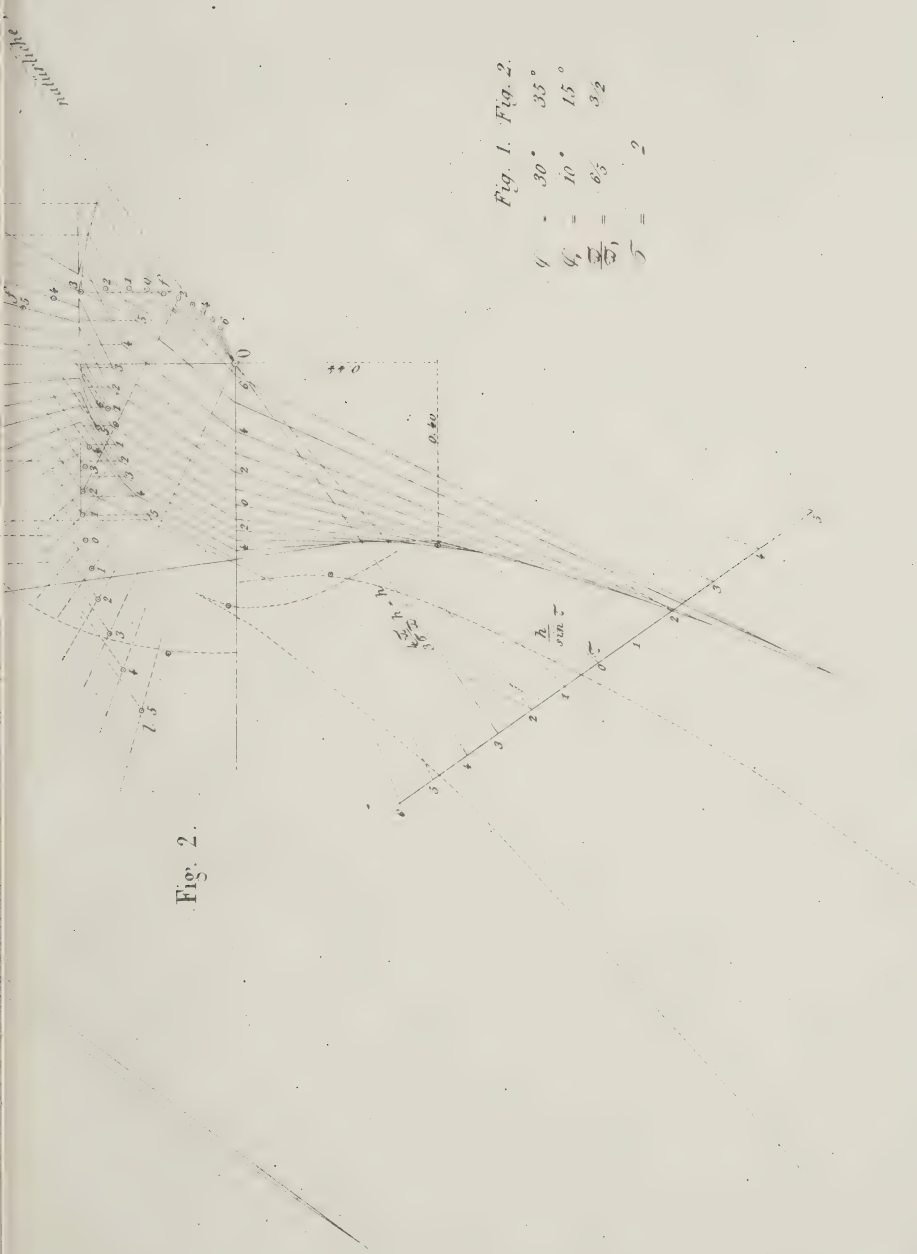


Fig. 1.

v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt von Wurs



Culmann, graphische

Randegger & C° in Winterthur.

g von Meyer u. Zeller in Zürich

Lith. Anstalt von Wurster,

ECHSELNDEM ANLAUF.

. 1.

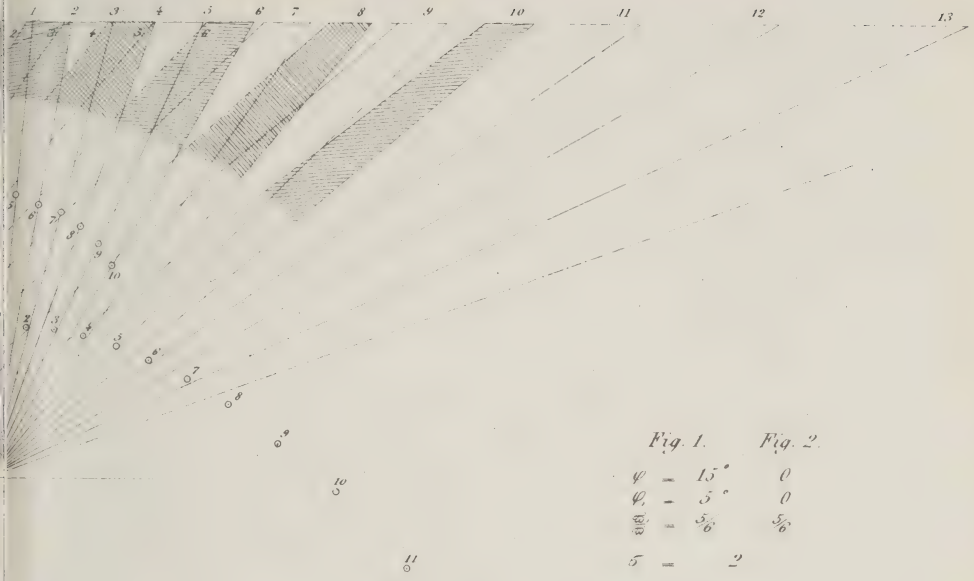
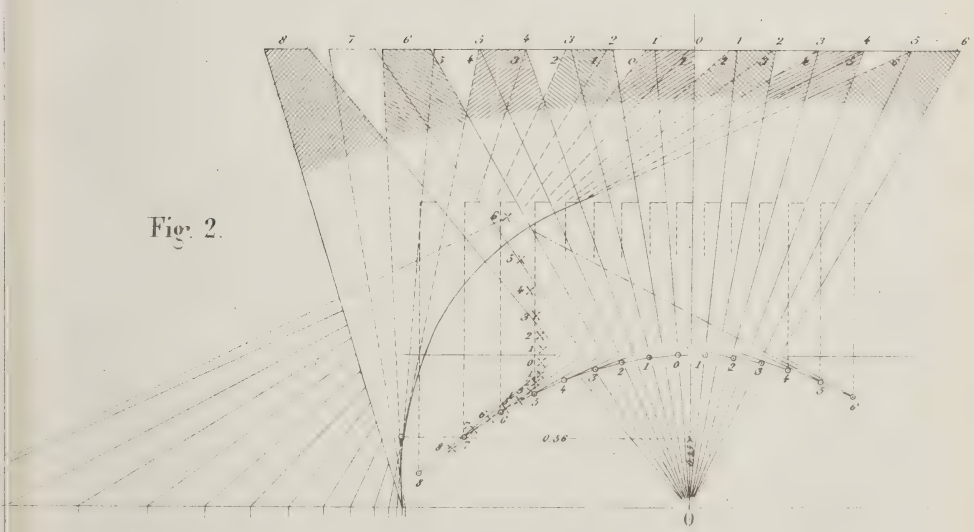


	Fig. 1.	Fig. 2.
φ	= 15°	0
φ_1	= 5°	0
$\frac{e}{t}$	= $\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{s}{t}$	=	$\frac{2}{3}$

Fig. 2.



Culmann, graphische

degger & C° in Winterthur

Fig. 1.

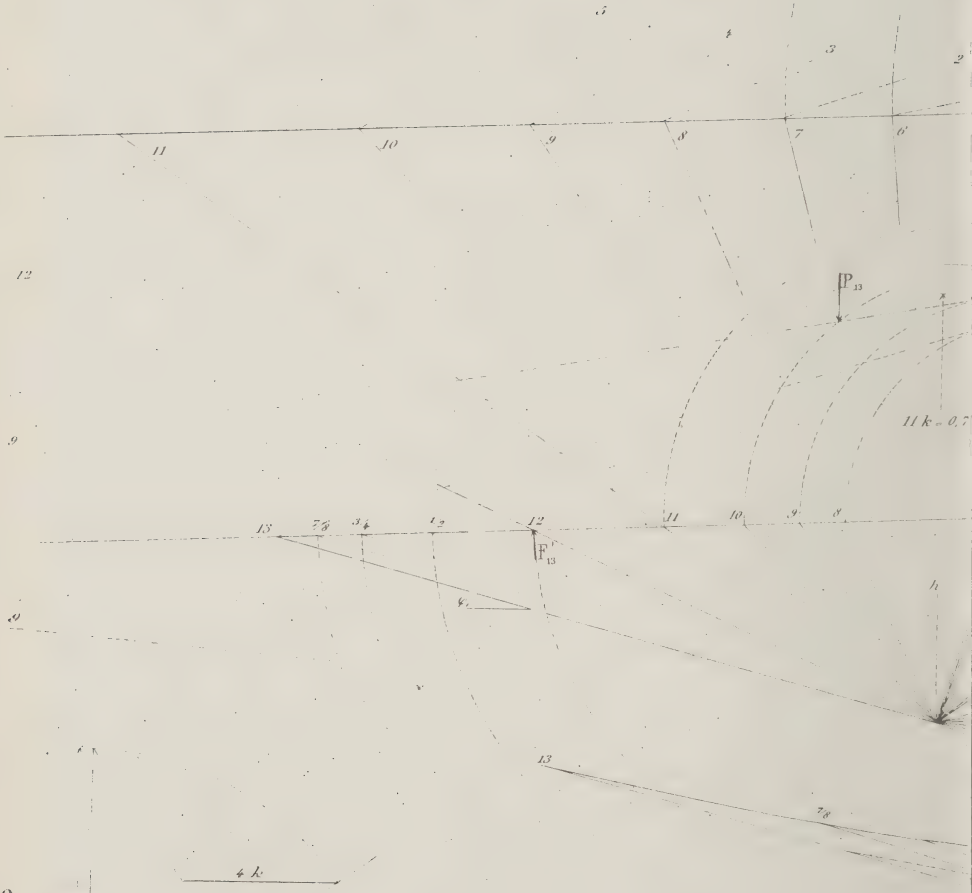


Fig. 2.

Bestimmung der Cohäsion.

v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster, Rar

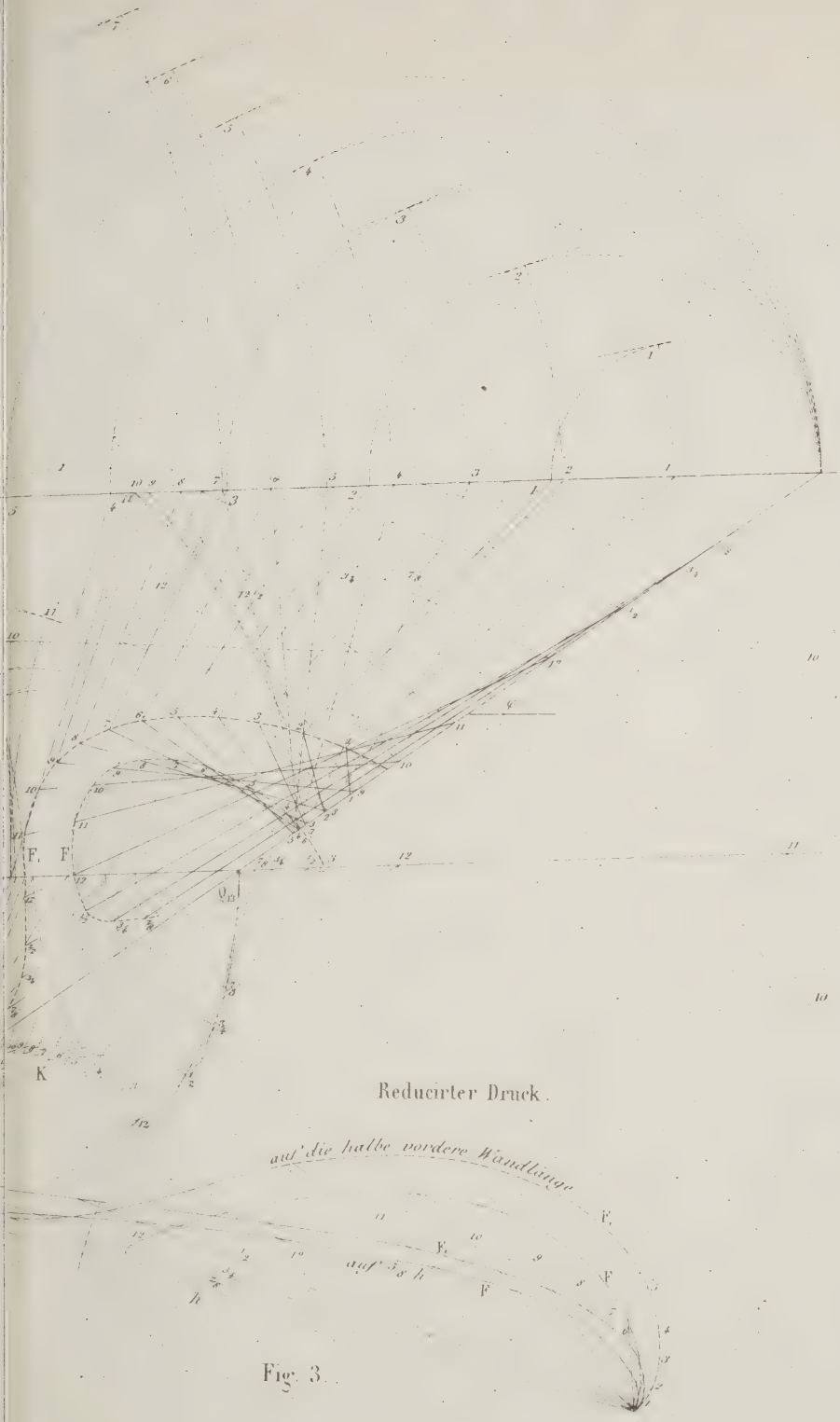
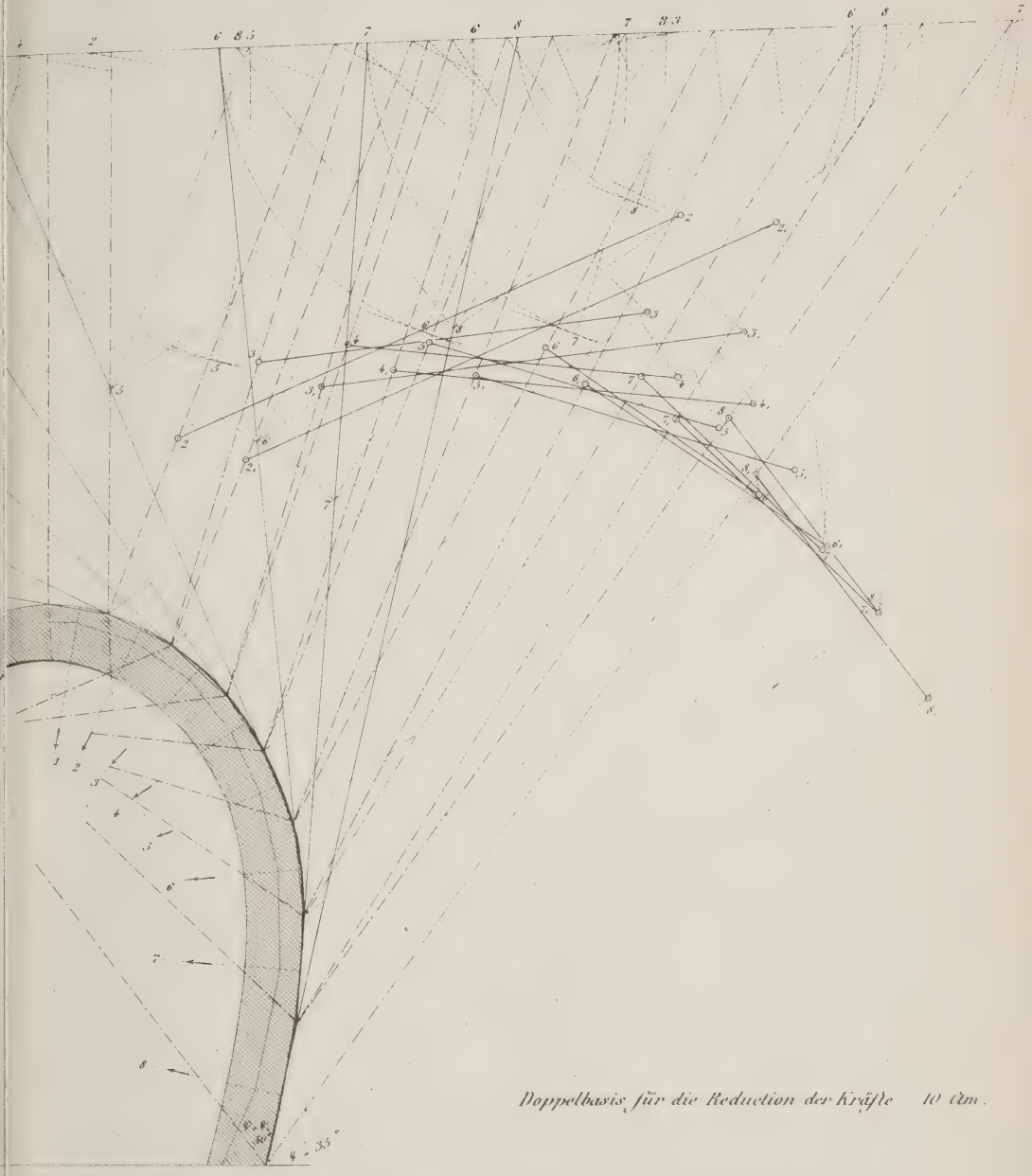

F, F
K
Reducirter Druck.
auf die halbe vordere Wandlänge
auf 5/8 h
F
F,
h

Fig. 3.

Kräftepolygon.

rlag v. Meyer u. Zeller in Zürich.

Lith. Anstalt v. Wurster, Ra



Doppelbasis für die Reduction der Kräfte 10 Ctm.

...gger & C° in Winterthur.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 063808155